МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1982

УДК 539.3

МАЛЫЙ СФЕРИЧЕСКИЙ ИЗЛУЧАТЕЛЬ В НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

КИСЕЛЕВ А. П.

Исследуется возбуждение неоднородной идеально упругой среды напряжениями вида $p\mathbf{n}$ или $p[\mathbf{n}, \mathbf{e}_1]$, распределенными по поверхности полости малого радиуса ε ($\mathbf{n}$ – нормаль к сфере, p – постоянная, $\mathbf{e}_1$ – фиксированный вектор). При $\varepsilon\to 0$, $p\to\infty$, $p\varepsilon^3\to\mathrm{const}$ строятся предельные задачи с точечными источниками.

Естественным аппаратом для решения подобных задач является техника совместного рассмотрения двух асимптотических разложений – внутреннего и внешнего, сращиваемых в промежуточной области [1–3].

Уравнения для членов внутреннего разложения строятся по обычной схеме метода пограничного слоя, введением масштаба и разложением коэффициентов в ряды. Для однозначного определения членов внутреннего разложения привлекается внешнее разложение.

1. Постановка задач. Поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, \varepsilon)$ перемещений среды вне сферы радиуса ε описывается уравнением

$$\mathbf{l}(\mathbf{u})=0 \qquad (|\mathbf{r}|>\varepsilon) \tag{1.1}$$

$$l_k(\mathbf{u})=\frac{\partial}{\partial r_m}\sigma_{km}(\mathbf{u})+\omega^2\rho(\mathbf{r})u_k \tag{1.2}$$

$$\sigma_{km}(\mathbf{u})=\mu(\mathbf{r})\left(\frac{\partial u_m}{\partial r_k}+\frac{\partial u_k}{\partial r_m}\right)+\delta_{km}\lambda(\mathbf{r})\operatorname{div}\mathbf{u} \tag{1.3}$$

где $\sigma_{km}(\mathbf{u})$ – тензор напряжений, по повторяющимся нижним индексам подразумевается суммирование от единицы до трех, δ_{km} – символ Кронекера. Предполагается, что $\lambda(\mathbf{r})$, $\mu(\mathbf{r})$, $\rho(r)$ – везде гладкие функции [1] радиус-вектора $\mathbf{r}=(r_1, r_2, r_3)$; $\lambda+2\mu>\mu>0$, $\rho\omega^2\geqslant 0$.

На поверхности полости $|\mathbf{r}|=\varepsilon$ пусть выполнено одно из условий

$$\mathbf{t}(\mathbf{u})\,|_{|\mathbf{r}|=\varepsilon}=p\mathbf{n} \tag{1.4}$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{u})\,|_{|\mathbf{r}|=\varepsilon}=p[\mathbf{n},\ \mathbf{e}_1] \tag{1.5}$$

где p – константа, $\mathbf{e}_j$ – орт оси r_j, $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к сфере, а $\mathbf{t}(\mathbf{u})$ – напряжение

$$t_k(\mathbf{u})=\sigma_{km}(\mathbf{u})n_m \tag{1.6}$$

Условие (1.4) соответствует равномерному нормальному давлению, условие (1.5) описывает осесимметрическое касательное усилие.

Уравнение (1.1) вместе с (1.4) или (1.5) следует дополнить условием, гарантирующим единственность решения. Для определенности будем рассматривать (1.1) во всем трехмерном пространстве E^3 вне полости, предполагая, что $\rho>0$, $\omega>0$, а λ, μ и ρ быстро стабилизируются на бесконечности. Единственное решение каждой из задач (1.1), (1.4) и (1.1), (1.5)

---

[1] Здесь достаточно непрерывности ρ и двукратной непрерывной дифференцируемости λ и μ в окрестности начала координат.

выделяется принципом предельного поглощения.

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},\ \varepsilon)\to 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{r}|\to\infty, \quad \text{если} \quad \mathrm{Jm}\,\omega>0 \tag{1.7}$$

В случае однородной среды обе задачи неоднократно исследовались [5, 6]. Интерес к ним вызван прежде всего тем, что при постоянных λ, μ и ρ воздействие (1.4) не возбуждает поперечной волны, а (1.5) — продольной.

В однородной среде обе задачи нетрудно решить явно. При условии (1.5), например, согласно [6]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},\ \varepsilon)=p\varepsilon^3 B\,\mathrm{rot}(\mathbf{e}_1|\mathbf{r}|^{-1}\exp(i\omega\beta|\mathbf{r}|)) \tag{1.8}$$

$$B=\mu^{-1}(3-3i\omega\beta\varepsilon+(i\omega\beta\varepsilon)^2)^{-1}\exp(-i\omega\beta\varepsilon), \qquad \beta=\mu^{-1/2}\rho^{1/2}$$

Функция (1.8) имеет конечный ненулевой предел при $\varepsilon\to 0$, если

$$\varepsilon\to 0, \qquad p\to\infty, \qquad 0<Q=\lim(p\varepsilon^3)<\infty \tag{1.9}$$

Предельная функция $\mathbf{U}(\mathbf{r})=\lim\mathbf{u}(\mathbf{r},\ \varepsilon)$ удовлетворяет, как легко проверить, уравнению во всем пространстве

$$\mathbf{l}(\mathbf{U})=Q\mathbf{F} \qquad (\mathbf{r}\in\mathbf{E}^3) \tag{1.10}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})=-{}^4/_3\pi\,\mathrm{rot}(\mathbf{e}_1\delta(\mathbf{r})) \tag{1.11}$$

где $\delta(\mathbf{r})$ — дельта-функция. Вектор вида (1.11) называют точечным центром вращения с осью $\mathbf{e}_1$ [5].

