

УДК 539.3:534.1

## ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКИХ УПРУГИХ ВОЛН НА КЛИНЕ

ШАРИШОВА С. Х.

При помощи регулярного метода, разработанного в [1, 2] для решения динамических задач теории упругости, найдены точные аналитические решения пространственных нестационарных задач дифракции плоских продольных и поперечных волн на гладком клине. При этом учитывается, что искомые пространственные решения задач дифракции плоских волн получаются из решений соответствующих задач дифракции сферических волн при удалении источников в бесконечность.

Отметим, что плоские нестационарные задачи дифракции упругих волн на клине рассматривались в [3-8].

1. Пусть упругая среда со скоростями распространения продольных и поперечных волн  $a$  и  $b$  заполняет область  $r > 0$ ,  $0 < \theta < \pi/l$ ,  $1/2 \leq l$ ,  $-\infty < z < \infty$  и граничит с клином ( $\pi/l < \theta < 2\pi$ ), на щеках которого  $\theta = 0$ ,  $\pi/l$  заданы условия:

$$w_\theta = 0, \quad \sigma_{\theta r} = \sigma_{\theta z} = 0 \quad (1.1)$$

где  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  — цилиндрические координаты (ось  $z$  совпадает с ребром клина)  $w = \{w_r, w_\theta, w_z\}$  — вектор смещения,  $\sigma_{jk}$  — компоненты тензора напряжений ( $j, k = r, \theta, z$ ). Как известно [9], вектор смещения  $w$ , являющийся решением уравнений Ламе, можно представить в виде

$$w = \text{grad } \varphi + \text{rot } (\psi_1 e_z) + \text{rot rot } (\psi_2 e_z) \quad (1.2)$$

где продольный  $\varphi$  и скалярные поперечные потенциалы  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  удовлетворяют волновым уравнениям распространения продольных и поперечных волн,  $e_z$  — единичный вектор, направленный по оси  $z$ .

Пусть падающая волна, фронт которой достигает поверхности клина в момент  $t = t_0$ , задается потенциалами  $\varphi_0$ ,  $\psi_{10}$ ,  $\psi_{20}$ . Тогда, учитывая, что граничные условия (1.1) для потенциалов разделяются, получаем [2] следующие три системы для определения  $\varphi$ ,  $\psi_1$  и  $\psi_2$ :

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0 \quad \left( \theta = 0, \frac{\pi}{l} \right), \quad \varphi \equiv \varphi_0 (\tau < \tau_0) \quad (1.3)$$

$$\Delta \psi_1 = \gamma^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \tau^2}, \quad \psi_1 = 0 \quad \left( \theta = 0, \frac{\pi}{l} \right), \quad \psi_1 \equiv \psi_{10} (\tau < \tau_0) \quad (1.4)$$

$$\Delta \psi_2 = \gamma^2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \tau^2}, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} = 0 \quad \left( \theta = 0, \frac{\pi}{l} \right), \quad \psi_2 \equiv \psi_{20} (\tau < \tau_0) \quad (1.5)$$

$$\tau = at, \quad \tau_0 = at_0, \quad \gamma = a/b > 1$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} + r^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

решения которых не являются независимыми, а связаны условием на ребре клина [3]:

$$w = C + O(r^\varepsilon), \quad \varepsilon > 0, \quad r \rightarrow 0 \quad (C \equiv C(\tau, z)) \quad (1.6)$$

обеспечивающим интегрируемость напряжений (при  $r \rightarrow 0$ ) и единственность решения поставленной задачи.

Для решения системы (1.2)–(1.6) применим метод, разработанный в [1, 2]; в частности, в [1] этим методом рассмотрена дифракция сферических волн на клине. Покажем теперь, как из решений задач дифракции сферических волн получить решения пространственных задач дифракции соответствующих плоских волн.

Пусть имеется источник сферической волны

$$\varphi_n = f(\tau/\gamma_n + r_0 - R)/R \quad (n=0, 1, 2) \quad (1.7)$$

находящийся в точке  $(r_0, \theta_0, 0)$  и начинающий действовать в момент  $\tau = -r_0\gamma_n$ , где  $f(\tau) = 0$  при  $\tau < 0$ :

$$R = [z^2 + r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)]^{1/2}$$

$$\varphi_n = \varphi_0 \quad (n=0), \quad \varphi_n = \varphi_{n0} \quad (n=1, 2), \quad \gamma_n = 1 \quad (n=0), \quad \gamma_n = \gamma \quad (n=1, 2)$$

Введем новые независимые переменные  $z' = z + \rho_0 \cos \alpha_0$ ,  $\tau' = \tau + \gamma_n(r_0 - \rho_0)$  ( $\rho_0 = r_0/\sin \alpha_0$ ,  $0 < \alpha_0 < \pi$ ).

В новой сдвинутой системе координат  $r, \theta, z'$  источник имеет координаты  $(\rho_0 \sin \alpha_0, \theta_0, \rho_0 \cos \alpha_0)$ , т. е.  $\rho_0, \theta_0, \alpha_0$  — координаты источника в сферической системе  $\rho, \theta, \alpha$ , связанной с цилиндрической  $r, \theta, z'$  формулами  $z' = \rho \cos \alpha$ ,  $r = \rho \sin \alpha$ . При этом значение  $\tau' = 0$  соответствует моменту, когда падающая волна (1.7) достигает начала новой системы координат ( $z' = 0, r = 0$ ).

