

УДК 539.374+620.171.5

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ
 ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ
 В ПОЛЯРИЗАЦИОННО-ОПТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ

ШАРАФУТДИНОВ Г. З.

Основой применения поляризационно-оптического метода к решению задач нелинейной теории вязкоупругости или метода нелинейной фотовязкоупругости служит достаточно хорошо развитая экспериментальная техника, возможность выбора таких режимов деформирования или нагружения, при которых оптически чувствительный материал обладает нелинейными вязкоупругими свойствами, а также наличие физически нелинейных теорий вязкоупругости. На основе главной квазилинейной и главной кубичной теорий [1, 2] изучаются оптико-механические характеристики оптически чувствительных материалов и определяются их материальные функции. Рассмотрен также один из важнейших вопросов метода — моделирование процессов деформирования в нелинейной области.

1. Эксперименты проводились на образцах из материала на основе эпоксидной смолы ЭД-6МА с добавкой 25% полиэфиров и на поликарбонате. Эти материалы, обозначаемые в дальнейшем М1 и М2, обладают комплексом свойств, необходимых для их использования в фотовязкоупругости.

Для описания механических свойств исследуемых материалов используется главная квазилинейная теории вязкоупругости для несжимаемого тела с мгновенной линейной упругостью и ее частный случай — главная кубичная теория. Определяющие уравнения главной квазилинейной теории запишем в виде

$$s_{ij}(t) = \int_0^t R(t-\tau) de_{ij}(\tau) - \int_0^t R_\varphi(t-\tau) d[\varphi(e)e_{ij}(\tau)] \quad (1.1)$$

$$e_{ij}(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) ds_{ij}(\tau) + \int_0^t \Pi_\xi(t-\tau) d[\xi(s)s_{ij}(\tau)]$$

Здесь s_{ij} , e_{ij} — компоненты девиаторов напряжений и деформаций, $R(t)$, $\Pi(t)$ — линейные функции релаксации и ползучести; $R_\varphi(t)$, $\Pi_\xi(t)$ — нелинейные функции релаксации и ползучести соответственно, $e = e_{ij}e_{ij}$, $s = s_{ij}s_{ij}$.

При $\varphi(e) = e$ и $\xi(s) = s$ уравнения (1.1) являются определяющими соотношениями главной кубичной теории

$$s_{ij}(t) = \int_0^t R(t-\tau) de_{ij}(\tau) - \int_0^t R_s(t-\tau) d[ee_{ij}] \quad (1.2)$$

$$e_{ij}(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) ds_{ij}(\tau) + \int_0^t \Pi_s(t-\tau) d[ss_{ij}]$$

Исследуемые материалы имеют линейную, в смысле линейности [3], операторов связи между напряжениями и деформациями, область поведения. Не останавливаясь подробно на этих вопросах, ограничимся графическим представлением линейных функций ползучести обоих материалов.

Для определения нелинейных функций ползучести и релаксации используется система простейших опытов.

В эксперименте на ползучесть при одноосном растяжении напряжение изменяется по закону $\sigma_1(t) = \sigma_1^0 h(t)$, $\sigma_1^0 = \text{const}$, $h(t)$ — функция Хевисайда. Все остальные компоненты тензора напряжений равны нулю. Величины, входящие в уравнения состояния, вычисляются по формулам $s_{11} = -2\sigma_1^0 h(t)/3$, $s_{22} = s_{33} = -\sigma_1^0 h(t)/3$, $s = s_0 h(t)$, $s_0 = 2(\sigma_1^0)^2/3$.

В результате эксперимента на ползучесть в нелинейной области будем иметь

$$\Pi_3(t) = [3\varepsilon_1(t)/2\sigma_1^0 - \Pi(t)]/s_0 \quad (1.3)$$

в случае главной кубичной теории и

$$\Pi_\xi(t) \xi(s_0) = 3\varepsilon_1(t)/2\sigma_1^0 - \Pi(t) \quad (1.4)$$

в случае главной квазилинейной теории.

