

УДК 539.3:534.1

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН ВИБРИРУЮЩИМ
УПРУГИМ ЦИЛИНДРОМ В СЛОЕ

ПЕЛЬЦ С. П., ЦВЕТЯНСКИЙ В. Л.

Рассматривается осесимметричная задача о вынужденных нерезонансных гармонических колебаниях упругого цилиндра на упругом слое. На основании соотношений обобщенной ортогональности для системы динамических однородных решений цилиндра строится решение указанной задачи. Данная постановка предполагает наличие статической нагрузки, прижимающей цилиндр к слою и препятствующей образованию зон отрыва. Решение статической задачи построено в [1]. Общее решение есть сумма статического и динамического решений. Здесь строится динамическая составляющая задачи.

1. Пусть ось цилиндра радиуса R , высоты L совпадает с осью ξ . Одна граничная плоскость слоя ($\xi = -h$) граничит с жестким гладким основанием, а другая ($\xi = 0$) — контактирует без трения с цилиндром. Характеристики материала цилиндра λ_1, μ_1, ρ_1 , слоя — λ_2, μ_2, ρ_2 .

Верхняя торцевая поверхность цилиндра деформируется по закону $w^{(1)}(\rho, L, t) = w_0 \exp(-i\omega t)$. Перейдем далее к безразмерным величинам $r = h^{-1}\rho, z = h^{-1}\xi, l = h^{-1}L, a = h^{-1}R, \delta = h^{-1}w_0$. Тогда граничные условия без учета временного множителя $\exp(-i\omega t)$ запишутся в виде

$$\sigma_r^{(1)}(a, z) = \tau_{rz}^{(1)}(a, z) = 0 \quad (0 \leq z \leq l) \quad (1.1)$$

$$w^{(1)}(r, l) = \delta, \quad \tau_{rz}^{(1)}(r, l) = 0 \quad (0 \leq r \leq a) \quad (1.2)$$

$$\tau_{rz}^{(2)}(r, -1) = w^{(2)}(r, -1) = \tau_{rz}^{(2)}(r, 0) = 0 \quad (0 \leq r < \infty) \quad (1.3)$$

$$\sigma_z^{(1)}(r, 0) = \sigma_z^{(2)}(r, 0) \quad (0 \leq r \leq a) \quad (1.4)$$

$$w^{(1)}(r, 0) = w^{(2)}(r, 0) \quad (0 \leq r \leq a) \quad (1.5)$$

Все обозначения с индексом 1 относятся к цилиндру, с индексом 2 — к слою.

Решение для цилиндра строится в виде ряда по однородным решениям задачи о колебаниях цилиндра со свободной боковой поверхностью

$$u^{(1)}(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k u_k^{(1)}(r, z), \quad w^{(1)}(r, z) = \delta + \sum_{k=1}^{\infty} X_k w_k^{(1)}(r, z) \quad (1.6)$$

$$u_k^{(1)}(r, z) = t_k [p_2^k (2s_2^k)^{-1} J_1(s_2^k r) - s_1^k J_1(s_1^k r)] \frac{\cos n_k(l-z)}{\cos n_k l}$$

$$w_k^{(1)}(r, z) = t_k n_k [p_2^k (2n_k^2)^{-1} J_0(s_2^k r) + J_0(s_1^k r)] \frac{\sin n_k(l-z)}{\cos n_k l}$$

$$s_j^k = \sqrt{\kappa_j^2 - n_k^2}, \quad s_j = \sqrt{\kappa_j^2 - \alpha^2} \quad (j=1, 2; k=1, 2, \dots)$$

$$\kappa_1^2 = \frac{\rho_1 \omega^2 h^2}{\lambda_1 + 2\mu_1}, \quad \kappa_2^2 = \frac{\rho_1 \omega^2 h^2}{\mu_1}, \quad t_k^{-1} = J_0(s_1^k a), \quad p_2^k = \frac{4n_k^2 s_1^4 s_2^k}{(2n_k^2 - \kappa_2^2)} \frac{J_1(s_1^k a)}{J_1(s_2^k a)}$$

$$\Delta(\alpha) = (\kappa_2^2 - 2\alpha^2)^2 J_0(s_1 a) J_1(s_2 a) - 2a^{-1} s_1 \kappa_2^2 J_1(s_1 a) J_1(s_2 a) + 4\alpha^2 s_1 s_2 J_0(s_2 a) J_1(s_1 a)$$

где n_k — корни уравнения $\Delta(\alpha) = 0$ (суммирование в (1.6) ведется по корням, лежащим в верхней полуплоскости), $J_k(z)$ — функции Бесселя, X_k — подлежащие определению коэффициенты.

