

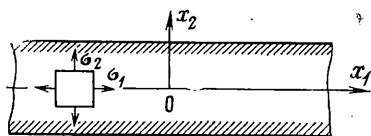
УДК 539.3

ВОЛНЫ ЛЭМБА В ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ ПЛАСТИНЕ ИЗ ИЗОТРОПНОГО НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА

ЯКОВЕНКО М. Г.

Изучается влияние предварительных напряжений и конечных деформаций на фазовую скорость распространения волн Лэмба в пластине (слое) из произвольного изотропного нелинейноупругого по Коши несжимаемого материала. Для этого используются основные соотношения из работы [1], посвященной аналогичной задаче для поверхностных волн Релея. Величины предварительных напряжений и деформаций заранее не ограничиваются. Предварительное напряженное состояние считается однородным, а предварительная нагрузка — «мертвой». Получены дисперсионные уравнения для антисимметричных и симметричных форм. Эти уравнения удается представить в виде явных зависимостей начальных напряжений от удлинений, фазовой скорости и длины волны, что оказывается весьма удобным для исследования влияния параметров начального напряженно-деформированного состояния на фазовую скорость. Показана связь с решением задачи о неустойчивости такой пластины. Рассмотрен случай равенства главных напряжений. Выведены асимптотические формулы для очень длинных волн. Приведены численные результаты.

1. Пластина из изотропного нелинейно-упругого несжимаемого материала находится под действием равномерной нормальной поверхностной нагрузки в состоянии однородного напряженно-деформированного состояния и занимает область $-h \leq x_2 \leq h$ пространства (фиг. 1). Направления



Фиг. 1

главных напряжений σ_i и главных удлинений λ_i совпадают с направлениями координатных осей x_i декартовой системы координат пространства.

Рассматривается задача о распространении в такой пластине в направлении оси x_1 плоских периодических волн (волн Лэмба).

Дифференциальные уравнения задачи [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_1} + c_{11} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + b_{21} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + (c_{12} + b_{12}) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} &= \rho \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} + (c_{21} + b_{21}) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} + b_{12} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + c_{22} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} &= \rho \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $v_1(x_1, x_2, t)$ и $v_2(x_1, x_2, t)$ — скорости материальных частиц ($v_3 = 0$), $p(x_1, x_2, t)$ — скорость изменения гидростатического напряжения, ρ — плотность.

Мгновенные модули упругости вычисляются при задании закона упругости (упругость по Коши) в виде $\sigma_i = P + \varphi_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ (P — гидростатическое напряжение) по формулам

$$c_{11} = \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_1}, \quad c_{12} = \lambda_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_2}, \quad c_{21} = \lambda_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda_1}, \quad c_{22} = \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda_2} \quad (1.2)$$

$$b_{12} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \lambda_1^2, \quad b_{21} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \lambda_2^2, \quad b_{12} - \sigma_1 = b_{21} - \sigma_2$$

Для несжимаемого материала $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. При условии, что $b_{12} > 0$, величина $c_{11} = (b_{12}/\rho)^{1/2}$ определяет скорость распространения (в метрике деформированного тела) плоской поперечной волны, распространяющейся в направлении оси x_1 в неограниченном теле.

Решение (1.1), соответствующее антисимметричным формам волн Лэмба, имеет вид

$$\begin{pmatrix} p \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (A \begin{pmatrix} -k\vartheta_1 \xi_1 \operatorname{sh} k\xi_1 x_2 \\ i\xi_1 \operatorname{sh} k\xi_1 x_2 \\ \operatorname{ch} k\xi_1 x_2 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} -k\vartheta_2 \xi_2 \operatorname{sh} k\xi_2 x_2 \\ i\xi_2 \operatorname{sh} k\xi_2 x_2 \\ \operatorname{ch} k\xi_2 x_2 \end{pmatrix}) e^{ik(x_1 - ct)} \quad (1.3)$$