Аналогично, при условии (1.4):

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},\ \varepsilon)=p\varepsilon^3 A\,\mathrm{grad}(|\mathbf{r}|^{-1}\exp(i\omega\alpha|\mathbf{r}|)) \tag{1.12}$$

$$A=\mu^{-1}[4-4i\omega\alpha\varepsilon+(i\omega\alpha\varepsilon)^2]^{-1}\exp(-i\omega\alpha\varepsilon), \qquad \alpha=(\lambda+2\mu)^{-1/2}\rho^{1/2}$$

и предельная задача имеет вид (1.10) с правой частью, называемой точечным центром давления [5]:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})=[-4\pi(\lambda+2\mu)/4\mu]\,\mathrm{grad}\,\delta(\mathbf{r}) \tag{1.13}$$

Целью публикуемой работы является построение предельных задач вида (1.10) с точечными источниками в случае неоднородной среды.

Можно предполагать, что правая часть уравнения (1.10) имеет для условий (1.4) и (1.5) вид соответственно

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})=-4\pi\frac{\lambda(0)+2\mu(0)}{4\mu(0)}\,\mathrm{grad}\,\delta(\mathbf{r})+\alpha\delta(\mathbf{r}) \tag{1.14}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})=-{}^4/_3\pi\,\mathrm{rot}(\mathbf{e}_1\delta(\mathbf{r}))+\beta\delta(\mathbf{r}) \tag{1.15}$$

где α и β линейны относительно значений первых производных λ и μ в начале координат.

Вычисление векторов α и β и составляет предмет работы.

2. Уравнения пограничного слоя. Построим в окрестности полости разложение для $\mathbf{u}(\mathbf{r},\ \varepsilon)$, традиционно называемое внутренним [1—3]. Введем координаты $\mathbf{R}=\mathbf{r}/\varepsilon$, $\mathbf{R}=(X_1,\ X_2,\ X_3)$ и разложим коэффициенты уравнения (1.1) в тейлоровские ряды относительно X_1, X_2, X_3:

$$\lambda(\mathbf{r})\sim\Lambda+\varepsilon\lambda^1(\mathbf{R})+\ldots, \qquad \mu(\mathbf{r})\sim\mathrm{M}+\varepsilon\mu^1(\mathbf{R})+\ldots \tag{2.1}$$

где $\Lambda=\lambda(0)$, $\mathrm{M}=\mu(0)$, а $\lambda^1(\mathbf{R})$ и $\mu^1(\mathbf{R})$ линейны по $\mathbf{R}$.

Будем обозначать $R=|\mathbf{R}|$, $\partial_m=\partial/\partial X_m$, $\partial_{mn}^2=\partial_m\partial_n$, $\partial_{mnp}^3=\partial_{mn}^2\partial_p$, $D=\partial/\partial R$. Отметим, что операции ∂_m и D не перестановочны.

Перейдем в (1.1)—(1.3) к новым переменным $\mathbf{R}$, сгруппируем члены с одинаковыми степенями ε:

$$\mathbf{l}(\mathbf{u}) \sim \frac{1}{\varepsilon^2}\{\mathbf{L}(\mathbf{u})+\varepsilon\mathbf{l}^1(\mathbf{u})+\ldots\} \tag{2.2}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}) \sim \frac{1}{\varepsilon}\{\mathbf{T}(\mathbf{u})+\varepsilon\mathbf{t}^1(\mathbf{u})+\ldots\} \tag{2.3}$$

где $\mathbf{L}$ и $\mathbf{T}$ — операторы с постоянными коэффициентами; коэффициенты $\mathbf{l}^1$ и $\mathbf{t}^1$ линейны, причем

$$\begin{gathered}\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \mathrm{N}\,\mathrm{grad}_{\mathbf{R}}\mathrm{div}_{\mathbf{R}}\mathbf{u} - \mathrm{M}\,\mathrm{rot}_{\mathbf{R}}\mathrm{rot}_{\mathbf{R}}\mathbf{u}\\ \mathrm{N}=\Lambda+2\mathrm{M}=\lambda(0)+2\mu(0)\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\mathbf{T}_k(\mathbf{u}) = \mathrm{M}n_m(\partial_k u_m+\partial_m u_k)+\Lambda n_k\partial_s u_s \tag{2.5}$$

$$l_k^1(\mathbf{u}) = \partial_m\{\mu^1(\mathbf{R})(\partial_k u_m+\partial_m u_k)\}+\partial_k(\lambda^1(\mathbf{R})\partial_s u_s) \tag{2.6}$$

а $\mathbf{t}^1(\mathbf{u})$ получается из $\mathbf{T}(\mathbf{u})$ заменой $\Lambda\to\lambda^1(\mathbf{R})$, $\mathrm{M}\to\mu^1(\mathbf{R})$. Выражения (2.5) и (2.6) удобно переписать следующим образом:

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \Lambda\mathbf{n}\,\mathrm{div}_{\mathbf{R}}\,\mathbf{u}+2\mathrm{M}D\mathbf{u}+\mathrm{M}[\mathbf{n},\mathbf{u}] \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{l}^1(\mathbf{u}) = (\lambda^1(\mathbf{R})+2\mu^1(\mathbf{R}))\mathrm{grad}_{\mathbf{R}}\mathrm{div}_{\mathbf{R}}\mathbf{u}-\mu^1(\mathbf{R})\mathrm{rot}_{\mathbf{R}}\mathrm{rot}_{\mathbf{R}}\mathbf{u}+\\ +\mathrm{grad}_{\mathbf{R}}\lambda^1(\mathbf{R})\mathrm{div}_{\mathbf{R}}\mathbf{u}+[\mathrm{grad}_{\mathbf{R}}\mu^1(\mathbf{R}),\ \mathrm{rot}_{\mathbf{R}}\mathbf{u}]+2(\mathrm{grad}_{\mathbf{R}}\mu^1(\mathbf{R}),\ \mathrm{grad}_{\mathbf{R}})\mathbf{u}\end{gathered} \tag{2.8}$$

Обозначим через S операцию ограничения функций на границу полости $R<1$, например $S\mathbf{T}(\psi)=\mathbf{T}(\psi)|_{R=1}$. В частности $SX_j=n_j$.

Асимптотику функции $\mathbf{u}(\mathbf{r},\ \varepsilon)$ будем искать в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},\varepsilon) \sim p\varepsilon\sum_{m\geqslant 0}\varepsilon^m\mathbf{V}^m(\mathbf{R})\ (\mathbf{V}^0\neq 0) \tag{2.9}$$

предполагая, что $\mathbf{V}^m$ зависит от ε только через $\mathbf{R}$. Подстановка (2.9) в (1.1), (1.4) и (1.5) дает рекуррентный набор уравнений и граничных условий для $\mathbf{V}^m$. В случае (1.5)

$$\mathbf{L}(\mathbf{V}^0)=0 \qquad (R>1) \tag{2.10}$$

$$S\mathbf{T}(\mathbf{V}^0)=[\mathbf{n},\ \mathbf{e}_i] \tag{2.11}$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{V}^1)=-\mathbf{l}^1(\mathbf{V}^0) \qquad (R>1) \tag{2.12}$$

$$S\mathbf{T}(\mathbf{V}^0)=-\mathbf{t}^1(\mathbf{V}^0) \tag{2.13}$$

. . . .

Для граничного условия (1.4) условие (2.11) заменяется на $S\mathbf{T}(\mathbf{V}^0)=n$.

Чтобы добиться единственности в возникших статических задачах теории упругости, следует задать поведение $\mathbf{V}^0(\mathbf{R})$, $\mathbf{V}^1(\mathbf{R}), \ldots$ при больших R. Это делается исследованием условий совпадения при $R\to\infty$, $|\mathbf{r}|\to 0$ внутреннего разложения с внешним, описывающим поле не слишком близко от излучателя.

3. Внешнее разложение и условия на бесконечности для членов внутреннего разложения. Асимптотику поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},\ \varepsilon)$ во всем пространстве, кроме малой окрестности полости, естественно искать в виде аналога мультипольного разложения для однородной среды

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},\varepsilon) \sim p\varepsilon^3\sum_{m\geqslant 0}\varepsilon^m\mathbf{u}^m(\mathbf{r}) \quad (\mathbf{u}^0\neq 0) \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{u}^m$ — выделенные принципом предельного поглощения решения задач с некоторыми не зависящими от ε точечными источниками $\mathbf{H}^m$ в начале координат

$$l(\mathbf{u}^m)=\mathbf{H}^m, \quad \operatorname{supp}\mathbf{H}^m=\{0\} \tag{3.2}$$

Каждая из функций $\mathbf{u}^m(\mathbf{r})$ имеет при $|\mathbf{r}|\to 0$ асимптотику

$$\mathbf{u}^m(\mathbf{r})\sim\sum_{n\geqslant N(m)}\mathbf{u}_n{}^m(\mathbf{r}) \tag{3.3}$$

где $\mathbf{u}_n{}^m$ однородны степени n, а $N(m)\leqslant -1$ определяется порядком сингулярности обобщенной функции $\mathbf{H}^m$.

Естественно предположить, что $\mathbf{u}^0$ имеет такой же порядок сингулярности при $|\mathbf{r}|\to 0$, как $\mathbf{u}$ в случае однородной среды (см. (1.8), (1.12)), т. е. $N(0)=-2$.

Подставив (3.3) в (3.1) и перейдя к переменной $\mathbf{R}$, получим

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},\varepsilon)\sim p\varepsilon\sum_{m\geqslant 0}\varepsilon^m\mathbf{W}^m(\mathbf{R}) \tag{3.4}$$

$$\mathbf{W}^m(\mathbf{R})\sim\sum_n\mathbf{u}^n_{m-n-2}(\mathbf{R}) \tag{3.5}$$

При $R\to\infty$, $|\mathbf{r}|\to 0$ разложения (2.9) и (3.1) должны совпадать. Следовательно, должны совпадать и функции $\mathbf{V}^m$ и $\mathbf{W}^m$ ($m=0, 1, \ldots$). Из (3.5) видно, что $\mathbf{V}^0$ и $\mathbf{V}^1$ должны быть суммами однородных функций отрицательных степеней, т. е.

$$\mathbf{V}^0(\mathbf{R})\to 0, \quad \mathbf{V}^1(\mathbf{R})\to 0 \quad \text{при} \quad R\to\infty \tag{3.6}$$

Дальнейшие члены разложения (2.9), воообще говоря, растут на бесконечности степенным образом.