Построенные выражения перемещений позволяют удовлетворить граничным условиям (1.1), (1.2)

$$\sigma_z^{(1)} = \mu_1 \sum_{k=1}^{\infty} X_k \sigma_z^k, \quad \tau_{rz}^{(1)} = \mu_1 \sum_{k=1}^{\infty} X_k \tau_{rz}^k \quad (1.7)$$

$$\sigma_z^k(r, z) = -t_k [p_1^k J_0(s_1^k r) + p_2^k J_0(s_2^k r)] \frac{\cos n_k(l-z)}{\cos n_k l}$$

$$\tau_{rz}^k(r, z) = 2n_k s_1^k \left[\frac{J_1(s_1^k a)}{J_1(s_2^k a)} J_1(s_2^k r) - J_1(s_1^k r) \right] \frac{\sin n_k(l-z)}{\cos n_k l}$$

$$p_1^k = 2n_k^2 + b\kappa_1^2, \quad b = \lambda_1 \mu_1^{-1}$$

2. Построим решение задачи для слоя методом преобразования Ханкеля, применив принцип предельного поглощения [2]. В результате получим формулы, описывающие перемещения точек слоя

$$\mu_2 w^{(2)}(r, 0) = \int_0^a \int_{\sigma} K(\alpha) \sigma_z^{(2)}(\rho, 0) J_0(\alpha \rho) J_0(\alpha r) \rho \alpha d\rho d\alpha \quad (0 \leq r < \infty) \quad (2.1)$$

$$K(\alpha) = a_1 \theta_2^2 \operatorname{sh} a_1 \operatorname{sh} a_2 [(2\alpha^2 - \theta_2^2)^2 \operatorname{sh} a_2 \operatorname{ch} a_1 - 4\alpha^2 a_1 a_2 \operatorname{sh} a_1 \operatorname{ch} a_2]^{-1}$$

$$a_k = \sqrt{\alpha^2 - \theta_k^2} \quad (k=1, 2), \quad \theta_1^2 = \rho_2 \omega^2 h^2 (\lambda_2 + 2\mu_2)^{-1}, \quad \theta_2^2 = \rho_2 \omega^2 h^2 \mu_2^{-1}$$

Функция $K(\alpha)$ четная, регулярная на действительной оси, за исключением конечного числа точек, которые являются полюсами, причем их количество и положение зависят от частоты колебаний ω . При $\alpha \rightarrow \infty$ функция убывает, как $|\alpha|^{-1}$. Принцип предельного поглощения диктует расположение контура σ [3], который совпадает с положительной частью вещественной оси всюду и отклоняется от нее, лишь обходя определенным образом особенности функции $K(\alpha)$. Имеет место соотношение

$$\int_{\sigma} \alpha K(\alpha) J_0(\alpha \rho) J_0(\alpha r) d\alpha = \pi i \sum_{v=1}^{\infty} m_v D_v Z_v, \quad Z_v = H_0^{(1)}(m_v r) J_0(m_v \rho) \quad (r > \rho)$$

$$Z_v = J_0(m_v r) H_0^{(1)}(m_v \rho) \quad (r < \rho), \quad D_v = \operatorname{res}_{\alpha=m_v} K(\alpha), \quad K^{-1}(m_v) = 0$$

где $H_k^{(1)}(z)$ — функция Ханкеля.

Учитывая условия сопряжения в области контакта (1.5), соотношения (1.7), (2.2) и воспользовавшись формулами из [4], разложим (2.1) в ряд по вычетам

$$w^{(2)}(r, 0) = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 X_k t_k p_j^k \left[\sum_{v=1}^{\infty} m_v D_v A(s_j^k, m_v) J_0(m_v r) + \right. \\ \left. + K(s_j^k) J_0(s_j^k r) \right] \quad (0 \leq r \leq a), \quad \varepsilon = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (2.3)$$

$$A(x, u) = \pi i a [u H_1^{(4)}(ua) J_0(xa) - x H_0^{(4)}(ua) J_1(xa)] (u^2 - x^2)^{-1} \quad (2.4)$$

$$w^{(2)}(r, 0) = \pi i \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 X_k t_k n_k p_j^k \sum_{v=1}^{\infty} m_v D_v L(s_j^k, m_v) H_0^{(4)}(m_v r) \quad (r > a)$$

$$L(x, u) = a [u J_1(ua) J_0(xa) - x J_0(ua) J_1(xa)] (u^2 - x^2)^{-1}$$

домножая далее (2.3), (2.4) на временный множитель $e^{-i\omega t}$, установим характер распространения волн. Так, в области контакта число стоячих волн и их характеристики зависят от всех параметров слоя и цилиндра. Вне пятна контакта от цилиндра удаляются распространяющиеся волны. Их количество равно числу вещественных полюсов m_v , фазовые скорости зависят от характеристик слоя, а параметры цилиндра влияют на амплитуду и сдвиг фаз.