Аналогичным образом в эксперименте на релаксацию при одноосном растяжении в нелинейной области определим

$$R_3(t) = [R(t) - 2\sigma_1(t)/3\varepsilon_1^0] e_0 \quad (1.5)$$

$$R_\varphi(t) \varphi(e_0) = R(t) - 2\sigma_1(t)/3\varepsilon_1^0$$

Функции Π_ξ и R_φ определены с точностью до постоянных множителей. Покажем, что нет необходимости определять отдельно $\Pi_\xi(t)$ и $\xi(s)$, а также $R_\varphi(t)$ и $\varphi(e)$. С этой целью зафиксируем σ_1^{0*} , а следовательно, и s_0^* и обозначим $\xi(s_0^*) = \xi_0$. Аналогичным образом зафиксируем в эксперименте на релаксацию ε_1^{0*} и обозначим $\varphi(e_0^*) = \varphi_0$. После этого перепишем уравнения состояния в виде

$$s_{ij}(t) = \int_0^t R(t-\tau) de_{ij}(\tau) - \int_0^t \varphi_0 R_\varphi(t-\tau) d \left[\frac{\varphi(e)}{\varphi_0} e_{ij}(\tau) \right] \quad (1.6)$$

$$e_{ij}(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) ds_{ij}(\tau) + \int_0^t \xi_0 \Pi_\xi(t-\tau) d \left[\frac{\xi(s)}{\xi_0} s_{ij}(\tau) \right]$$

Видно, что для использования уравнений состояния достаточно определить лишь произведения $\varphi_0 R_\varphi$ и $\xi_0 \Pi_\xi$ и отношения $\varphi(e)/\varphi_0$ и $\xi(s)/\xi_0$.

Из соотношений (1.4) и второго в (1.5) при $\sigma_1^0 = \sigma_1^{0*}$ и $\varepsilon_1^0 = \varepsilon_1^{0*}$ найдем выражения для $\xi_0 \Pi_\xi$ и $\varphi_0 R_\varphi$:

$$\xi_0 \Pi_\xi(t) = 1,5\varepsilon_1(t)/\sigma_1^0 - \Pi(t) \quad (1.7)$$

$$\varphi_0 R_\varphi(t) = R(t) - 2\sigma_1(t)/3\varepsilon_1^0$$

При всех остальных заданных значениях напряжений или деформаций имеем

$$\frac{\xi(s_0)}{\xi_0} = \frac{1}{\xi_0 \Pi_\xi(t)} \left[\frac{3}{2} \frac{\varepsilon_1(t)}{\sigma_1^0} - \Pi(t) \right]$$

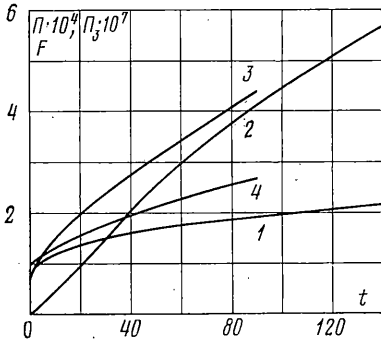
$$\frac{\varphi(e)}{e_0} = \frac{1}{\varphi_0 R_\varphi(t)} \left[R(t) - \frac{2}{3} \frac{\sigma_1(t)}{\varepsilon_1^0} \right] \quad (1.8)$$

Таким образом, соотношения (1.3), (1.5), (1.7), (1.8) полностью определяют материальные функции, входящие в уравнения состояния (1.1),

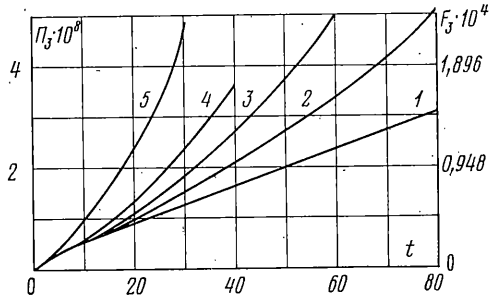
(1.2), если предварительно определены линейные функции ползучести и релаксации.

В качестве иллюстрации применим полученные соотношения к обработке результатов экспериментов на ползучесть образцов из указанных выше материалов.

Образцы из материала М1 испытывались в условиях ползучести при одноосном растяжении. Эксперименты проводились в термостате при температуре 50° С. Деформации определялись по изменению расстояния меж-



Фиг. 1



Фиг. 2

ду метками, для чего образец с нанесенными на определенной базе метками фотографировался через заданные промежутки времени.

Значения продольных деформаций $\epsilon_1 \cdot 10^2$ при одноосном растяжении и значения постоянных напряжений, при которых производились эксперименты (время t дано в мин., напряжения — в МПа) приведены в табл. 1.