Если теперь перейти к пределу при  $\rho_0 \rightarrow \infty$ , то  $R \rightarrow \rho_0 - r \sin \alpha_0 \cos(\theta - \theta_0) - z' \cos \alpha_0$  и, следовательно

$$\rho_0 \varphi_n \rightarrow f(\tau'/\gamma_n + r \sin \alpha_0 \cos(\theta - \theta_0) + z' \cos \alpha_0) \quad (1.8)$$

Таким образом, приходим к случаю падения плоской волны из бесконечно удаленной точки со сферическими координатами  $\theta_0, \alpha_0$ . Следовательно, перейдя к пределу при  $\rho_0 \rightarrow \infty$  в решениях задач дифракции сферических волн на клине, получим решения (если они существуют) пространственных задач дифракции соответствующих плоских волн.

2. Рассмотрим случай падения плоской продольной волны в форме функции Хевисайда:  $\varphi_0 = H(\tau' + r \sin \alpha_0 \cos(\theta - \theta_0) + z' \cos \alpha_0)$ . Решение этой задачи получается из известного решения [1] соответствующей задачи дифракции сферической волны (1.7) при  $n=0$  как показано выше. Для рассматриваемой сферической волны в переменных  $\tau, r, z, \theta$ , согласно формуле (2.15) из [1], имеем ( $f(x) = H(x)$ ,  $z \geq 0$ ):

$$\varphi = \varphi_a + \cos l\theta \int_{L_0} A(1-q^2)^{1/2-1/4} T_0(x_0, q) dq$$

$$\varphi_1 = \gamma^2 \sin l\theta \int_{L_1} A(\gamma^2 - q^2)^{1/2-5/4} T_1(x_1, q) dq$$

$$\varphi_2 = \cos l\theta \int_{L_1} A(\gamma^2 - q^2)^{1/2-5/4} q dq \int_0^{x_1} T_1(x, q) dx \quad (2.1)$$

$$T_n(x, q) = P_{l-1/2} \left[ 1 + \frac{x^2 + 2x(r\sqrt{\gamma_n^2 - q^2} + r_0\sqrt{1-q^2})}{2rr_0\sqrt{(1-q^2)(\gamma_n^2 - q^2)}} \right] H(x) \quad (n=0, 1)$$

$$A = \frac{4l \sin(\pi l) \cos(l\theta_0) (1-q^2)^{1/2-1/4} H(1-l)}{\pi i \sqrt{rr_0} [(1-q^2)^l + (q^2 + \gamma^2)(\gamma^2 - q^2)^{l-1}]}$$

$$x_n = \tau + r_0 + qz - r\sqrt{\gamma_n^2 - q^2} - r_0\sqrt{1-q^2}$$

Здесь  $P_{l-1/2}(x)$  — функция Лежандра первого рода, а ветви радикалов  $(\gamma^2 - q^2)^{1/2}$  и  $(1 - q^2)^{1/2}$  выбраны так, что их значения положительны при  $q=0$  (разрезы проведены от точек  $\pm\gamma$  и  $\pm 1$  до бесконечности вдоль действительных полюсов),  $\varphi_a$  — решение соответствующей акустической задачи [1] (множитель  $H(1-l)$  введен в  $A$  на основании результатов [2], где показано, что добавочное возмущение на ребре исчезает при  $l > 1$ ). Контуры  $L_0$  и  $L_1$  определяются уравнениями

$$L_n: \operatorname{Im} f_n(q) = 0, \quad f_n(q) = qz - r\sqrt{\gamma_n^2 - q^2} - r_0\sqrt{1 - q^2} \quad (2.2)$$

и для рассматриваемого случая  $z > 0$  (этого случая достаточно, так как  $\varphi$  и  $\psi_1$  — четные, а  $\psi_2$  — нечетная функции  $z$ ) лежат в левой полуплоскости  $q$  симметрично относительно действительной оси, как показано на фиг. 1 (при  $z \rightarrow 0$  контуры  $L_0$  и  $L_1$  переходят в мнимую ось).

Рассмотрим подробнее контур интегрирования  $L_1$  в формулах (2.1). Из результатов для  $L_1$  формальной заменой параметра  $\gamma$  на 1 получаются аналогичные результаты и для  $L_0$ .

Как отмечено в [1],  $\max x_1(q)$  на  $L_1$  достигается в точке  $q_1$ , которая является точкой перевала и, следовательно, определяется из уравнения  $f_1'(q) = 0$ . Причем эта точка лежит на действительной оси в интервале  $(-1, 0)$  и при удалении от  $q_1$  вдоль  $L_1$  в верхней (или в нижней) полуплоскости функция  $f_1(q)$  монотонно убывает от  $f_1(q_1)$  до  $-\infty$ , а сама кривая  $L_1$  при удалении в бесконечность имеет асимптоты, у которых тангенсы угла наклона к оси абсцисс равны  $-(r+r_0)/z$ . По этой причине, учитывая функцию Хевисайда в подынтегральных выражениях для  $\psi_1, \psi_2$ , кривую  $L_1$  можно обогнуть в сопряженных точках  $q_1^{(1,2)}$ , удовлетворяющих уравнению  $x_1 = 0$ , т. е. уравнению  $f_1(q) = -\tau - r_0$ .