Волновое поле в цилиндре описывается формулами (1.6). Условие обобщенной ортогональности динамических однородных решений цилиндра имеет вид [5]:

$$(u^k, \tau_{rz}^j) - (w^j, \sigma_z^k) = S_j \delta_{kj}, \quad u^k = u_k^{(1)}(r, z), \quad w_k = w_k^{(1)}(r, z), \quad (2.5)$$

$$(u, w) = \int_0^a u(\rho) w(\rho) \rho d\rho$$

где $\delta_{kj} = 1$ при $n_k^2 = n_j^2$ и $\delta_{kj} = 0$ при $n_k^2 \neq n_j^2$, выражения для σ_z^k , τ_{rz}^k приведены в (1.7).

Удовлетворяя условиям сопряжения на нижнем торце цилиндра, приходим к системе

$$\delta + \sum_{k=1}^{\infty} X_k t_k n_k \left[J_0(s_1^k r) + \frac{2s_1^k s_2^k}{(2n_k^2 - \kappa_2^2)} \frac{J_1(s_1^k a)}{J_1(s_2^k a)} J_0(s_2^k r) \right] \operatorname{tg} n_k l = w^{(2)}(r, 0)$$

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} X_k t_k n_k s_1^k \left[\frac{J_1(s_1^k a)}{J_1(s_2^k a)} J_1(s_2^k r) - J_1(s_1^k r) \right] \operatorname{tg} n_k l = 0 \quad (2.7)$$

Применяя соотношения обобщенной ортогональности (2.5) к (2.6), (2.7), получим

$$S_k X_k + \int_0^a w^{(2)}(\rho, 0) \sigma_z^k(\rho, 0) \rho d\rho = \delta \int_0^a \sigma_z^k(\rho, 0) \rho d\rho \quad (k=1, 2, \dots) \quad (2.8)$$

$$S_k = a n_k t_k^2 (S_1^k + S_2^k) \operatorname{tg} n_k l, \quad S_1^k = [(2n_k^2 + \kappa_2^2) J_0(s_1^k a) J_1(s_2^k a) - 2s_1^k s_2^k J_1(s_1^k a) J_0(s_2^k a)] p_2^k (2n_k s_2^k)^{-1}$$

$$a^{-1} S_2^k = (s_1^k)^2 M_1(s_1^k a) + \left(n_k^2 + \frac{b \kappa_1^2}{2} \right) M_2(s_1^k a) +$$

$$+ \frac{2}{(2n_k^2 - \kappa_2^2)} \left[n_k s_1^k \frac{J_1(s_1^k a)}{J_1(s_2^k a)} \right]^2 \left[M_1(s_2^k a) + \frac{2(s_2^k)^2}{2n_k^2 - \kappa_2^2} M_2(s_2^k a) \right]$$

$$M_1(x) = J_1^2(x) - J_0(x) J_2(x), \quad M_2(x) = J_0^2(x) + J_1^2(x)$$

Преобразуем систему (2.8) к виду

$$X_q + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{qk} X_k = \Phi_q, \quad (2.9)$$

$$\alpha_{qk} = t_q t_k S_q^{-1} \sum_{n=1}^2 \sum_{j=1}^2 p_n^k p_j^q \int_{\sigma} u K(u) L(s_n^k, u) L(s_j^q, u) du$$

$$\Phi_q = \delta ab (\kappa_1 \kappa_2)^2 t_q [S_q s_1^q (2n_q^2 - \kappa_2^2)]^{-1} J_1(s_1^q a)$$

При больших значениях номера k для корней n_k имеют место асимптотические формулы [6]:

$$n_k \sim (b_1 \ln k + b_2) + i(b_3 k + b_4) \quad (k \rightarrow \infty) \quad (2.10)$$

где b_n — действительные постоянные. Определим поведение коэффициентов системы (2.9) при $q, k \rightarrow \infty$.

Используя асимптотические оценки для функций Бесселя и для интегралов от осциллирующих функций [7], а также формулы (2.10), получим

$$\alpha_{qk} \sim O(q^{-2} k^{-1}), \quad \Phi_q \sim O(q^{-1}) \quad (k, q \rightarrow \infty) \quad (2.11)$$

Рассмотрим систему (2.9) как операторное уравнение в пространстве l_2 . Из (2.11) следует сходимость рядов

$$\sum_{q=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{qk}|^2, \quad \sum_{q=1}^{\infty} |\Phi_q|^2 \quad (2.12)$$

Из сходимости рядов (2.12) следует, что (2.9) порождает в l_2 вполне непрерывный оператор [8]. Следовательно, бесконечная система (2.9) однозначно разрешима для всех частот колебаний ω , отличных от собственных частот механической системы.