4. Вычисление функции $\mathbf{V}^0$ в случае условия (1.5). Решение задачи (2.10), (2.11), (3.6) можно найти в виде

$$\mathbf{V}^0(\mathbf{R})=C\operatorname{rot}_{\mathbf{R}}(\mathbf{e}_1R^{-1}) \tag{4.1}$$

где C — константа, подлежащая определению из граничного условия (выполнение (2.10) и (3.6) очевидно).

В дальнейшем неоднократно потребуются значения на единичной сфере ($R=1$) функций, полученных применением операторов ∂_m и D к $R^{\pm 1}$.

Пусть $\sigma=\mathrm{const}$, тогда

$$SR^\sigma=1, \quad S\partial_pR^\sigma=\sigma n_p \tag{4.2}$$

$$S\partial_{pq}{}^2R^\sigma=\sigma(\sigma-2)n_pn_q+\sigma\delta_{pq} \tag{4.3}$$

$$S\partial^3{}_{mpq}R^\sigma=\sigma(\sigma-2)\{(\sigma-4)n_pn_qn_m+\delta_{pq}n_m+\delta_{pm}n_q+\delta_{qm}n_p\} \tag{4.4}$$

$$SDR^\sigma=\sigma \tag{4.5}$$

$$SD\partial_pR^\sigma=\sigma(\sigma-1)n_p \tag{4.6}$$

$$SD\partial_{pq}{}^2R^\sigma=\sigma(\sigma-2)^2n_pn_q+\sigma(\sigma-2)\delta_{pq} \tag{4.7}$$

Рассмотрим $S\mathbf{T}(\mathbf{V}^0)$. Пользуясь тождествами (4.3) и (4.6) при $\sigma=-1$, получаем

$$SD\mathbf{V}^0=CS(\mathbf{e}_3D\partial_2-\mathbf{e}_2D\partial_3)R^{-1}=2C(n_2\mathbf{e}_3-n_3\mathbf{e}_2)=2C[\mathbf{n},\ \mathbf{e}_1]$$

$$S[\mathbf{n},\ \operatorname{rot}_{\mathbf{R}}\mathbf{V}^0]=[\mathbf{n},\ \operatorname{rot}_{\mathbf{R}}\operatorname{rot}_{\mathbf{R}}(C\mathbf{e}_1R^{-1})]=C[\mathbf{n},\ S\operatorname{grad}_{\mathbf{R}}\partial_1R^{-1}]=$$
$$=C[\mathbf{n},\ -3n_1\mathbf{n}+\mathbf{e}_1]=C[\mathbf{n},\ \mathbf{e}_1]$$

Поскольку $\mathrm{div}_{\mathbf{R}}\,\mathbf{V}^\circ=0$, отсюда следует, что

$$ST(\mathbf{V}^\circ)=3MC[\mathbf{n},\ \mathbf{e}_1] \tag{4.8}$$

Сравнив (4.8) с (2.11), находим $C=1/(3M)$.

Отметим, что решение задачи (2.10), (2.11), (3.6), доопределенное по аналитичности внутри полости $R<1$, удовлетворяет во всем пространстве уравнению

$$\mathbf{L}(\mathbf{V}^\circ)=-{}^4/_3\pi\,\mathrm{rot}_{\mathbf{R}}(\mathbf{e}_1\delta(\mathbf{R}))\qquad(\mathbf{R}\in\mathbf{E}^3) \tag{4.9}$$

5. Структура функции $\mathbf{V}^1$ при условии (1.5). Для дальнейших вычислений удобно считать, что линейная функция $\mu^1(\mathbf{R})$ имеет вид

$$\mu^1(\mathbf{R})=\mu^{\parallel}X_1+\mu^{\perp}X_2 \tag{5.1}$$

где $\mu^{\parallel}$ и $\mu^{\perp}$ — константы (этого можно добиться поворотом координатных осей $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$).

Рассмотрим во всем пространстве выражение для $\mathbf{l}^1(\mathbf{V}^\circ)$:

$$\mathbf{l}^1(\mathbf{V}^\circ)=\mu^1(\mathbf{R})\Delta_{\mathbf{R}}\mathbf{V}^\circ+[\mathrm{grad}_{\mathbf{R}}\mu^1(\mathbf{R}),\ \mathrm{rot}_{\mathbf{R}}V^\circ]+2(\mathrm{grad}_{\mathbf{R}}\mu^1(\mathbf{R}),\ \mathrm{grad}_{\mathbf{R}})\mathbf{V}^\circ$$

($\Delta_{\mathbf{R}}$ — оператор Лапласа по переменной $\mathbf{R}$).