Было установлено, что линейные свойства материала сохраняются до напряжений порядка 13–14 МПа. Линейная функция ползучести $\Pi(t) \cdot 0,098$ (в 1/МПа) для материала М1 приведена на фиг. 1 (кривая 1).

Нелинейная функция ползучести $\Pi_3(t) \cdot 9,4 \cdot 10^{-4}$ (в (МПа)⁻³), определенная при помощи соотношения (1.3) по представленным эксперимен-

Таблица 1

t	$\sigma_1^* = 13,4$	17,3	18,8	20,4	22,6	22,4
0	0,80	1,04	1,13	1,22	1,35	1,46
4	0,97	1,31	1,43	1,57	1,75	1,90
10	1,10	1,54	1,72	1,89	2,14	2,34
20	1,24	1,85	2,08	2,33	2,67	2,94
30	1,35	2,10	2,40	2,72	3,12	3,48
40	1,43	2,33	2,68	3,05	3,53	3,96
50	1,52	2,57	2,97	3,40	3,95	4,45
60	1,57	2,73	3,19	3,67	4,31	4,87
80	1,68	3,03	3,58	4,14	4,86	5,50
100	1,80	3,36	3,97	4,61	5,43	6,17
120	1,89	3,60	4,28	4,99	5,90	6,73
140	1,96	3,84	4,61	5,38	6,40	

тальным данным, соответствует кривой 2 на графике фиг. 1. Отметим, что функция $\Pi_3(t)$ является универсальной для всех рассмотренных значений напряжений.

При использовании главной квазилинейной теории из указанных в табл. 1 напряжений выберем любое и зафиксируем его. Пусть, например, $\sigma_1^* = 22,6$ МПа. Затем при помощи (1.7) определим $\xi_0 \Pi_\xi(t)$; это произведение и будет входить в уравнение состояния, записанное в виде (1.6) (второе уравнение). Кроме того, в это уравнение входит отношение ξ/ξ_0 , для определения которого воспользуемся (1.8). Функция $\xi_0 \Pi_\xi(t)$ совпада-

ет с точностью до постоянного множителя с функцией $\Pi_3(t)$. В данном случае этот множитель равен $35,3 \cdot 10^3$.

Отношение ξ/ξ_0 , определенное по экспериментальным данным, представлено ниже

σ_1°	= 17,3	18,8	20,4	22,6	24,4
ξ/ξ_0	= 0,56	0,71	0,86	1,0	1,11

Механические свойства материала М2 исследовались при постоянной температуре 140°C в условиях ползучести при одноосном растяжении. В этих экспериментах, как и выше, измерялись продольные перемещения, по которым определялись продольные деформации. Экспериментальные данные ($\varepsilon_1 \cdot 10^2$) для указанных значений напряжений представлены в табл. 2. Линейность механических свойств материала М2 при указанных условиях сохранялась до 6,5–7,0 МПа.

Линейная функция ползучести $\Pi(t) \cdot 0,098$ для этого материала при указанной температуре соответствует кривой 3 на фиг. 1. Нелинейная функция ползучести $\Pi_3(t) \cdot 9,4 \cdot 10^{-4}$, определенная при помощи соотношения (1.3), оказалась единой не для всех значений напряжений, а только для

Таблица 2

t	$\sigma_1^\circ=6,74$	8,12	10,42	10,97	12,22	13,51
0	0,36	0,44	0,56	0,59	0,66	0,73
4	0,55	0,72	0,93	1,05	1,25	1,54
10	0,70	0,98	1,39	1,49	1,80	2,56
20	0,93	1,33	1,92	2,08	2,64	4,62
30	1,13	1,65	1,38	2,59	3,57	7,98
40	1,28	1,96	2,85	3,09	4,64	
50	1,45	2,24	3,29	3,59	5,91	
60	1,61	2,52	3,74	4,09	7,23	
70	1,76	2,80	4,20	4,20		
80	1,90	3,06	4,64	5,08		
90	2,04	3,35				

растягивающих напряжений, не превосходящих 10,97 МПа. При превышении этого значения механические свойства материала не описываются соотношениями главной кубичной теории вязкоупругости. Это иллюстрируется зависимостями на фиг. 2, где кривая 1 соответствует функции $\Pi_3(t)$ для $\sigma_1^\circ \leq 10,97$ МПа, а кривые 2–5 — для $\sigma_1^\circ = 11,38; 12,22; 13,41; 13,51$ МПа.