Если теперь перейти к новым переменным  $\tau', z'$  и параметрам  $\rho_0, \alpha_0$  (полагая в них без ограничения общности  $\pi/2 \leq \alpha_0 < \pi$ , чтобы удовлетворить условию  $z \geq 0$  при  $\rho_0 \rightarrow \infty$  и фиксированным  $z'$ ) и искать решения уравнений  $f_1'(q) = 0, f_1(q) = -\tau - r_0$  в виде разложений по  $\rho_0$  ( $\rho_0 \rightarrow \infty$ ):

$$q_1 = a_0 + a_1 \rho_0^{-\nu} + o(\rho_0^{-\nu}), \quad q_1^{(1,2)} = b_0 + b_1 \rho_0^{-\varepsilon} + o(\rho_0^{-\varepsilon}) \quad (2.3)$$

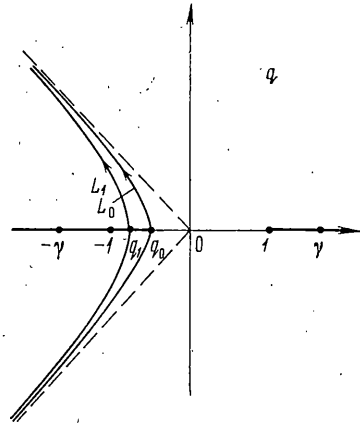
то получаем  $\nu = 1, \varepsilon = 1/2$  и определяем коэффициенты  $a_n, b_n$ . Подобные результаты для аналогичных точек  $q_0$  и  $q_0^{(1,2)}$  контура  $L_0$  находим заменяя  $\gamma$  на 1 соответственно в выражениях для  $q_1$  и  $q_1^{(1,2)}$ .

Таким образом, объединяя результаты для  $L_0$  и  $L_1$ , получаем ( $\rho_0 \rightarrow \infty$ ):

$$q_n = \cos \alpha_0 + O(\rho_0^{-1}) \quad (n=0, 1)$$

$$q_n^{(1,2)} = \cos \alpha_0 \pm \frac{\sqrt{2} \sin \alpha_0}{\sqrt{\rho_0}} (\tau' + z' \cos \alpha_0 - r\sqrt{\gamma_n^2 - \cos^2 \alpha_0})^{1/2} i + O(\rho_0^{-1}) \quad (2.4)$$

Переходя в (2.4) к новым переменным (где  $n=0$  и  $\pi/2 \leq \alpha_0 < \pi$ ), а затем делая в интегралах по  $q$  замену переменной  $s = \sqrt{\rho_0}(q - \cos \alpha_0) / (\sqrt{2} \sin \alpha_0)$  и разлагая подынтегральные выражения при  $\rho_0 \rightarrow \infty$ , приводим (2.1) к виду



Фиг. 1

$$\varphi = \varphi_a + \cos l\theta \sin^{l-1/2} \alpha_0 \Phi \int_{\bar{\mu}_0}^{\mu_0} P_{l-1/2}(y_0) ds + O(\rho_0^{-1/2})$$

$$\psi_1 = \gamma^2 \sin l\theta (\gamma^2 - \cos^2 \alpha_0)^{l/2-5/4} \Phi \int_{\bar{\mu}_1}^{\mu_1} P_{l-1/2}(y_1) ds + O(\rho_0^{-1/2}) \quad (2.5)$$

$$\psi_2 = \cos l\theta (\gamma^2 - \cos^2 \alpha_0)^{l/2-5/4} \Phi \int_0^{\tau'} d\tau' \int_{\bar{\mu}_1}^{\mu_1} P_{l-1/2}(y_1) ds + O(\rho_0^{-1/2})$$

$$y_n = \frac{s^2}{r\sqrt{\gamma_n^2 - \cos^2 \alpha_0}} + \frac{z' \cos \alpha_0 + \tau'}{r\sqrt{\gamma_n^2 - \cos^2 \alpha_0}} + O(\rho_0^{-1}) \quad (n=0,1)$$

$$\Phi = \frac{4\sqrt{2}l \sin \pi l \cos l\theta_0 \sin^l \alpha_0 H(1-l)}{\pi i \rho_0 \sqrt{r} [\sin^{2l} \alpha_0 + (\gamma^2 + \cos^2 \alpha_0) (\gamma^2 - \cos^2 \alpha_0)^{l-1}]}$$

$$\mu_n = i[\tau' + z' \cos \alpha_0 - r\sqrt{\gamma_n^2 - \cos^2 \alpha_0}]^{1/2} + O(\rho_0^{-1/2})$$

где  $\mu_n$  и  $\bar{\mu}_n$  — комплексно-сопряженные функции.