Пользуясь тождествами

$$\mathrm{rot}(f\varphi)=f\,\mathrm{rot}\,\varphi+[\mathrm{grad}\,f,\ \varphi],\qquad \Delta_{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1}=-4\pi\delta(\mathbf{R}),\qquad X_j\delta(\mathbf{R})=0 \tag{5.2}$$

и формулой (4.1), можно получить, что

$$\begin{gathered}\mu^1(\mathbf{R})\Delta_{\mathbf{R}}\mathbf{V}^\circ=C\{\mathrm{rot}_{\mathbf{R}}(-4\pi\mu^1(\mathbf{R})\Delta_{\mathbf{R}}R^{-1}\mathbf{e}_1)-\\ -[\mu^{\parallel}\mathbf{e}_1+\mu^{\perp}\mathbf{e}_2,\Delta_{\mathbf{R}}R^{-1}\mathbf{e}_1]\}=4\pi\mu^{\perp}C\delta(\mathbf{R})\mathbf{e}_3\end{gathered}$$

Нетрудно проверить также, что $[\mathbf{e}_1,\ \mathrm{rot}_{\mathbf{R}}\mathbf{V}^\circ]=-\partial_1\mathbf{V}^\circ$ и

$$[\mathbf{e}_2,\ \mathrm{rot}_{\mathbf{R}}\,\mathbf{V}^\circ]+2\partial_2\mathbf{V}^\circ=C\{\mathrm{grad}_{\mathbf{R}}\,\partial_3R^{-1}+\mathrm{rot}_{\mathbf{R}}(\mathbf{e}_1\partial_2R^{-1})\}$$

Отсюда следует

$$\mathbf{l}^1(\mathbf{V}^\circ)=\mathbf{A}^{\parallel}+\mathbf{A}^{\perp}\quad(\mathbf{R}\in\mathbf{E}^3),\qquad \mathbf{A}^{\parallel}=\mu^{\parallel}C\,\mathrm{rot}_{\mathbf{R}}(\mathbf{e}_1\partial_1R^{-1}) \tag{5.3}$$

$$\mathbf{A}^{\perp}=\mu^{\perp}C\{\mathrm{rot}_{\mathbf{R}}(\mathbf{e}_1\partial_2R^{-1})+\mathrm{grad}_{\mathbf{R}}\partial_3R^{-1}-4\pi\delta(\mathbf{R})\mathbf{e}_3\} \tag{5.4}$$

Аналогично вычислению функции $ST(\mathbf{V}^\circ)$ можно найти

$$St^1(\mathbf{V}^\circ)=3C(\mu^{\parallel}n_1+\mu^{\perp}n_2)[\mathbf{n},\ \mathbf{e}_1]$$

Следовательно, решение задачи (2.12), (2.13), (3.6) представимо в виде

$$\mathbf{V}^1(\mathbf{R})=\mathbf{W}^{\parallel}(\mathbf{R})+\mathbf{W}^{\perp}(\mathbf{R}) \tag{5.5}$$

где $\mathbf{W}^{\parallel}$ и $\mathbf{W}^{\perp}$ — убывающие на бесконечности решения задач

$$\mathbf{L}(\mathbf{W}^{\parallel,\perp})=-\mathbf{A}^{\parallel,\perp}\qquad(R>1) \tag{5.6}$$

$$ST(\mathbf{W}^{\parallel})=-3\mu^{\parallel}Cn_1[\mathbf{n}_1\ \mathbf{e}_1] \tag{5.7}$$

$$ST(\mathbf{W}^{\perp})=-3\mu^{\perp}Cn_2[\mathbf{n},\mathbf{e}_1] \tag{5.8}$$

Опишем структуру функций $\mathbf{W}^{\parallel}$ и $\mathbf{W}^{\perp}$.

1. Рассмотрим предварительно несколько задач с точечными источниками:

$$\mathbf{L}(\mathbf{f})=-4\pi\delta(\mathbf{R})\mathbf{e}_3 \tag{5.9}$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{g})=-4\pi\Delta_{\mathbf{R}}\delta(\mathbf{R})\mathbf{e}_3 \tag{5.10}$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{h})=-4\pi\,\mathrm{rot}_{\mathbf{R}}(\mathbf{e}_1\partial_2\delta(\mathbf{R})) \tag{5.11}$$

в классе векторных функций, убывающих на бесконечности. Как легко проверить

$$\mathbf{f}(\mathbf{R})=\mathrm{M}^{-1}R^{-1}\mathbf{e}_3+\frac{1}{2}(\mathrm{N}^{-1}-\mathrm{M}^{-1})\,\mathrm{grad}_\mathbf{R}\partial_3R^{+1} \tag{5.12}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{R})=(\mathrm{N}^{-1}-\mathrm{M}^{-1})\,\mathrm{grad}_\mathbf{R}\partial_3R^{-1}-4\pi\mathrm{M}^{-1}\delta(\mathbf{R})\,\mathbf{e}_3 \tag{5.13}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{R})=\mathrm{M}^{-1}\,\mathrm{rot}_\mathbf{R}(\mathbf{e}_1\partial_2R^{-1}) \tag{5.14}$$

Будет показано, что существуют константы γ и χ, такие, что решение задачи (5.6), (5.8) имеет вид

$$\mathbf{W}^\perp=\mu^\perp C\{\mathbf{w}-\mathbf{f}+\gamma\mathbf{g}+\chi\mathbf{h}\} \tag{5.15}$$

где $\mu^\perp C\mathbf{w}$ — частное решение уравнения (5.6),

$$\mathbf{w}(\mathbf{R})=-\frac{1}{2\mathrm{M}}\,\mathrm{grad}_\mathbf{R}\partial_3R^{+1}-\frac{1}{2\mathrm{N}}\,\mathrm{rot}_\mathbf{R}(\mathbf{e}_1\partial_2R^{+1}) \tag{5.16}$$

Нетрудно проверить, что функция $\psi=\mu^\perp C(\mathbf{w}-\mathbf{f})$ является решением уравнения $\mathbf{L}(\psi)=-\mathbf{A}^\perp$ не только при $R>1$, но и во всем пространстве.