Видно, что все кривые совпадают с $\Pi_3(t)$ только для небольшого начального промежутка времени; в этом случае и при $\sigma_1^\circ > 10,97$ МПа соотношения главной кубичной теории описывают механическое поведение материала.

Обращаясь теперь к соотношениям главной квазилинейной теории вязкоупругости, зафиксируем $\sigma_1^{\circ*} = 10,42$ МПа. Функция $\xi_0 \Pi_\xi(t)$ так же, как и выше, совпадает с функцией $\Pi_3(t)$ с точностью до постоянного множителя, а значения ξ/ξ_0 для этого материала представлены ниже

σ_1°	= 7,54	8,12	8,78	9,60	10,42	10,97
ξ/ξ_0	= 0,52	0,61	0,71	0,85	1,00	1,11

Значения ξ/ξ_0 при $\sigma_1^\circ > 10,97$ МПа зависят от времени.

Отметим, что при $\sigma_1^\circ = 10,97$ МПа эффект нелинейности материала при $t=90$ мин составляет величину порядка 70% при продольных деформациях, равных 0,056.

2. В экспериментах, помимо определения деформаций, регистрировались изменения порядков полос интерференции $m(t)$.

В табл. 3 приведены значения порядков полос m , отнесенные к толщине h образца из оптически чувствительного материала М2. Как более

интересный случай подробно рассматриваются оптико-механические характеристики именно этого материала.

Сравнение оптических и механических экспериментальных величин показывает, что кривые механической ползучести $\epsilon \sim t$ и оптической ползучести $m \sim t$ подобны между собой, так же как и зависимости $\sigma \sim t$ и $\sigma \sim m$. Эти экспериментальные факты показывают, что уравнения связи между оптическими и механическими величинами могут быть взяты в виде уравнений состояния для механических величин. Так, если в качестве указанных уравнений состояния выбрать соотношения главной кубичной теории

Таблица 3

t	$\sigma_1^0=6,74$	8,12	10,42	10,97	12,22	13,51
0	11,55	13,9	17,85	18,8	20,95	23,16
4	13,7	17,2	22,8	24,3	28	32,8
10	15,6	20,4	27,7	29,5	34,5	45
20	18,3	24,6	34	36,5	44,6	69,5
30	20,7	28,4	39,65	42,65	55,6	109,5
40	22,5	32	45,1	48,6	68,4	
50	24,5	35,4	50,4	54,5	83,5	
60	26,4	38,7	55,75	60,5	99,2	
70	28,2	42	61,2	66,5		
80	29,9	45,2	66,4	72,3		
90	31,5	48,6	71,5	77,9		

вязкоупругости, то уравнения связи между девиаторами диэлектрической проницаемости κ_{ij}^0 и напряжений s_{ij} можно представить в виде

$$\kappa_{ij}^0(t) = \int_0^t \psi(t-\tau) ds_{ij}(\tau) + \int_0^t \psi_s(t-\tau) d[s s_{ij}(\tau)] \quad (2.1)$$

Известно, что величина двойного лучепреломления в поляризационно-оптическом методе обусловлена разностью показателей преломления по двум главным оптическим направлениям. Поэтому вместо (2.1) образуем разность по двум взаимно перпендикулярным направлениям, совпадающим с направлениями координатных осей

$$\kappa_{11} - \kappa_{22} = \int_0^t \psi(t-\tau) d(\sigma_{11} - \sigma_{22}) + \int_0^t \psi_s(t-\tau) d[s(\sigma_{11} - \sigma_{22})] \quad (2.2)$$

где κ_{ij} — компоненты тензора диэлектрической проницаемости.

Преобразуем теперь левую часть соотношения (2.2)

$$\begin{aligned} \kappa_{11} - \kappa_{22} &= (\kappa_1 - \kappa_2) \cos 2\beta = (\sqrt{\kappa_1} + \sqrt{\kappa_2})(\sqrt{\kappa_1} - \sqrt{\kappa_2}) \cos 2\beta = \\ &= 2n_0(n_1 - n_2) \cos 2\beta = 2n_0 \lambda m \cos 2\beta / h \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь индексами 1 и 2 обозначены главные оптические направления, β — угол между ними и осями фиксированной декартовой системы координат, λ — длина волны используемого монохроматического света.