Для симметричных форм синусы и косинусы в каждом столбце (1.3) взаимно заменяются. Здесь $k = 2\pi/l$ — волновое число, l — длина волны в метрике деформированного тела, c — фазовая скорость, ξ_1 и ξ_2 — корни биквадратного уравнения

$$b_{21} \xi^4 - (c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21} - b_{12} - b_{21} - \rho c^2) \xi^2 + b_{12} - \rho c^2 = 0 \quad (1.4)$$

Параметры ϑ_1 и ϑ_2 равны

$$\vartheta_1 = c_{22} - c_{21} - b_{21}(1 + \xi_1^2), \quad \vartheta_2 = c_{22} - c_{21} - b_{21}(1 + \xi_2^2) \quad (1.5)$$

Обозначим

$$c_0 = \frac{c}{c_{11}}, \quad m = \frac{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21} - 2(b_{12} + b_{21})}{b_{21}} \quad (1.6)$$

$$\beta = \sqrt{\left| \frac{b_{12} - \rho c^2}{b_{21}} \right|} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{|1 - c_0^2|}$$

Когда $c_0^2 < 1$, корни ξ_1 и ξ_2 равны

$$\xi_1 = {}^{1/2}(\sqrt{a} + \sqrt{b}), \quad \xi_2 = {}^{1/2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})$$

$$a = m + (\beta + 1)^2, \quad b = m + (\beta - 1)^2$$

В зависимости от знаков величин a и b числа ξ_1 и ξ_2 могут быть при этом действительными, комплексно-сопряженными, чисто мнимыми.

Когда $c_0^2 > 1$, то

$$\xi_1 = [{}^{1/2}(\sqrt{(m+1-\beta^2)^2 + 4\beta^2} + m + 1 - \beta^2)]^{1/2}$$

$$\xi_2 = i[{}^{1/2}(\sqrt{(m+1-\beta^2)^2 + 4\beta^2} - (m+1-\beta^2))]^{1/2}$$

2. Граничные условия на поверхностях $x_2 = \pm h$ в случае «мертвой» предварительной поверхностной нагрузки и в отсутствие добавочной нагрузки имеют вид

$$p + (c_{21} + \sigma_2) \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + c_{22} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0$$

$$(b_{12} - \sigma_1) \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + b_{21} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0 \quad (2.1)$$

Подстановка (1.3) в (2.1) приводит к дисперсионному уравнению для антисимметричных форм

$$\xi_1 [b_{21}(1+\xi_2^2) - \sigma_2]^2 \operatorname{th} \xi_1 s = \xi_2 [b_{21}(1+\xi_1^2) - \sigma_2]^2 \operatorname{th} \xi_2 s \quad (s=kh) \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) распадается на два

$$[b_{21}(1+\xi_2^2) - \sigma_2] \sqrt{\xi_1} \operatorname{th} \xi_1 s \pm [b_{21}(1+\xi_1^2) - \sigma_2] \sqrt{\xi_2} \operatorname{th} \xi_2 s = 0 \quad (2.3)$$

Откуда следует

$$\sigma_1 - b_{12} = \sigma_2 - b_{21} = b_{21} \frac{\xi_2^2 \sqrt{\xi_1} \operatorname{th} \xi_1 s \pm \xi_1^2 \sqrt{\xi_2} \operatorname{th} \xi_2 s}{\sqrt{\xi_1} \operatorname{th} \xi_1 s \pm \sqrt{\xi_2} \operatorname{th} \xi_2 s} \quad (2.4)$$

В правой части (2.4) нужно брать знаки плюс или минус одновременно в числителе и знаменателе. Выражениям (2.4) можно придать вид

$$\left\| \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} b_{12} \\ b_{21} \end{array} \right\| + \frac{\xi_2^2 \sqrt{\xi_1} \operatorname{th} \xi_1 s \pm \xi_1^2 \sqrt{\xi_2} \operatorname{th} \xi_2 s}{\sqrt{\xi_1} \operatorname{th} \xi_1 s \pm \sqrt{\xi_2} \operatorname{th} \xi_2 s} \left\| \begin{array}{c} b_{21} \\ b_{21} \end{array} \right\| \quad (2.5)$$

Если предварительная деформация плоская ($\lambda_3=1$), то $\lambda_2=1/\lambda_1$, $\xi_i = \xi_i(c_0, s, \lambda_1)$, модули b_{12} и b_{21} — функции λ_1 . Тогда соотношения (2.5) представляют при фиксированных значениях s и c_0 параметрические уравнения (в функции параметра λ_1) кривых на плоскости σ_1, σ_2 . Эти кривые, которые можно трактовать как две ветви (соответственно знакам плюс и минус) линии уровня поверхности $c_0 = c_0(\sigma_1, \sigma_2)$ при фиксированном значении $s = kh = 2\pi h/l$, позволяют судить о зависимости фазовой скорости c от напряжений и удлинений при заданной длине волны.