Согласно формуле 3.7 (29) из [10], при  $\rho_0 \rightarrow \infty$  получим

$$\int_{\bar{\mu}_n}^{\mu_n} P_{l-1/2}(y_n) ds \rightarrow [r\sqrt{\gamma_n^2 - \cos^2 \alpha_0}]^{1/2} \int_{-v_n i}^{v_n i} P_{l-1/2}(s^2 + v_n^2 + 1) ds =$$

$$= [r\sqrt{\gamma_n^2 - \cos^2 \alpha_0}]^{1/2} i \int_1^{c_n} P_{l-1/2}(x) \frac{dx}{\sqrt{c_n - x}} = \frac{i}{l\sqrt{2}} [r\sqrt{\gamma_n^2 - \cos^2 \alpha_0}]^{1/2} F(l, c_n)$$

$$v_n = \sqrt{c_n - 1}, \quad c_n = (\tau' + z' \cos \alpha_0) / (r\sqrt{\gamma_n^2 - \cos^2 \alpha_0})$$

$$F(l, c_n) = [(c_n + \sqrt{c_n^2 - 1})^l - (c_n - \sqrt{c_n^2 - 1})^l] H(c_n - 1)$$

Умножая обе части формул (2.5) на  $\rho_0$  и переходя в них к пределу при  $\rho_0 \rightarrow \infty$ , окончательно находим решение задачи в элементарных функциях

$$\varphi = \varphi_a^p + B \cos l\theta F(l, c_0)$$

$$\psi_1 = B \beta^{l-2} (\beta^2 + \text{ctg}^2 \alpha_0) \sin l\theta F(l, c_0/\beta) \quad (2.7)$$

$$\psi_2 = \frac{r}{2} \beta^{l-1} B \cos l\theta \text{ctg} \alpha_0 \left[ \frac{F(l+1, c_0/\beta)}{l+1} - \frac{F(l-1, c_0/\beta)}{l-1} \right]$$

$$\beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - \cos^2 \alpha_0}}{\sin \alpha_0}, \quad B = \frac{4 \cos l\theta_0 \sin \pi l H(1-l)}{\pi [1 + \beta^{2l} + 2\beta^{2l-2} \text{ctg}^2 \alpha_0]}$$

$$\sigma(\theta) = 0 \quad (\pi < |\theta| < \pi/l); \quad \sigma(\theta + 2\pi/l) = \sigma(\theta)$$

$$(\theta + \theta_0)^* = \theta + \theta_0 + 2\pi m/l$$

В формуле (2.8) значения арктангенсов берутся в интервале  $(0, \pi)$ , целое число  $m$  ( $m=0, -1$ ) выбирается так, чтобы в рассматриваемой точке физического пространства всегда выполнялось неравенство  $-\pi/l < (\theta + \theta_0)^* \leq \pi/l$ .

Решение (2.7), полученное при  $\pi/2 \leq \alpha_0 < \pi$ , остается верным во всем диапазоне  $0 < \alpha_0 < \pi$  (что легко проверяется при помощи замены  $\alpha_1 = \pi - \alpha_0$ ,

$z_1' = -z'$  и при  $\alpha_0 = \pi/2$  дает известное плоское решение [3, 5]. Как следует из (2.8), в случае симметрии ( $\theta_0 = \pi/(2l)$ ) и при  $l > 1$  решение, добавочное к акустическому, обращается в нуль.

Отметим, что решенная здесь пространственная задача о дифракции на клине плоской продольной волны рассматривалась другим методом в [12]. К сожалению, в окончательных формулах этой работы содержатся ошибки [13].

Здесь  $\varphi_a^p$  — соответствующее решение акустической задачи, согласно [11] имеющее вид:  $\varphi_a^p = \varphi_a^\circ(r \sin \alpha_0, \theta, \tau' + z' \cos \alpha_0)$ , где  $\varphi_a^\circ(r, \theta, \tau)$  (которое является решением задачи о дифракции на том же клине плоской волны  $\varphi_0 = H[\tau + r \cos(\theta - \theta_0)]$ ) и определяется выражением при  $l < 1$

$$\begin{aligned} \varphi_a^\circ(r, \theta, \tau) = & H(r - \tau) \{ \sigma(\theta - \theta_0) H[\tau + r \cos(\theta - \theta_0)] + \\ & + \sigma(\theta + \theta_0) H[\tau + r \cos(\theta + \theta_0)] * \} + \frac{1}{\pi} H(\tau - r) [\operatorname{arctg} \lambda_+ + \operatorname{arctg} \lambda_-] \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{(1 - y^{2l}) \sin \pi l}{(1 + y^{2l}) \cos \pi l - 2y^l \cos l(\theta \pm \theta_0)}$$

$$y = \frac{\tau}{r} - \left[ \left( \frac{\tau}{r} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}; \quad \sigma(\theta) = 1 \quad (|\theta| < \pi)$$

3. Рассмотрим теперь падающие сферические поперечные волны, определяемые потенциалами  $\psi_1 = \psi_{10}$ ,  $\psi_2 = \psi_{20}$ :

$$\psi_{h0} = (\tau/\gamma + r_0 - R)^{h-1} H(\tau/\gamma + r_0 - R)/R \quad (h=1, 2) \quad (3.1)$$