При $\mu_2 \rightarrow \infty$ получаем решение задачи о вибрации цилиндра на жестком основании.

3. Характер особенности контактных напряжений в окрестности ребра цилиндра устанавливается методом [9]. Контактные напряжения можно представить в виде формулы с явно выделенной особенностью

$$\sigma_z^{(4)}(r, 0) = \mu_1 (a-r)^{-\gamma} \sigma(r), \quad \gamma = 1 - \beta \quad (0 < \beta < 1) \quad (3.1)$$

где $\sigma(r)$ — регулярная функция, β определяется из уравнения

$$2\varepsilon(1-\nu_2)(\beta^2 - \sin^2 \frac{1}{2}\beta\pi) \cos \beta\pi / (1-\nu_1) - \sin^2 \beta\pi = 0$$

Разложим функцию $\sigma(r)$ в ряд по полиномам Якоби

$$\sigma(r) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n p_n^{(-\gamma, 0)} \left(\frac{2r}{a} - 1 \right) \quad (0 \leq r \leq a) \quad (3.2)$$

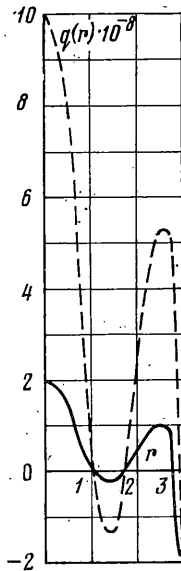
Регулярная часть контактных напряжений выражается через решение системы (2.9) [10]. Подставим (3.1) в левую часть нормальных напряжений (1.7) и применим условие ортогональности многочленов Якоби на отрезке $|x| \leq 1$ [11]. Тогда получим

$$b_n = \frac{(2n+1-\gamma)}{2} a^\gamma \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 X_\nu t_\nu p_j^\nu \int_{-1}^1 J_\nu \left[\frac{a(x+1)s_j^\nu}{2} \right] P_n^{(-\gamma, 0)}(x) dx$$

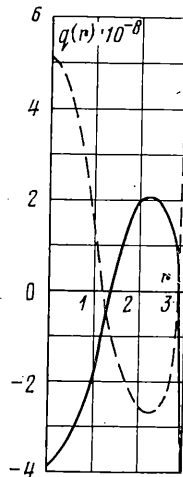
Введем коэффициент интенсивности контактных напряжений на границе области контакта $K = \mu_1^{-1} \lim [2\pi(a-r)]^{\nu} \sigma_z^{(1)}(r, 0)$ при $r \rightarrow a$. Из (3.1),

(3.2) определим $K = (2\pi)^{\nu} \sum b_n P_n^{(-\nu, 0)}(1)$ ($n=0, 1, \dots$).

На ЭВМ были проведены вычисления для различных значений механических и геометрических параметров. Решение системы (2.9) производи-



Фиг. 1



Фиг. 2

лось методом редукции. На фиг. 1, 2 приведены графики контактных напряжений $\sigma_z^{(1)}(r, 0) = q(r)$ (действительная часть — сплошная линия, мнимая — пунктирная) при $a=3$, $\mu_1 = \mu_2 = 8,19 \cdot 10^{-11}$, $\rho_1 = \rho_2$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $l=2$, $\delta=0,001$ для $\kappa_2^2=5$ и 11 соответственно.

Авторы благодарят И. И. Воровича и В. А. Бабешко за внимание к работе и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Злагин А. Н., Уфлянд Я. С. Осесимметричная контактная задача о вдавлении упругого цилиндра в упругий слой. — ПММ, 1976, т. 40, вып. 1, с. 79–84.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. Г. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
3. Бабешко В. А. О единственности решений интегральных уравнений динамических контактных задач. — Докл. АН СССР, 1973, т. 240, № 6, с. 1310–1313.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
5. Зильбергейт А. С., Нуллер В. М. Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости. — Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 2, с. 333–335.
6. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
7. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. 375 с.
8. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
9. Аксеняк О. К. Особенности напряженно-деформированного состояния в окрестности ребра. — ПММ, 1967, т. 31, вып. 1, с. 178–186.
10. Грилицкий Д. В., Поддубняк А. П. Кручение полого кругового цилиндра, сцепленного с двухслойной упругой средой. — Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 2, с. 60–70.
11. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 295 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
22.XII.1980