Для симметричных форм нужно заменить в уравнениях (2.2)–(2.5) тангенсы на котангенсы.

Использование (2.5) и аналогичных выражений для симметричных форм в режимах, где ξ_1 и ξ_2 — комплексные числа, требует дополнительных преобразований этих выражений. Например, в режиме $c_0^2 < 1$, $a > 0$, $b < 0$ будем иметь ($\delta = \sqrt{a}$, $\gamma = \sqrt{-b}$):

$$\left\| \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} b_{12} \\ b_{21} \end{array} \right\| + \frac{\beta (\delta \sin \gamma s - \gamma \operatorname{sh} \delta s) \pm \delta \gamma \sqrt{\beta} (\operatorname{sh}^2 \delta s + \sin^2 \gamma s)}{\delta \sin \gamma s \pm \gamma \operatorname{sh} \delta s} \left\| \begin{array}{c} b_{21} \\ b_{21} \end{array} \right\| \quad (2.6)$$

$$\left\| \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} b_{12} \\ b_{21} \end{array} \right\| + \frac{\beta (\delta \sin \gamma s + \gamma \operatorname{sh} \delta s) \pm \delta \gamma \sqrt{\beta} (\operatorname{sh}^2 \delta s + \sin^2 \gamma s)}{\delta \sin \gamma s - \gamma \operatorname{sh} \delta s} \left\| \begin{array}{c} b_{21} \\ b_{21} \end{array} \right\| \quad (2.7)$$

Здесь (2.6) соответствует нулевой антисимметричной форме M_0^- , (2.7) — нулевой симметричной форме M_0^+ . Аналогичные выражения можно получить и для остальных режимов, а также для границ между всеми режимами. В режиме $c_0^2 > 1$ ($q = \xi_1$, $r = |\xi_2|$) имеем

$$\left\| \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} b_{12} \\ b_{21} \end{array} \right\| + \frac{-r^2 \sqrt{q} \operatorname{th} qs \pm q^2 \sqrt{-r} \operatorname{tg} rs}{\sqrt{q} \operatorname{th} qs \pm \sqrt{-r} \operatorname{tg} rs} \left\| \begin{array}{c} b_{21} \\ b_{21} \end{array} \right\| \quad (2.8)$$

$$\left\| \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} b_{12} \\ b_{21} \end{array} \right\| + \frac{-r^2 \sqrt{q} \operatorname{tg} rs \pm q^2 \sqrt{r} \operatorname{th} qs}{\sqrt{q} \operatorname{tg} rs \pm \sqrt{r} \operatorname{th} qs} \left\| \begin{array}{c} b_{21} \\ b_{21} \end{array} \right\| \quad (2.9)$$

Формулы (2.8) имеют смысл только при $\pi n - \pi/2 < rs \leq \pi n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) и соответствуют высшим антисимметричным формам M_n^- . Формулы (2.9) имеют смысл только при $\pi n \leq rs < \pi/2 + \pi n$ ($n=0, 1, 2, 3, \dots$) и соответствуют при $n=1, 2, 3, \dots$ высшим симметричным формам M_n^+ , а при $n=0$ — продолжению формы M_0^+ в область, где $c_0^2 > 1$.

3. Рассмотрим предельные случаи, которые следуют из полученных дисперсионных уравнений.