В случае волны  $\psi_{20}$  решение этой задачи описывается системой (1.2) — (1.6), в которой следует положить  $\varphi_0 = \psi_{10} = 0$ . Процедура решения этой системы описана в [1, 2], причем в [2] решение получено для общего вида граничных условий. В результате решение для падающей волны  $\psi_{20}$  определяется формулами (2.13), (2.14) из [2], если в формуле для  $C_{12}$  из (2.13) и формулах (2.14) положить (в обозначениях [2]):

$$M_1 = M_{11} = 0, \quad M_{12} = \frac{8 \cos l\theta_0}{\gamma q^2 \Gamma(l)} \left( \frac{\kappa}{2} \right)^l e^{\gamma q r_0} K_l(r_0 \kappa)$$

$$F_n(r) = 0 \quad (n \geq 0), \quad F_{n1}(r) = 0 \quad (n \geq 1)$$

$$\frac{1}{2} F_{02}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} F_{n2}(r) \cos n l \theta = \psi_{2a}^{LL}$$

где  $\psi_{2a}^{LL}$  — изображение по Лапласу по  $\tau$  и  $z$  решения соответствующей акустической задачи  $\psi_{2a}(\tau, r, z, \theta)$ , которое определяется из выражения (2.13) работы [1] для  $\varphi_a(\tau, r, z, \theta)$  (в котором  $f(x) = xH(x)$ ) по формуле  $\psi_{2a}(\tau, r, z, \theta) = \varphi_a(\tau/\gamma, r, z, \theta)$ .

В случае падающей сферической волны  $\psi_{10}$  решение задачи дифракции будет описываться системой (1.2) — (1.6), в которой следует положить  $\varphi_0 = \psi_{20} = 0$ . Но в этом случае, если учитывать [2], величина

$$r f_{n1} = \frac{2l^2 n}{\pi r} [\psi_{10}^{LL} |_{\theta=0} - (-1)^n \psi_{10}^{LL} |_{\theta=\pi/l}]$$

имеет порядок  $O(r^{-1})$  при  $r \rightarrow 0$  и для решения поставленной задачи (первой задачи — в терминах [2]) необходимо свести эту задачу к сходной динамической задаче (второй задаче — в терминах [2]). Тогда, решая такую задачу способом, указанным в [2], находим искомое решение для волны  $\psi_{20}$ .

Подытоживая результаты для  $\psi_{10}$  и  $\psi_{20}$ , получаем, что искомое решение задачи дифракции на клине сферической волны  $\psi_{k0}$  ( $k=1, 2$ ) имеет следующий вид при  $z \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \varphi^{(k)} &= \cos \theta \int_{N_0} (\gamma^2 - q^2)^{5/4 - l/2} (1 - q^2)^{1/2 - 1/4} DE_n S_0(u_0, q) dq \\ \psi_1^{(k)} &= \psi_{1a} \delta_{k1} + \gamma^2 \sin \theta \int_{N_1} DE_n S_1(u_1, q) dq \\ \psi_2^{(k)} &= \psi_{2a} \delta_{k2} + \cos \theta \int_{N_1} q DE_n dq \int_0^{u_1} S_1(u, q) du \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$D = \frac{4l \sin \pi l (\gamma^2 - q^2)^{l-1/2} H(1-l)}{\pi i \sqrt{rr_0} [(1-q^2)^l + (q^2 + \gamma^2)(\gamma^2 - q^2)^{l-1}]}$$

$$E_n = \sin \theta_0 \quad (n=1), \quad E_n = q \cos \theta_0 / \gamma \quad (n=2), \quad \delta_{jm} = 1 \quad (j=m), \quad \delta_{jm} = 0 \quad (j \neq m)$$

$$u_n = \tau + qz + \gamma r_0 - r \sqrt{\gamma_n^2 - q^2} - r_0 \sqrt{\gamma^2 - q^2} \quad (n=0, 1)$$

$$S_n(u, q) = P_{l-1/2} \left[ 1 + \frac{u^2 + 2u(r \sqrt{\gamma_n^2 - q^2} + r_0 \sqrt{\gamma^2 - q^2})}{2rr_0 \sqrt{(\gamma_n^2 - q^2)(\gamma^2 - q^2)}} \right] H(u)$$

(Случай  $z \geq 0$  достаточно для рассмотрения, ибо  $\varphi^{(1)}, \psi_1^{(1)}, \psi_2^{(2)}$  — четные,

а  $\varphi^{(2)}, \psi_1^{(2)}, \psi_2^{(1)}$  — нечетные функции  $z$ ). Здесь контуры  $N_0$  и  $N_1$  в плоскости  $q$  при  $z > 0$  показаны на фиг. 2 (при  $z \rightarrow 0$  контуры  $N_0$  и  $N_1$  вырождаются в мнимую ось). Контуры  $N_0$  и  $N_1$  описываются уравнениями

$$\begin{aligned} N_n : \operatorname{Im} \Phi_n(q) &= 0, \quad \Phi_n(q) = \\ &= qz - r \sqrt{\gamma_n^2 - q^2} - r_0 \sqrt{\gamma^2 - q^2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для облегчения исследования функций  $\Phi_n(q)$  заметим, что  $\Phi_0(q)$  получается из  $f_1(q)$  в (2.2), если поменять местами  $r$  и  $r_0$ , а  $\Phi_1(q)$  получается из  $f_0(q)$  в (2.2) заменой  $q, r, r_0, z$  соответственно на  $q/\gamma, r\gamma, r_0\gamma, z\gamma$ .

