

УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ШТАМПА С УПРУГОЙ СРЕДОЙ

БАБЕШКО В. А., ЗИНЧЕНКО Ж. Ф., СМИРНОВА А. В.

Рассматриваются задачи о взаимодействии с упругой слоистой средой жесткого штампа, занимающего произвольную в плане область Ω , в предположении, что контакт осуществляется без трения, а штамп либо движется по заданному закону во времени, либо на него набегают нестационарные волны. Краевая задача сведена к интегральному уравнению первого рода, зависящему от параметра преобразования Лапласа, для которого установлены теоремы единственности и разрешимости и исследованы свойства решения.

Для построения решения после анализа известных подходов численного обращения преобразования Лапласа используется метод А. Н. Тихонова [1], как наиболее эффективный и удобный для данного класса задач. Показано его применение к модельным задачам, допускающим точные решения, которые другими методами численного обращения преобразования Лапласа описать не удалось. Этим методом решена задача о нестационарном контакте круглого штампа с упругим полупространством, которая рассматривалась в [2] другими методами.

1. Задача о действии произвольного в плане штампа на упругую слоистую среду описывается динамическими уравнениями Ляме с граничными условиями смешанного типа и начальными условиями. В случае вдавливания в упругое однородное полупространство штампа, занимающего область Ω граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(x, y, 0, t) = \tau_{yz}(x, y, 0, t) = 0 \quad (-\infty < x, y < +\infty) \\ w(x, y, 0, t) = f(x, y, t) \quad (x, y \in \Omega), \quad \sigma_z(x, y, 0, t) = 0 \quad (x, y \in \Omega) \end{aligned}$$

Начальные условия предполагаются нулевыми, т. е. $u(x, y, z, 0) = v(x, y, z, 0) = w(x, y, z, 0) = 0$, $u_i'(x, y, z, 0) = v_i'(x, y, z, 0) = w_i'(x, y, z, 0) = 0$.

Применением преобразований Фурье по координатам и Лапласа по времени задача сводится к решению интегрального уравнения

$$\iint_{\Omega} k(x-\xi, y-\eta, p) q_0(\xi, \eta, p) d\xi d\eta = f_0(x, y, p) \quad (x, y \in \Omega) \tag{1.1}$$

$$k(x, y, p) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K(u, p) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \quad u^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

Здесь $q_0(\xi, \eta, p)$ — преобразование Лапласа по времени от контактных давлений $q(\xi, \eta, t)$, $f_0(x, y, p)$ — преобразованный по времени закон вертикального движения штампа $f(x, y, t)$. Функция $K(u, p)$ для слоя, лежащего на упругом полупространстве, имеет вид функции¹ $K(u, \omega)$, в кото-

¹ Бабешко В. А., Воронич И. И., Седлезнев М. Г. Распространение в упругом слое волн, возникающих при колебании штампа. — В кн.: Тез. докл. Всес. симпозиума по распространению упругих и упругопластических волн. Алма-Ата: Наука, 1971, с. 23–24.

рой надо положить $\omega = ip$. Для упругого слоя, сцепленного с недеформируемым основанием

$$K(u, p) = [-\kappa_2^2 \sigma_1 (\sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sh} \sigma_1 \operatorname{ch} \sigma_2 - u^2 \operatorname{ch} \sigma_1 \operatorname{sh} \sigma_2)] / [\Delta(u, \kappa_2)] \quad (1.2)$$

$$\Delta(u, \kappa_2) = 4 \{ (2u^4 + u^2 \kappa_2^2) \sigma_1 \sigma_2 - (2u^4 + u^2 \kappa_2^2 + 0.25 \kappa_2^4) \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{ch} \sigma_1 \operatorname{ch} \sigma_2 + u^2 [2u^4 + u^2 (\kappa_1^2 + 2\kappa_2^2) + 0.25 \kappa_2^4 + \kappa_1^2 \kappa_2^2] \operatorname{sh} \sigma_1 \operatorname{sh} \sigma_2 \}$$

В случае упругого полупространства указанная функция имеет вид

$$K(u, p) = \frac{1/2 \sigma_1 \kappa_2^2}{(u^2 + 1/2 \kappa_2^2)^2 - u^2 \sigma_1 \sigma_2}, \quad \sigma_i = \sqrt{u^2 + \kappa_i^2} \quad (i=1,2), \quad (1.3)$$

$$\kappa_1^2 = \rho p^2 a^2 / (\lambda + 2\mu), \quad \kappa_2^2 = \rho p^2 a^2 / \mu$$

где ρ — плотность упругой среды, λ , μ — параметры Ляме, $2a$ — диаметр области Ω .