2. Решение задачи (5.7), (5.8) имеет (как показано в п. 6) вид

$$W^\parallel(R)={}^1\!/_2\mu^\parallel C\{\mathrm{rot}_\mathbf{R}(\mathbf{e}_1\partial_1R^{+1})+K\,\mathrm{rot}_\mathbf{R}(\mathbf{e}_1\partial_1R^{-1})\} \tag{5.17}$$

где $K=\mathrm{const}$, причем функция $\Psi={}^1\!/_2\mu^\parallel C\,\mathrm{rot}_\mathbf{R}(\mathbf{e}_1\partial_1R^{-1})$ удовлетворяет при $R>1$ уравнению $\mathbf{L}(\Psi)=-\mathbf{A}^\parallel$, а второе слагаемое в (5.17) является одним из фундаментальных решений оператора $\mathbf{L}$.

Из (5.9)—(5.11), (5.15)—(5.17) следует, что доопределенные по аналитичности функции $\mathbf{V}^\circ$ и $\mathbf{V}^1$ удовлетворяют во всем пространстве соотношению

$$\mathbf{L}(\mathbf{V}^1)=-\mathbf{l}^1(\mathbf{V}^\circ)+\Theta(\mathbf{R})\qquad(\mathbf{R}\in\mathbf{E}^3) \tag{5.18}$$

где $\Theta(\mathbf{R})$ — сосредоточенная в начале координат векторная обобщенная функция [2] степени однородности (—5)

$$\Theta(\mathbf{R})=\varepsilon^5\Theta(\mathbf{r})\ \mathrm{supp}\,\theta=\{0\} \tag{5.19}$$

Никакие свойства функции $\mathbf{V}^1$, кроме (5.18) и (5.19), в том числе явный вид $\Theta(\mathbf{R})$, в дальнейшем не потребуются.

6. Доказательство представимости $\mathbf{V}^1$ в виде (5.5), (5.15), (5.17). Покажем, что за счет выбора постоянных в выражениях (5.15) и (5.17) можно удовлетворить граничным условиям (5.7) и (5.8). Тождества (4.2)—(4.7) будут использоваться без специальных указаний.

1. Вычислим функцию $S\mathbf{T}(\mathbf{f})$. Пользуясь тождеством $\mathrm{div}_\mathbf{R}\,\mathrm{grad}_\mathbf{R}R=\Delta_\mathbf{R}R=2R^{-1}$, получаем, что $S\,\mathrm{div}_\mathbf{R}\mathbf{f}=\mathrm{N}^{-1}S\partial_3R^{-1}=-\mathrm{N}^{-1}n_3$. Далее

$$SD\mathbf{f}=S\left\{\mathrm{M}^{-1}\mathbf{e}_3DR^{-1}+\frac{1}{2}(\mathrm{N}^{-1}-\mathrm{M}^{-1})\,\mathbf{e}_j\partial_{3j}^2R^{+1}\right\}=$$

$$=-\mathrm{M}^{-1}\mathbf{e}_3+\frac{1}{2}(\mathrm{N}^{-1}-\mathrm{M}^{-1})\,(n_3\mathbf{n}-\mathbf{e}_3)$$

$$S[\mathbf{n},\ \mathrm{rot}_\mathbf{R}\mathbf{f}]=\mathrm{M}^{-1}[\mathbf{n},\ S(\mathbf{e}_1\partial_2-\mathbf{e}_2\partial_1)R^{-1}]=\mathrm{M}^{-1}(-n_3\mathbf{n}+\mathbf{e}_3)$$

Отсюда

$$S\mathbf{T}(\mathbf{f})=\mathrm{N}^{-1}\{-3(\Lambda+\mathrm{M})\,n_3\mathbf{n}-\mathrm{M}\mathbf{e}_3\} \tag{6.1}$$

2. Вычислим функцию $S\mathbf{T}(\mathbf{g})$. Видно, что $S\,\mathrm{div}_\mathbf{R}\mathbf{g}=S\partial_3\Delta_\mathbf{R}R^{-1}=0$, $S\,\mathrm{rot}_\mathbf{R}\mathbf{g}=0$. Поэтому

$$S\mathbf{T}(\mathbf{g})=2\mathrm{M}SD\mathbf{g}=2\mathrm{M}(\mathrm{N}^{-1}-\mathrm{M}^{-1})\,\mathbf{e}_jSD\partial_{3j}^2R^{-1}=6\mathrm{N}^{-1}(\Lambda+\mathrm{M})\,\{-3n_3\mathbf{n}+\mathbf{e}_3\} \tag{6.2}$$

[2] Формула (5.19) означает, что компоненты $\Theta(\mathbf{R})$ суть вторые производные по $\mathbf{R}$ от $\delta(\mathbf{R})$. Важно, что компоненты $\Theta(\mathbf{R})$ не содержат слагаемых вида $\mathrm{const}\,\delta(\mathbf{R})$.