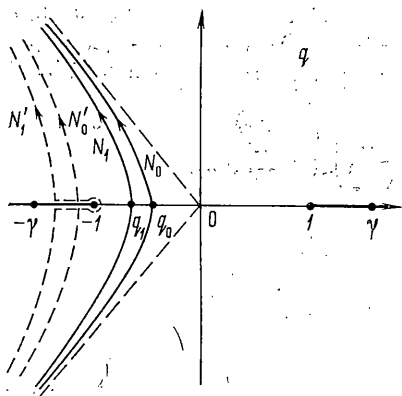
В итоге получаем следующие результаты исследования кривых  $N_0, N_1$ .

На кривой  $N_0$ , симметричной относительно оси абсцисс, функция  $\Phi_0(q)$  является действительной и достигает своего максимума в точке  $q_0$  пересечения  $N_0$  с осью абсцисс. При удалении от  $q_0$  вдоль  $N_0$  в верхней (или нижней) полуплоскости  $q$ , функция  $\Phi_0(q)$  монотонно убывает от значения  $\Phi_0(q_0)$  до  $-\infty$ .

Точка  $q_0$  при  $r \neq 0$  (а также при  $r=0$ , но  $z < r_0/\sqrt{\gamma^2 - 1}$ ) определяется из уравнения  $\Phi_0'(q) = 0$  и в этом случае лежит на интервале  $(-1, 0)$ . При  $r \rightarrow 0$  и  $z \geq r_0/(\gamma^2 - 1)^{1/2}$  контур  $N_0$  занимает предельное положение  $N_0'$  (фиг. 2) и в этом случае максимум  $\Phi_0(q)$  достигается в точке  $q_0 = -1$ .

На кривой  $N_1$ , симметричной относительно оси абсцисс, функция  $\Phi_1(q)$  является действительной и при  $z < (r+r_0)/(\gamma^2 - 1)^{1/2}$  достигает своего максимума  $\Phi_1(q_1)$  в точке  $q_1$  пересечения  $N_1$  с осью абсцисс. Точка  $q_1$  в этом случае определяется из уравнения  $\Phi_1'(q) = 0$  и лежит на интервале  $(-1, 0)$ .

При  $z \geq (r+r_0)/(\gamma^2 - 1)^{1/2}$  кривая  $N_1$  занимает положение  $N_1'$  (фиг. 2).



Фиг. 2

(поскольку точка перевала кривой  $\text{Im } \Phi_1(q) = 0$  лежит на интервале действительной оси  $(-\gamma, -1)$ , а контуры интегрирования по  $q$  в выражениях (3.2) должны обходить разрезы  $(-\infty, -1]$  и функция  $\Phi_1(q)$  достигает своего максимума в точке  $q_1 = -1$ . При удалении от  $q_1$  вдоль  $N_1$  в верхней (или нижней) полуплоскости  $q$  функция  $\Phi_1(q)$  монотонно убывает от значения  $\Phi_1(q_1)$  до  $-\infty$ . Обе кривые  $N_0$  и  $N_1$  ( $N_1'$ ) имеют при удалении в бесконечность одни и те же асимптоты, у которых тангенсы угла наклона к оси абсцисс равны величине  $-(r+r_0)/z$ . Отметим также, что контур  $N_n$  ( $n=0, 1$ ) обрывается в сопряженных точках  $q_n^{(1,2)}$ , определяемых из уравнения  $u_n(q) = 0$ .

Если теперь ввести в (3.2) и полученные выше уравнения вместе  $z, \tau$  новые переменные  $z', \tau'$  (в соответствующих формулах для них следует положить  $\gamma_n = \gamma$  и  $\pi/2 \leq \alpha_0 < \pi$ ), то, рассматривая случай  $|\gamma \cos \alpha_0| < 1$  и следуя процедуре, ранее изложенной в п. 2, получим для  $q_n$  и  $q_n^{(1,2)}$  асимптотические ( $\rho_0 \rightarrow \infty$ ) выражения

$$q_n = \gamma \cos \alpha_0 + O(\rho_0^{-1}) \quad (n=0, 1) \quad (3.4)$$

$$q_n^{(1,2)} = \gamma \cos \alpha_0 \pm i \sqrt{2\gamma/\rho_0} \sin \alpha_0 [\tau' + z' \gamma \cos \alpha_0 - r \sqrt{\gamma_n^2 - \gamma^2 \cos^2 \alpha_0}]^{1/2} + O(\rho_0^{-1}) \quad (3.5)$$

а решение (3.2) после замены  $q$  новой переменной  $s = \sqrt{\rho_0}(q - \gamma \cos \alpha_0) / (\sqrt{2\gamma} \sin \alpha_0)$  преобразуется к виду

$$\varphi^{(k)} = \gamma^{3/2-l} \cos \theta \sin^{3/2-l} \alpha_0 (1 - \gamma^2 \cos^2 \alpha_0)^{l/2-1/2} G_h D_1 \int_{\omega_0}^{\omega_0} P_{l-1/2}(\beta_0) ds$$

$$\psi_1^{(k)} = \psi_{1a} \delta_{k1} + \gamma \sin \theta G_h D_1 \int_{\omega_1}^{\omega_1} P_{l-1/2}(\beta_1) ds \quad (k=1, 2)$$

$$\psi_2^{(k)} = \psi_{2a} \delta_{k2} + \cos \theta \cos \alpha_0 G_h D_1 \int_0^{\tau'} \int_{\omega_1}^{\omega_1} P_{l-1/2}(\beta_1) ds$$