Пусть $s=kh=2\pi h/l \rightarrow \infty$. При этом (2.5) и соответствующие выражения для симметричных форм переходят в уравнения

$$\left\| \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} b_{12} \\ b_{21} \end{matrix} \right\| - (\beta \pm \sqrt{\beta a}) \left\| \begin{matrix} b_{21} \\ b_{21} \end{matrix} \right\|, \quad \beta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{1-c_0^2} \quad (3.1)$$

Выражения (3.1), полученные ранее [1]¹, связаны с поверхностными волнами Релея и справедливы только в режимах, где $c_0^2 < 1$, $a \geq 0$. Если a обращается в нуль при каких-то значениях λ_1 и c_0 , то две ветви линии уровня поверхности $c_0=c_0(\sigma_1, \sigma_2)$ смыкаются и образуют замкнутую кривую. То же происходит и при конечных значениях параметра kh .

В случае $s=2\pi h/l \rightarrow 0$ зависимости (2.5) дают для антисимметричных форм выражения

$$\left\| \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} b_{12} \\ b_{21} \end{matrix} \right\| \pm \beta \left\| \begin{matrix} b_{21} \\ b_{21} \end{matrix} \right\|, \quad \beta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{1-c_0^2} \quad (3.2)$$

Другая запись соотношений (3.2)

$$\rho c^2 = [b_{12}b_{21} - (\sigma_1 - b_{12})^2] / b_{21} \quad (3.3)$$

В частности, при $\sigma_2=0$ формула (3.3) принимает вид $\rho c^2 = \sigma_1$, т. е. $c = (\sigma_1/\rho)^{1/2}$, что определяет скорость распространения изгибных волн в натянутой струне. Уточнение формулы $\rho c^2 = \sigma_1$ представляет собой соотношение

$$\rho c^2 = \sigma_1 + 1/3 s^2 (c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21} - 2\sigma_1)$$

Для симметричных волн при $s \rightarrow 0$ получим

$$\rho c^2 = c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21} - \sigma_1 - \sigma_2 \quad (3.4)$$

Если $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \sigma$ и при этом $\lambda_3=1$, то $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2 \rightarrow 1$, $m \rightarrow 0$, $b_{12} \rightarrow b_{21} \rightarrow \mu$, где μ — модуль сдвига недеформированного упругого тела. Тогда $\xi_1=1$, $\xi_2 = (1-c_0^2)^{1/2}$ и дисперсионное уравнение (2.4) для формы M_0^- принимает вид

$$\frac{\sigma}{\mu} = \frac{(1+\beta^2) \sqrt{\text{th } s \pm 2\sqrt{\beta} \text{ th } \beta s}}{\sqrt{\text{th } s \pm \sqrt{\beta} \text{ th } \beta s}}, \quad \beta = \sqrt{1-c_0^2} \quad (3.5)$$

Аналогичные выражения получаются и для форм M_n^- , M_0^+ , M_n^+ . При $s \rightarrow \infty$ выражение (3.5) переходит в решение задачи для поверхностных волн

$$\sigma/\mu = 1 - \beta \pm (1+\beta) \sqrt{\beta}, \quad \beta = \sqrt{1-c_0^2} \quad (3.6)$$

При $s \rightarrow 0$ для M_0^- и M_0^+ будем иметь $\sigma/\mu = 1 \pm \beta$, $\sigma/\mu = 1/2(3+\beta^2)$.

Если $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow 0$, то (3.5) переходит в решение линейной теории упругости [3], когда тело не напряжено и не деформировано (M_0^-):

$$(1+\beta^2) \sqrt{\text{th } s \pm 2\sqrt{\beta} \text{ th } \beta s} = 0 \quad (3.7)$$

Если $c_0 \rightarrow 0$, то $\beta \rightarrow \lambda_1/\lambda_2$ и из (2.5) получается решение задачи о неустойчивости пластины при двухосном нагружении, исследованной в [4]. Соответствующие кривые на плоскости $\sigma_1 \sigma_2$ при $c_0=0$ определяют границы области устойчивости по отношению к симметричным и антисимметричным возмущениям заданной длины волны.