3. Вычислим функцию $S\mathbf{T}(\mathbf{h})$. Очевидно, $S\,\mathrm{div}_R\mathbf{h}=0$, $\mathrm{M}S\,\mathrm{rot}_R\mathbf{h}=$ $=S\,\mathrm{rot}_R\mathrm{rot}_R(\mathbf{e}_1\partial_2R^{-1})=\mathbf{e}_jS\partial_{12j}{}^3R^{-1}=-15n_1n_2\mathbf{n}+3(n_1\mathbf{e}_2+n_2\mathbf{e}_1)$; отсюда $\mathrm{M}S[\mathbf{n},\ \mathrm{rot}_R\mathbf{h}]=3[\mathbf{n},\ n_1\mathbf{e}_2+n_2\mathbf{e}_1]$. Наконец, $\mathrm{M}SD\mathbf{h}=S(\mathbf{e}_2D\partial_{23}{}^2-\mathbf{e}_3D\partial_{22}{}^2)R^{-1}=$ $=-9[\mathbf{n},\ n_2\mathbf{e}_1]-3\mathbf{e}_3$.

Следовательно

$$S\mathbf{T}(\mathbf{h})=3[\mathbf{n},\ -5n_2\mathbf{e}_1+n_1\mathbf{e}_2]-6\mathbf{e}_3 \tag{6.3}$$

4. Вычислим функцию $S\mathbf{T}(\mathbf{w})$.

$$S\mathbf{T}(\mathbf{w})=-\frac{\Lambda}{2\mathrm{N}}\mathbf{n}S\,\mathrm{div}_R\,\mathrm{grad}_R\,\partial_3R-SD\left\{\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\mathbf{e}_j\partial_{3j}{}^2R+(\mathbf{e}_2\partial_{23}{}^2-\mathbf{e}_3\partial_{22}{}^2)R\right\}-$$

$$-\frac{1}{2}[\mathbf{n},S\,\mathrm{rot}_R\,\mathrm{rot}_R(\mathbf{e}_1\partial_2R)]=-\frac{\Lambda}{\mathrm{N}}\mathbf{n}S\partial_3R^{-1}-\left\{\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}(\mathbf{e}_3-\mathbf{n}_3n)-\mathbf{e}_3-[\mathbf{n},n_2\mathbf{e}_1]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}[\mathbf{n},n_1\mathbf{e}_2-n_2\mathbf{e}_1]\right\}=-\frac{1}{2}[\mathbf{n},n_1\mathbf{e}_2+n_2\mathbf{e}_1]-3\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}n_3\mathbf{n}+\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\mathbf{e}_3$$

5. Для проверки формулы (5.19) достаточно, используя выражение для $S\mathbf{T}(\mathbf{w})$, убедиться в том, что при $\chi=-{}^1/_6$, $\gamma=-{}^1/_6\ \Lambda/(\Lambda+\mathrm{M})$ функция (5.15) удовлетворяет условию (5.8).

6. Для проверки формулы (5.17) введем вспомогательную функцию $\varphi=\mathrm{rot}_R(\mathbf{e}_1\partial_1R^\sigma)$, $\sigma=\mathrm{const}$ и рассмотрим значения $S\mathbf{T}(\varphi)$ при $\sigma=\pm1$. Видно, что

$$SD(\varphi)=S(\mathbf{e}_2D\partial_{13}{}^2-\mathbf{e}_3D\partial_{12}{}^2)R^\sigma=\sigma(\sigma-2)^2n_1[\mathbf{n},\mathbf{e}_1]$$

$$S\,\mathrm{rot}_R\,\varphi=S(\mathbf{e}_i\partial_1\Delta_R-\mathbf{e}_j\partial^3_{1ij})R^\sigma=\sigma(\sigma+1)(\sigma-2)\mathbf{e}_1n_1-\sigma(\sigma-2)\times$$
$$\times\{(\sigma-2)n_1^2\mathbf{n}+\mathbf{n}+2\mathrm{n}_1\mathbf{e}_1\}$$

Отсюда $S\mathbf{T}(\varphi)=\sigma(\sigma-2)(3\sigma-5)\mathrm{M}n_1[\mathbf{n},\mathbf{e}_1]$. Полагая $\sigma=\pm1$, нетрудно найти константу K в выражении (5.17).

Представление (5.5), (5.15)–(5.17), а вместе с ним и формула (5.18) доказаны.

7. Построение предельной задачи в случае условия (1.5). В окрестности излучателя поле $\mathbf{u}(\mathbf{r},\varepsilon)$ приближенно описывается двумя членами внутреннего разложения

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},\varepsilon)=p\varepsilon\{\mathbf{V}^\circ(\mathbf{R})+\varepsilon\mathbf{V}^1(R)+O(\varepsilon^2)\}\quad(R<\mathrm{const}) \tag{7.1}$$

Применение к выражению (7.1), аналитически продолженному внутрь сферы $R<1$, оператора $\mathbf{l}$ дает

$$\mathbf{l}(\mathbf{u})=p\varepsilon^{-1}\{\mathbf{L}(\mathbf{V}^\circ)+\varepsilon(\mathbf{L}(\mathbf{V}^1)+\mathbf{l}^1(\mathbf{V}^\circ))+O(\varepsilon^2)\} \tag{7.2}$$

Перейдя к переменной $\mathbf{r}$ и воспользовавшись (4.9), (5.18), (5.19), получаем

$$\mathbf{l}(\mathbf{u})\sim p\varepsilon^3\{-{}^4/_3\pi\,\mathrm{rot}_r(\mathbf{e}_1\delta(\mathbf{r}))+\xi(\mathbf{r},\varepsilon)\} \tag{7.3}$$

где $\xi(\mathbf{r},\varepsilon)$ стремится к нулю при $\varepsilon\to0$ в смысле обобщенных функций [7].