Представим функцию $\psi(t) = F(t)\psi(0)$. Тогда основное соотношение метода нелинейной фотовязкоупругости можно записать в форме

$$\begin{aligned} \sigma_0^{1,0} \frac{m(t)}{h} \cos 2\beta &= \int_0^t F(t-\tau) d(\sigma_{11} - \sigma_{22}) + \int_0^t F_s(t-\tau) d[s(\sigma_{11} - \sigma_{22})] \\ F_s(t) &= \psi_s(t) / \psi(0), \quad \sigma_0^{1,0} = 2n_0 \lambda / \psi(0) \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\sigma_0^{1,0}$ — величина, известная в поляризационно-оптическом методе под названием «цена полосы материала по напряжениям».

Ядра оптической ползучести $F(t)$ и $F_3(t)$ могут быть определены из опытов на ползучесть при одноосном растяжении таким же способом, как и ядра механической ползучести. Вид линейной функции ползучести $F(t) \cdot 0,098$ (в полосах/МПа) показан на фиг. 1 (кривая 4).

Здесь так же, как и при исследовании механических свойств, функция $F_3(t)$ оказалась универсальной лишь для всех $\sigma_1^0 \leq 10,97$ МПа. При $\sigma_1^0 > 10,97$ МПа соотношения главной кубичной теории не могут быть использованы для описания поведения оптических свойств данного оптически чувствительного материала, что можно увидеть из фиг. 2, на которой нанесен необходимый масштаб для $F_3(t)$. В данном случае оказалось возможным выбрать масштаб таким образом, что все экспериментально определенные функции $F_3(t)$ совпали с соответствующими функциями $\Pi_3(t)$ (т. е. кривая 1 соответствует функции $F_3(t) \cdot 9,4 \cdot 10^{-4}$ (в полосах/(МПа)³); при $\sigma_1^0 \leq 10,97$ МПа, а кривые 2–5 — при $\sigma_1^0 = 11,38; 12,22; 13,11; 13,51$ МПа. Поэтому можно записать, что $\Pi_3(t) = F_3(t)/a$. Для данных условий эксперимента постоянная величина a равна 46 500. Учет зависимости между Π_3 и F_3 позволяет упростить вид основного закона фотовязкоупругости, для чего рассмотрим соотношение (2.4) совместно со следующим:

$$\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} = \int_0^t \Pi(t-\tau) d(\sigma_{11} - \sigma_{22}) + \int_0^t \Pi_3(t-\tau) d[s(\sigma_{11} - \sigma_{22})] \quad (2.5)$$

Вычитая из (2.5) соотношение (2.4), поделенное на a , получим

$$\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_0^{1,0} m(t)}{ah} \cos 2\beta + \int_0^t \left[\Pi(t-\tau) - \frac{1}{a} F(t-\tau) \right] d(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \quad (2.6)$$

Пользуясь экспериментальными данными, вычисляем выражение $\Pi(t) - F(t)/a$. Эта величина оказалась не зависящей от времени и равной $1,34 \cdot 10^{-3}$.

Таким образом, вместо (2.4) или (2.6) окончательно получим:

$$\sigma_0^{1,0} m(t) \cos 2\beta / ah = (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) + b(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \quad (2.7)$$

Для заданных условий эксперимента входящие в основной закон фотовязкоупругости (2.7) величины имеют следующие значения: $\sigma_0^{1,0} = 0,58$ (Н·М/полос), $a = 46 500$ (Н), $b = 1,34 \cdot 10^{-3}$ (1/МПа), т. е.

$$m(t) \cos 2\beta / h = 797 (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) + 1,06 (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \quad (2.8)$$

Оптические свойства материала М1 подобны соответствующим свойствам материала М2. По этой причине, не приводя экспериментальных данных, укажем лишь окончательное выражение основного закона фотовязкоупругости для материала М1

$$m(t) \cos 2\beta / h = 735 (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) + 0,602 (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \quad (2.9)$$

Как можно убедиться непосредственной проверкой представленных экспериментальных данных, основной закон фотовязкоупругости в форме (2.8) выполняется и при $\sigma_1^0 > 10,97$ МПа, т. е. там, где соотношения главной кубичной теории неприменимы.