$$D_1 = \frac{4\sqrt{2}l \sin(\pi l) \gamma^{2l-3/2} \sin^{2l-3/2} \alpha_0 H(1-l)}{\pi i \rho_0 \sqrt{r} [(1 - \gamma^2 \cos^2 \alpha_0)^l + \gamma^{2l} (1 + \cos^2 \alpha_0) \sin^{2l-2} \alpha_0]} \quad (3.6)$$

$$G_h = \sin \theta_0 \quad (h=1), \quad G_h = \cos \alpha_0 \cos \theta_0 \quad (h=2)$$

$$\beta_n = \frac{s^2}{r \sqrt{\gamma_n^2 - \gamma^2 \cos^2 \alpha_0}} + \frac{z' \gamma \cos \alpha_0 + \tau'}{r \sqrt{\gamma_n^2 - \gamma^2 \cos^2 \alpha_0}} + O(\rho_0^{-1})$$

$$\omega_n = i [\tau' + z' \gamma \cos \alpha_0 - r \sqrt{\gamma_n^2 - \gamma^2 \cos^2 \alpha_0}]^{1/2} + O(\rho_0^{-1/2})$$

Умножая обе части выражений (3.6) на  $\rho_0$ , а затем переходя в них к пределу ( $\rho_0 \rightarrow \infty$ ) и учитывая формулу (2.6), получаем в элементарных функциях решения пространственных задач дифракции плоских поперечных волн  $\psi_{k0}^{(k)}$  ( $k=1, 2$ ) на клине

$$\psi_{k0}^{(k)} = \left[ \frac{\tau'}{\gamma} + r \sin \alpha_0 \cos(\theta - \theta_0) + z' \cos \alpha_0 \right]^{k-1} \times \\ \times H \left[ \frac{\tau'}{\gamma} + r \sin \alpha_0 \cos(\theta - \theta_0) + z' \cos \alpha_0 \right]$$

$$\varphi^{(k)} = \cos \theta \sin^{2-l} \alpha_0 (1 - \gamma^2 \cos^2 \alpha_0)^{l/2} D_2 G_h F(l, d_0)$$

$$\psi_1^{(k)} = \psi_{1a}^p \delta_{k1} + \gamma^l \sin l\theta D_2 G_n F(l, d_1) \quad (3.7)$$

$$\psi_2^{(k)} = \psi_{2a}^p \delta_{k2} + \frac{r\gamma^l}{2} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \cos l\theta D_2 G_n \left[ \frac{F(l+1, d_1)}{l+1} - \frac{F(l-1, d_1)}{l-1} \right]$$

$$D_2 = \frac{4\gamma^l \sin \pi l \sin^{2l-2} \alpha_0 H(1-l)}{\pi [(1-\gamma^2 \cos^2 \alpha_0)^l + (1+\cos^2 \alpha_0) \gamma^{2l} \sin^{2l-2} \alpha_0]}$$

$$d_n = (\tau' + \gamma z' \cos \alpha_0) / r \sqrt{\gamma_n^2 - \gamma^2 \cos^2 \alpha_0}$$

Здесь  $\psi_{ka}^p$  ( $k=1, 2$ ) — соответствующее решение акустической задачи дифракции плоской волны  $\psi_{ka}^p$  на клине (с граничным условием  $\psi_1=0$  при  $k=1$  и  $\partial\psi_2/\partial\theta=0$  при  $k=2$ ).

Решения (3.7), полученные при  $\pi/2 \leq \alpha_0 < \pi$ , остаются верными во всем диапазоне  $0 < \alpha_0 < \pi$  (это нетрудно проверить заменой  $z'$  на  $(-z')$  и  $\alpha_0$  на  $\pi - \alpha_0$ ).

Используя частные решения (3.7), можно построить решение для падающей плоской поперечной волны с произвольно ориентированным вектором смещения за ее фронтом. В самом деле, выражения

$$\varphi = a_1 \varphi^{(1)} + a_2 \varphi^{(2)}, \quad \psi_n = a_1 \psi_n^{(1)} + a_2 \psi_n^{(2)} \quad (n=1, 2) \quad (3.8)$$

$$a_1 = -\frac{\cos \beta'}{\sin \alpha_0}, \quad a_2 = \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha_0}, \quad 0 \leq \beta' < 2\pi, \quad \gamma |\cos \alpha_0| < 1$$

дают в потенциалах решение задачи дифракции на рассматриваемом гладком клине плоской поперечной волны, набегающей из бесконечно удаленной точки  $\theta_0$ ,  $\alpha_0$  (в сферических координатах  $\rho, \theta, \alpha$ ) и имеющей поле смещений

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_0 &= a_1 \operatorname{rot} (\psi_{10}^p \mathbf{e}_z) + a_2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\psi_{20}^p \mathbf{e}_z) = \\ &= \delta (\tau' / \gamma + r \sin \alpha_0 \cos (\theta - \theta_0) + z' \cos \alpha_0) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.9)$$

где  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака, а постоянный вектор  $\mathbf{k}$  имеет в трехграннике  $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\alpha$ , взятом в точке  $\rho=1, \theta=\theta_0, \alpha=\alpha_0$ , проекции  $k_\rho=0, k_\theta=\cos \beta', k_\alpha=\sin \beta'$ .