Предельный переход в (7.3) при условии (1.9) приводит к задаче вида (1.10), где $\mathbf{F}$ задается формулой (1.15) при

$$\beta=0 \tag{7.4}$$

8. Задача с граничным условием (1.4). Вычисления для этого случая во многом аналогичны предыдущим.

Решение задачи (2.10), (3.6) с условием $\mathbf{ST}(\mathbf{V}^\circ)=\mathbf{n}$ ищется в виде

$$\mathbf{V}^\circ(\mathbf{R})=c\,\mathrm{grad}_R\,R^{-1} \tag{8.1}$$

где c — постоянная. Из граничного условия находим, что $c={}^1/_4\mathrm{M}$.

Функция (8.1) удовлетворяет уравнению во всем пространстве

$$\mathbf{L}(\mathbf{V}^\circ)=-4\pi\mathrm{M}\,\mathrm{grad}_R\,\delta(\mathbf{R})\quad(\mathbf{R}\in\mathbf{E}^3) \tag{8.2}$$

Удобно считать, что $\mathrm{grad}\,\mu^1(\mathbf{R})$ при $\mathbf{R}=0$ параллелен орту $\mathbf{e}_3$ (этого можно добиться поворотом координатных осей), так что $\mu^1(\mathbf{R})=mX_3$, а $S\mu^1(\mathbf{R})=mn_3$, где m — постоянная.

Рассмотрим выражение для $\mathbf{l}^1(\mathbf{V}^\circ)$ во всем пространстве. Из (2.6), (8.2), (5.2) следует, что

$$l_k(\mathbf{V}^\circ)=2m\partial_p(X_3\partial_{pk}^2R^{-1})+\partial_k\{\lambda^1(\mathbf{R})(-4\pi\delta(\mathbf{R}))\}=$$
$$=2m\{\delta_{3p}\partial_{pk}^2R^{-1}+X_3\partial_k(-4\pi\delta(\mathbf{R}))\}=2m\{\partial_{3k}^2R^{-1}+4\pi\delta_{3k}\delta(\mathbf{R})\}$$

Нетрудно проверить, что $S\mathbf{t}^1(\mathbf{V}^\circ)=-4mcn_3\mathbf{n}$. Поэтому уравнения (2.12), (2.13) для $\mathbf{V}^1$ можно переписать в виде

$$\mathbf{L}(\mathbf{V}^1)=-2mc(\mathrm{grad}_\mathbf{R}\,\partial_3R^{-1}+4\pi\mathbf{e}_3\delta(\mathbf{R}))\quad(\mathbf{R}\in\mathbf{E}^3)\tag{8.3}$$

$$S\mathbf{T}(\mathbf{V}^\circ)=-4mcn_3\mathbf{n}\tag{8.4}$$

(второе слагаемое в (8.3) равно нулю при $R>1$).

Нетрудно проверить, что функция

$$\mathbf{V}^1(\mathbf{R})=-2mc\{{}^1/{}_2\mathrm{N}^{-1}\,\mathrm{grad}_\mathbf{R}\,\partial_3R^{+1}-\mathbf{f}(\mathbf{R})\}\tag{8.5}$$

является решением задачи (3.6), (8.3), (8.4).

Видно, что аналитически продолженные на все пространство функции $\mathbf{V}^\circ$ и $\mathbf{V}^1$ удовлетворяют соотношению

$$\mathbf{L}(\mathbf{V}^1)=-\mathbf{l}^1(\mathbf{V}^\circ)\quad(\mathbf{R}\in\mathbf{E}^3)\tag{8.6}$$

Рассуждая, как в п. 7 и пользуясь (8.2), получаем для предельной функции $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ уравнение (1.10), где $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ определяются выражением (1.14), причем

$$\alpha\equiv0\tag{8.7}$$

Заметим, что в обеих рассмотренных задачах предельная функция $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ в (1.8) совпадает с главным членом $\mathbf{u}^\circ(\mathbf{r})$ внешнего разложения (3.1).

Приведенные здесь построения справедливы для динамических и статических задач о сферических излучателях, расположенных внутри любых областей, на границах которых выполнены условия, гарантирующие однозначную разрешимость (1.1), (1.4) и (1.1), (1.5).

Автор благодарен А. А. Вакуленко, Ж. Жоберу, А. М. Ильину и Г. И. Петрашеню за обсуждение результатов работы и смежных вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
2. *Ильин А. М.* Об одной задаче с малым параметром.— Успехи матем. наук, 1977, № 3 (195), с. 161–162.
3-4. *Ильин А. М.* Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. 2. Область с малым отверстием.— Матем. сб., 1977, № 2 (6), с. 264–284.
5. *Петрашень Г. И.* Основы математической теории распространения сейсмических волн.— Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн: Сб. статей. Л.: Наука, 1978, вып. 18, с. 193–206.
6. *Гурвич И. И.* К теории сферического излучателя поперечных сейсмических волн.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1968, № 1, с. 44–52.
7. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 439 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
9.VI.1980