Отметим, что как приведенные функции $K(u, p)$, так и функции $K(u, p)$ в случае многослойной среды обладают следующими свойствами: $K(u, p)$ — положительно-определенная функция при $-\infty < u$, $p < +\infty$; функция $K(u, p)$ при любом p_0 ($\operatorname{Re} p_0 > 0$) может иметь комплексные полюсы и точки ветвления; при $|u| \rightarrow \infty$ обладает асимптотикой $K(u, p) \sim c_1 [1 + O(u^{-1})] / |u|$; при $p \rightarrow \infty$ справедлива асимптотика $K(u, p) \sim c_2 [1 + O(p^{-1})] / |p|$; при $\operatorname{Re} p \rightarrow \infty$ мнимые части точек ветвления и полюсов стремятся к бесконечности.

При наличии этих свойств справедлива теорема: Пусть функция $f(x, y, t)$ дважды непрерывно дифференцируема по x, y в области Ω с гладкой границей и непрерывна по t . Тогда интегральное уравнение (1.1), однозначно разрешимо для $p > 0$ или для $\operatorname{Re} p \gg 1$ в классе функций, непрерывных с весом $[n(\xi, \eta)]^{1/2}$.

Здесь $n(\xi, \eta)$ — параметр внутренней нормали к границе области Ω . Доказательство теоремы следует из результатов [3] и здесь не приводится. Эта теорема указывает на существование единственного решения рассматриваемой задачи и является основанием для поиска алгоритма его построения.

В публикуемой работе избран следующий алгоритм построения решения задачи: после применения преобразования Лапласа, которое приводит к появлению параметра p , интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода, т. е. в свою очередь некорректное (1.1), решается для фиксированных значений параметра p одним из хорошо развитых для его исследования методом, например [4]. Заметим, что поскольку ядро имеет слабый разрыв, его обращение можно осуществить, не прибегая к регуляризации А. Н. Тихонова. Важно отметить, что интегральное уравнение (1.1) решается для $p > 0$ или для $\operatorname{Re} p = p_0 \gg 1$ — значений параметров, при которых ядро обладает всеми свойствами ядер интегральных уравнений работы [5].

Далее, для построения функции $q(x, y, t)$ можно использовать либо вычисление интеграла обращения преобразования Лапласа

$$q(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} q_0(x, y, p) e^{pt} dp \quad (1.4)$$

либо использовать алгоритм обращения преобразования Лапласа, предложенный А. Н. Тихоновым [6]. Использование регуляризации А. Н. Тихонова при обращении преобразования Лапласа здесь целесообразно, поскольку ядро интегрального уравнения первого рода вида

$$F(x, y, p) = \int_0^{\infty} f(x, y, t) e^{-pt} dt \quad (1.5)$$

является гладким (бесконечно дифференцируемым) по параметру p . Отметим, что первый способ обращения преобразования Лапласа приводит к серьезным затруднениям в связи со сложным видом решений $q_0(x, y, p)$ при $\operatorname{Re} p = p_0$. В случае же алгоритма А. Н. Тихонова для вычисления $q(x, y, p)$ при $p > 0$ представляется возможность использования многочисленных методов решения статических задач, поскольку свойства ядра $K(u, p)$ такие же, как и в статических задачах. Важно отметить, что при достаточно больших p уравнение (1.1) хорошо решается асимптотическим методом [7].

2. Изложим схему использования алгоритма А. Н. Тихонова [8]. Функция $q(x, y, t)$ должна быть найдена из уравнения вида (1.5). Делая замену переменных $\eta = p/(1+p)$ и $\tau = t/(1+t)$, сводим данное интегральное уравнение к уравнению вида

$$u(\eta) = \int_0^1 k(\eta, \tau) z(\tau) d\tau, \quad z(\tau) = q\left(x, y, \frac{\tau}{1-\tau}\right)$$

$$u(\eta) = q_0[x, y, \eta/(1-\eta)], \quad k(\eta, \tau) = \exp[-\eta\tau(1-\eta)^{-1}(1-\tau)^{-1}] (1-\tau)^{-2}$$

Дальнейшее решение связано с построением регуляризатора, представляемого в форме

$$M_h^\alpha(z', u') = \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^n k_{ij} z'_j h - u'_i \right\} h_i + \alpha^2 \sum_{j=1}^n \left\{ l_j (z'_{j+1} - z'_j) \frac{1}{h} + p_j (z'_j)^2 h \right\}$$

который приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\alpha \left\{ \frac{1}{h^2} [l_j (z'_{j+1} - z'_j) - l_{j-1} (z'_j - z'_{j-1}) - p_j z'_j] - \left\{ \sum_{i=1}^n k_{ji}' z'_i h - b_j' \right\} \right\} = 0$$

$$k_{ji}' = \sum_{i=1}^m k_{ij} k_{ii} h_i, \quad b_j' = \sum_{i=1}^m k_{ij} u'_i h_i, \quad l_j > 0, \quad p_j > 0$$

где $u' = \{u'_i\}$ — заданная сетчатая функция на $\{\eta_i\}$, $z' = \{z'_j\}$ — сетчатая функция на $\{\tau_j\}$.

Не имея оснований для выбора функций $p(\tau)$ и $l(\tau)$, их полагали равными единице, при этом указанная система алгебраических уравнений примет следующий вид:

$$\alpha \{-z'_j (2h^{-2} + 1) + z'_{j+1} h^{-2}\} - \sum_{i=1}^n k_{ji}' z'_i h = b_j'$$

При решении этих систем параметр регуляризации α выбирался «визуально», т. е. проводились расчеты с несколькими значениями параметра регуляризации, составляющими геометрическую прогрессию ($\alpha = 10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-12}, \dots$), и из полученных результатов выбиралось наименьшее значение α , при котором не нарушается устойчивость счета регуляризованного решения и имеет место совпадение с асимптотическими решениями.

Приведем пример использования этого алгоритма в решении модельного интегрального уравнения 1-го рода вида

$$\int_{-a}^a k(x-\xi, p) q_0(\xi, p) d\xi = \Phi(p), \quad k(x-\xi, p) = \delta(x-\xi) \quad (x \geq \xi)$$

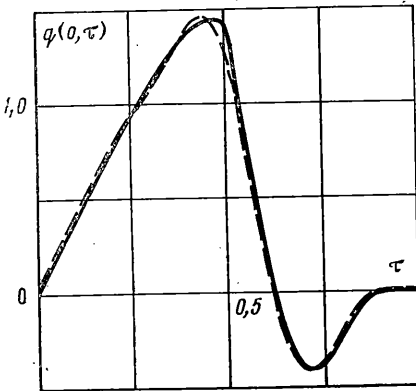
$$k(x-\xi, p) = \delta(x-\xi) + p(1-\lambda) e^{\lambda p(x-\xi)} \quad (x < \xi)$$

Точное решение этого уравнения представимо в следующей форме:

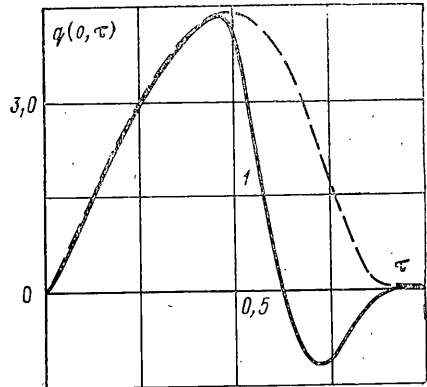
$$q_0(x, p) = \Phi(p) [\lambda + (1-\lambda) e^{-p(a-x)}], \quad q(x, t) = \lambda \varphi(t) \quad (t < a)$$

$$q(x, t) = \lambda \varphi(t) + (1-\lambda) \varphi(t-a+x) \quad (t \geq a)$$

Применение метода А. Н. Тихонова к указанному уравнению при $\varphi(t) = te^{-t}$ привело к результату фиг. 1. Отклонение приближенного решения от точного не превышает в среднем 3%. В решении этой же задачи был использован алгоритм обращения преобразования Лапласа, основан-



Фиг. 1



Фиг. 2

ный на интерполяции подынтегральной функции в (1.5) при помощи линейных комбинаций некоторой системы рациональных функций [9, с. 12].

В результате для описания $q[x, \tau(t)]$ получена кривая фиг. 2 (под номером 1 здесь приведено точное решение). Таким образом, для данного класса задач интерполяционный метод обеспечивает лишь локальное совпадение приближенного обращения Лапласа с точным при малых временах t . Это позволяет использовать данный метод как ориентировочный для выбора параметра α в методе А. Н. Тихонова. При решении конкретных задач в качестве ориентировочных можно также применять методы, позволяющие строить асимптотические при малых и больших временах решения, как это указано в рассмотренной ниже задаче.