Один из коэффициентов, входящих в соотношения типа (2.8), по-видимому, может принимать в некоторых случаях пренебрежимо малое значение в том смысле, что его произведение на соответствующую разность пренебрежимо мало по сравнению с другим слагаемым. В этом случае порядок полос интерференции будет пропорционален либо разности деформаций, либо разности напряжений, что иногда встречается в литературе, посвященной методу фотовязкоупругости.

Соотношением типа (2.8) особенно удобно пользоваться при решении задач в том случае когда каким-либо независимым способом, например методом муаров, удастся определить деформации в модели.

3. Одним из важных вопросов, который необходимо решить при разработке способа моделирования любого класса задач с применением поляризационно-оптического метода, является вопрос об условиях подобия напряженно-деформированного состояния модели и прототипа. Они, помимо геометрического и силового подобия, включают также и условия подобия механических свойств. Первая группа условий подобия может быть удовлетворена в процессе постановки эксперимента соответствующим выбором формы и размеров модели, нагрузок, перемещений. Установление критериев подобия механических свойств может быть проведено только в рамках определенной теории.

Здесь рассматриваются статические изотермические процессы деформирования однородных, начально изотропных тел, испытывающих малые деформации.

Система уравнений, описывающая процесс деформирования нелинейного вязкоупругого тела, включает кроме соотношений между напряжениями и деформациями также уравнения равновесия, соотношения Коши, условие совместности деформаций, граничные условия.

Для каждой из входящих в эти уравнения величины g введем характерный масштаб g_0 и определим безразмерную величину g° по закону $g = g_0 g^\circ$. В результате система уравнений примет следующий вид:

$$\partial \sigma_{ij}^\circ / \partial x_j^\circ = 0 \quad (3.1)$$

соотношения между напряжениями и деформациями

$$s_{ij}(t) = \frac{R_0 \varepsilon_0}{\sigma_0} \left\{ \int_0^t R^\circ(t-\tau) d\varepsilon_{ij}^\circ(\tau) - \frac{R_{\varphi_0}}{R_0} \varphi_0 \int_0^t R_\varphi^\circ(t-\tau) d[\varphi^\circ(e^\circ) \varepsilon_{ij}^\circ(\tau)] \right\}$$

соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij}^\circ = \frac{1}{2} \frac{u_0}{x_0 \varepsilon_0} \left[\frac{\partial u_i^\circ}{\partial x_j^\circ} + \frac{\partial u_j^\circ}{\partial x_i^\circ} \right] \quad (3.3)$$

условия совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{hk}^\circ}{\partial x_i^\circ \partial x_j^\circ} - \frac{\partial}{\partial x_h^\circ} \left[-\frac{\partial \varepsilon_{ij}^\circ}{\partial x_h^\circ} + \frac{\partial \varepsilon_{jh}^\circ}{\partial x_i^\circ} + \frac{\partial \varepsilon_{ki}^\circ}{\partial x_j^\circ} \right] = 0 \quad (3.4)$$

граничные условия на поверхности $S = S_\sigma + S_u$

$$\sigma_{ij}^\circ l_j = \frac{f}{\sigma_0} f_i^\circ(t) \text{ на } S_\sigma, \quad u_i^\circ = \frac{g_0}{u_0} g_i^\circ(t) \text{ на } S_u \quad (3.5)$$

Будем считать, что как модель (m), так и прототип (p) изготовлены из нелинейных несжимаемых вязкоупругих материалов. Напряженно-деформированные состояния в модели и прототипе будут подобны при условии равенства соответствующих безразмерных параметров и функций модели и прототипа, входящих в систему (3.1) — (3.5).

Функцию $R^\circ(t)$ выберем исходя из основных положений работ [4, 5]. Выбор функции $R_\varphi^\circ(t)$ сводим к выбору множителя-константы, либо к выбору простейших аппроксимирующих R_φ функций, в основном отражающих поведение этой материальной функции.

Из условия совпадения безразмерных функций $\varphi^\circ(e)$ для материалов модели и прототипа в рассматриваемом интервале от начального значе-

ния e_1 до конечного e_2 определим характерную величину φ_0^m для модели

$$\varphi_0^m = \frac{\varphi_0^p}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} \frac{\varphi^m(e)}{\varphi^p(e)} de \quad (3.6)$$

Если, например, $\varphi^m(e)$ подобна $\varphi^p(e)$, т. е. если $\varphi^m(e)/\varphi^p(e) = \alpha = \text{const}$, то $\varphi_0^m = \alpha\varphi_0^p$.