Если в формулах (3.8), (3.9) положить  $\beta'=\pi, \alpha_0=\pi/2$ , то получим известное решение задачи дифракции на клине плоской волны поперечного сдвига [3]:  $\psi_{10}^p = H[\tau' / \gamma + r \cos (\theta - \theta_0)]$ , а если в этих формулах положить  $\beta'=\pi/2, \alpha_0=\pi/2$ , то приходим к решению задачи дифракции на клине волны продольного сдвига

$$\psi_{20}^p = [\tau' / \gamma + r \cos (\theta - \theta_0)] H[\tau' / \gamma + r \cos (\theta - \theta_0)]$$

В этом случае упругое решение задачи совпадает с соответствующим акустическим [11], поскольку обменные волны не возникают:  $\varphi = \psi_1 = 0$ .

Обменные волны не возникают также, если  $l > 1$  или в (3.8) и (3.9) положить  $\beta'=\pi/2, \theta_0=\pi/(2l)$  (т.е. в симметричном случае падения волн  $\psi_{20}^p$ ).

Рассмотрим теперь случай  $\gamma |\cos \alpha_0| > 1$ . В этом случае при  $\rho_0 \rightarrow \infty$  ( $\pi/2 \leq \alpha_0 < \pi$ ) аналогично (3.4) находим  $q_n = \gamma \cos \alpha_0 + O(\rho_0^{-1})$ ,  $\tilde{q}_n^{(1,2)} = \gamma \cos \alpha_0 + O(\rho_0^{-1/2})$  и, следовательно, контуры  $N_0, N_1$  стягиваются к отрезку  $(\gamma \cos \alpha_0, -1)$ , который эти контуры обходят дважды: по нижнему и верхнему берегам разреза  $(-\infty, -1)$ . Таким образом, в этом случае длина контура  $N_n$  ( $n=0, 1$ ) стремится к фиксированной отличной от нуля величине (в отличие от случая  $\gamma |\cos \alpha_0| < 1$ , когда длина контура  $N_n$  стремилась к нулю как  $O(\rho_0^{-1/2})$ ). Учитывая при этом, что подынтегральное выражение в (3.2)



убывает при  $\rho_0 \rightarrow \infty$ , как  $O(\rho_0^{l-1})$ , получаем после умножения выражений (3.2) на  $\rho_0$ , что правые и, следовательно, левые части этих выражений возрастают как  $O(\rho_0^l)$  при  $\rho_0 \rightarrow \infty$  и, таким образом, в рассматриваемом случае не существует конечного предела этих выражений (за исключением случая  $l > 1$  и симметричного случая  $\theta_0 = \pi/(2l)$ ,  $l < 1$  при  $k=2$  в (3.2), когда обменные волны не возникают).

Итак, в случае  $|\gamma \cos \alpha_0| > 1$ ,  $l < 1$ , т. е. когда направление падения плоской поперечной волны составляет с плоскостью, перпендикулярной к ребру клина, угол, больший предельного угла полного внутреннего отражения  $\lambda$  ( $\sin \lambda = 1/\gamma$ ), решение задачи дифракции на клине не существует (за исключением симметричного случая падения волны  $\psi_{20}^*$ ).

Аналогичным образом могут быть получены решения задач в случае, когда на клине заданы условия  $w_r = w_z = 0$ ,  $\sigma_{\theta\theta} = 0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Поручиков В. Б. Дифракция сферической упругой волны на клине.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 5, с. 898–908.
2. Поручиков В. Б. Решение динамических задач теории упругости для угловых областей со смешанными граничными условиями.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 5, с. 908–919.
3. Костров Б. В. Дифракция плоской волны на жестком клине, вставленном без трения в безграничную упругую среду.— ПММ, 1966, т. 30, вып. 1, с. 198–203.
4. Капустянский С. М. Об одном точном решении задачи дифракции упругих волн на клине.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 1, с. 190–192.
5. Поручиков В. Б. Дифракция цилиндрической упругой волны на клине.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 5, с. 136–144.
6. Поручиков В. Б. Дифракция упругой цилиндрической волны на клине. Распространение упругих и упругопластических волн.— Матер. VI Всес. симп. Фрунзе: 1978. с. 155–156.
7. Zetell S. H. Diffraction of elastic waves by a rigid-smooth wedge.— SIAM Journal Appl. Math., 1975, v. 29, № 4, p. 582–596.
8. Исраилов М. Ш. Дифракция произвольной упругой волны на клине.— Докл. АН СССР, 1980, т. 253, № 1, с. 57–61.
9. Гузь А. Н., Головчан В. Т. Дифракция упругих волн в многосвязанных телах. Киев: Наук. думка, 1972. 254 с.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 294 с.
11. Фридлиндер Ф. Звуковые импульсы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 232 с.
12. Исраилов М. Ш. Точные решения трехмерных задач дифракции плоских упругих волн на клине.— Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 4, с. 815–818.
13. Поручиков В. Б. Точные решения пространственных задач дифракции плоских упругих волн на клине.— Докл. АН СССР, 1981, т. 258, № 4, с. 823–826.

Москва

Поступила в редакцию  
11.V.1984