3. Рассмотрим задачу о нестационарном действии круглого в плане штампа на упругое полупространство при отсутствии трения.

Пусть форма основания штампа и его движение описываются функцией $f(r, t) = J_0(\eta r) \varphi(t)$.

Преобразованная по Лапласу функция $f_0(r, p)$ принимает вид $f_0(x, p) = J_0(\eta r) \varphi_0(p)$.

Для построения асимптотического решения интегрального уравнения (1.1) с ядром (1.3) при малых и больших p можно воспользоваться асимптотическими методами, изложенными в [7]. Если ввести параметр $\lambda_0 = h/a$, где $h = 1/(p\delta)$, $\delta = \sqrt{\rho\mu^{-1}}$, то решение при $\eta = 0$ для малых p представляется в виде

$$q_0(r, p) = \frac{f_0(r, p)}{\pi(1-\nu)\sqrt{a^2-r^2}} \left[1 + \frac{2a_0}{\pi\lambda_0} + \left(\frac{2a_0}{\pi\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{2a_0}{\pi\lambda_0}\right)^3 + \dots \right]$$

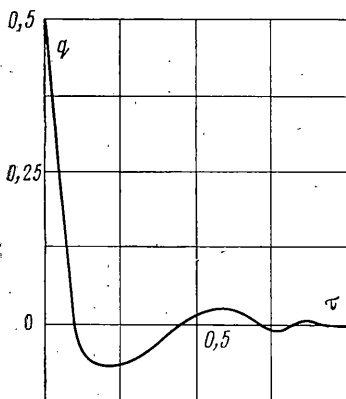
$$+ \left(\frac{2a_0}{\pi\lambda_0} \right)^4 + \frac{8a_1}{3\pi\lambda_0^3} + \frac{8a_1}{\pi\lambda_0^3} \left(1 + \frac{2a_0}{\pi\lambda_0} \right) \frac{r^2}{a^2} + O(\lambda_0^{-5}) \Big]$$

где коэффициенты a_0 и a_1 определяются вычислением некоторых интегралов, приведенных в [7].

Если p велико, то решение интегрального уравнения (1.1) строится «методом малых λ ». При $\eta=0$ решение описывается формулой

$$q_0(r, p) = \frac{f_0(r, p)}{A2(1-\nu)} \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{D}{2\lambda_0} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right]^{1/2} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{2A\lambda_0}{\pi}} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-1/2} \exp \left[-\frac{D}{2\lambda_0} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right] \right\}, \quad A=K(0, p), \quad D=1$$

Обращение двух предыдущих формул позволяет строить асимптотическое решение при больших и малых t . Для промежуточных значений параметра p использован метод сведения интегральных уравнений к алгебраическим системам и метод сведения к системам уравнений Фредгольма 2-го рода с последующим численным решением для каждого конкретного p .



Фиг. 3

На фиг. 3 приводится график распределения контактных напряжений под центром плоского штампа ($\eta=0$) на всем интервале времени при законе движения штампа $\varphi(t) = te^{-10t}$.

Характерно, что, несмотря на малые смещения штампа в начальный момент, напряжения под ним уже оказываются максимальными и в дальнейшем падают вплоть до отрыва штампа, который выражается в наличии под штампом отрицательных напряжений. Величина отрицательных напряжений в центре штампа оказывается максимальной по сравнению с другими точками. Поэтому по указанной кривой можно сделать заключение о величине статической пригрузки, обеспечивающей безотрывное движение штампа во все время.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. — Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 3, с. 501–504.
2. Сеймов В. М. Вертикальные неустановившиеся колебания жесткого штампа на упругой полуплоскости. — В кн.: Труды координационных совещаний по гидротехнике. Т. 64, ч. 2. Динамика гидросооружений. Киев: Наукова думка, 1972, с. 53–60.
3. Бабешко В. А. Новый метод в теории пространственных динамических смешанных задач. — Докл. АН СССР, 1978, т. 242, № 1, с. 62–65.
4. Бабешко В. А. Новый эффективный метод решений динамических контактных задач. — Докл. АН СССР, 1974, т. 217, № 4, с. 777–780.
5. Ворогич И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
7. Ворогич И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
8. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач. — Докл. АН СССР, 1963, т. 153, № 1, с. 49–52.
9. Крылов В. И., Скобля Н. С. Справочная книга по численному обращению преобразования Лапласа. Минск: Наука и техника, 1968. 295 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
12.VIII.1980