Видно, что φ_0 является функцией характерной величины (масштаба) ε_0 ; в главной кубичной теории эта функция имеет вид $\varphi_0 = \varepsilon_0^2$.

Приравнявая комбинации из характерных величин при втором члене в правой части (3.2) для модельного и натурального процессов, т. е. $\varphi_0^m(\varepsilon_0^m)R_{\varphi_0^m}/R_0^m = \varphi_0^p(\varepsilon_0^p)R_{\varphi_0^p}/R_0^p$, и разрешив это уравнение относительно ε_0^m , получим необходимый для моделирования масштаб деформации $\varepsilon_0^m = \gamma(\varepsilon_0^p)$. В частности, для главной кубичной теории будем иметь $\varepsilon_0^m = [R_{\varphi_0^p}R_0^m/(R_{\varphi_0^m}R_0^p)]^{1/2}$.

Введем характерные размеры деформаций и напряжений $\varepsilon_0 = u_0/x_0$; $\sigma_0 = R_0\varepsilon_0 = 2G_0\varepsilon_0$. При этом $u_0^m/x_0^m = \gamma(\varepsilon_0^p)$, а характерный масштаб напряжений для модельного процесса $\sigma_0^m = 2G_0^m\varepsilon_0^m = 2G_0^m\gamma(\varepsilon_0^p)$.

Для подобия процессов необходимо также, чтобы комбинации характерных величин в граничных условиях (3.5) были соответственно равны для модели и прототипа; отсюда имеем

$$f_0^m = \frac{G_0^m\gamma(\varepsilon_0^p)}{G_0^p\varepsilon_0^p} f_0^p, \quad g_0^m = \frac{X_0^m\gamma(\varepsilon_0^p)}{X_0^p\varepsilon_0^p} g_0^p$$

При выполнении всех указанных условий системы уравнений (3.4)–(3.5) для модели и прототипа будут совпадать и безразмерные компоненты тензора напряжений в модели и прототипе будут равны между собой. Для компонент напряжений в прототипе получаем

$$\sigma_{ij}^p = \sigma_0^p \sigma_{ij}^m / \sigma_0^m = G_0^p \varepsilon_0^p \sigma_{ij}^m / (G_0^m \gamma(\varepsilon_0^p))$$

Отметим, что используемый подход к нелинейной фотовязкоупругости, основанный на разложении нелинейного оператора связи между напряжениями и деформациями с последующим выделением главных частей, не является единственно возможным. В различных вариантах метода фотовязкоупругости возможно применение различных теорий вязкоупругости, в том числе наследственной теории старения [6], нелинейной теории [7], основанной на модифицированном принципе сложения [8] и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
2. *Победря Б. Е.* Математическая теория нелинейной вязкоупругости. Упругость и неупругость: Сб. статей. М.: Изд-во МГУ, 1973, вып. 3, с. 95–173.
3. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
4. *Петребко В. П., Шарафутдинов Г. З.* Моделирование изотермических процессов деформирования в линейной вязкоупругости. – В кн.: Тр. VII Всес. конф. по поляризационно-оптическому методу исследования напряжений. Т. 2. Таллин: Изд-во АН ЭССР, с. 241–245.
5. *Шарафутдинов Г. З.* Решение задач линейной теории вязкоупругости поляризационно-оптическим методом. – В кн.: Поляризационно-оптический метод и его приложение к исследованию тепловых напряжений и деформаций. Киев: Наук. думка, 1976, с. 241–245.
6. *Варданян Г. С., Мусатов Л. Г., Павлов В. В.* Моделирование ползучести. – В кн.: Метод фотоупругости. Т. 3. М.: Стройиздат, 1975, с. 5–174.
7. *Бугаков И. И.* Основные уравнения метода нелинейной фотоползучести. – ПМТФ, 1974, № 2, с. 72–75.
8. *Бугаков И. И.* Применение измеренных функций в нелинейной наследственной теории ползучести. – Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 6, с. 115–123.

Москва

Поступила в редакцию
14.IV.1980