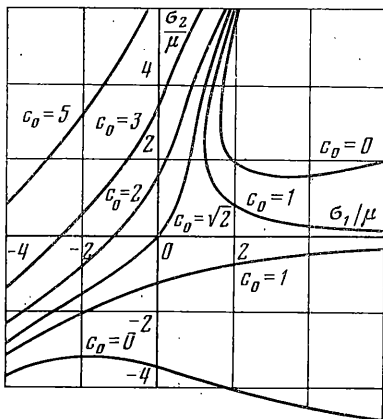
4. Рассмотрим числовые примеры. Для материала Трелоара с упругим законом $\sigma_i = P + \mu \lambda_i^2$ имеем $b_{12} = \mu \lambda_1^2$, $b_{21} = \mu \lambda_2^2$, $c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21} = 2\mu(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)$, $m=0$, $\xi_1=1$, $\xi_2 = (1-c_0^2)^{1/2}$

¹ См. также Яковенко М. Г. О влиянии начальных напряжений на скорость распространения поверхностных волн Релея в несжимаемом нелинейно-упругом полупространстве. — В кн.: VII Всес. симпоз. по дифракции и распространению волн: Тез. докл. Т. 3. М., 1977, с. 125–128.

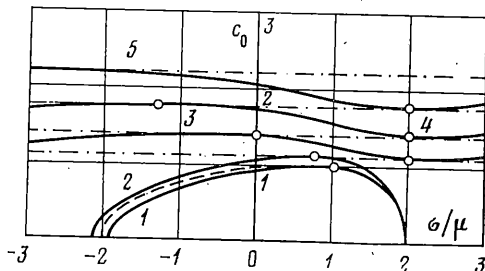
На фиг. 2 приведены линии уровня поверхности $c_0=c_0(\sigma_1, \sigma_2)$ при $2h/l=1/2$ для симметричной формы M_0^+ . Линии, где $c_0=0$, определяют верхнюю и нижнюю границы области устойчивости по отношению к симметричным возмущениям с данной длиной волны. Фиг. 2 показывает, что в предварительно напряженной пластине форма M_0^+ для заданного значения kh может распространяться при любых значениях относительной фазовой скорости $c_0=c/c_{11}$, если только специальным образом подобрать σ_1 и σ_2 (нужно учесть также, что величина c_{11} сама зависит от разности $\sigma_1-\sigma_2$).

Второй пример иллюстрирует формулы типа (3.5) и (3.6), которые относятся к случаю равенства главных напряжений σ_1 и σ_2 и плоской предварительной деформации ($\lambda_3=1$).

На фиг. 3 показана зависимость относительной скорости $c_0=c/(\mu/\rho)^{1/2}$ от σ/μ при $2h/l=1$ для форм M_0^- , M_0^+ , M_1^- , M_1^+ , M_2^- (кривые 1-5). Штрихами показана



Фиг. 2



Фиг. 3

кривая, построенная по зависимости (3.6), связанной с поверхностными волнами Релея. Важно отметить, что формулы (3.5), (3.6) и фиг. 3 справедливы для произвольного несжимаемого нелинейноупругого материала, но именно для «мертвой» поверхностной нагрузки на плоскостях $x_2=\pm h$. Если же к этим поверхностям приложена гидростатическая нагрузка, то в варианте $\sigma_1=\sigma_2$, $\lambda_3=1$ получаются в точности формулы вида (3.7), т. е. решение линейной теории упругости. Фазовая скорость в этом случае не зависит от предварительных напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яковенко М. Г. Волны Релея и поверхностная неустойчивость в предварительно деформированной нелинейно-упругой полуплоскости. — Изв. АН СССР. Физика Земли, 1979, № 2, с. 48–53.
2. Балабух Л. И., Яковенко М. Г. Об учете деформационной анизотропии в задачах устойчивости изотропных упругих тел. — В кн. Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975, с. 52–61.
3. Викторов И. А. Физические основы применения ультразвуковых волн Релея и Лэмба в технике. М.: Наука, 1966. 168 с.
4. Яковенко М. Г. Области устойчивости полосы из нелинейно-упругого несжимаемого материала при больших докритических деформациях. — Расчеты на прочность: Сб. статей. М.: Машиностроение, 1978, вып. 19, с. 204–214.

Москва

Поступила в редакцию
16.IV.1980