МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1982

УДК 539.3

О МОДЕЛИ ТОЧЕЧНЫХ ДЕФЕКТОВ В МЕХАНИКЕ УПРУГОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

КАНАУН С. К.

Рассматривается задача о равновесии однородного упругого пространства, содержащего систему изолированных неоднородностей типа включений или трещин. Исследуется приближенный метод, основанный на замене неоднородностей конечных размеров точечными дефектами. В этом приближении дано решение задачи о регулярной решетки идентичных неоднородностей в трехмерной среде. В плоском случае погрешность приближенного решения задачи о периодической системе включений анализируется сравнением с точными решениями. Рассматривается упругая среда со случайным множеством включений или трещин. Обсуждается область применимости модели точечных дефектов для вычисления эффективных упругих постоянных неоднородного материала.

1. Интегральные уравнения задачи. Рассмотрим бесконечную однородную упругую среду с тензором модулей c_0, содержащую множество изолированных областей V_i, внутри которых тензоры модулей равны c_0+c_{1i} $(i=1,2,\ldots)$. Обозначим через $V_i(x)$ характеристическую функцию области V_i, $x(x_1, x_2, x_3)$ — точка среды.

Используя [1, 2], можно показать, что тензоры деформаций $\varepsilon(x)$ и напряжений $\sigma(x)$ в среде с неоднородностями удовлетворяют соотношениям

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(x)=\varepsilon_{0\alpha\beta}(x)-\int K_{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x')\,c_1^{\lambda\mu\nu\rho}(x')\,\varepsilon_{\nu\rho}(x')\,dx' \tag{1.1}$$

$$\sigma^{\alpha\beta}(x)=\sigma_0^{\alpha\beta}(x)+\int S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x')\,B_{1\lambda\mu\nu\rho}(x')\,\sigma^{\nu\rho}(x')\,dx' \tag{1.2}$$

$$c_1(x)=\sum_i c_{1i}V_i(x),\quad B_1=\sum_i B_{1i}V_i(x),\quad B_{1i}=(c_0+c_{1i})^{-1}-c_0^{-1} \tag{1.3}$$

где $\varepsilon_0(x)$ и $\sigma_0(x)$ — внешние поля деформаций и напряжений соответственно, $\varepsilon_0=c_0^{-1}\sigma_0$. Ядра интегральных операторов $\mathbf{K}$ и $\mathbf{S}$ в соотношениях (1.1), (1.2) выражаются через функцию Грина $G(x)$ основной среды (c_0) и имеют вид ($\delta(x)$ — дельта-функция Дирака)

$$K_{\alpha\beta\lambda\mu}(x)=-[\nabla_\alpha\nabla_\lambda G_{\beta\mu}(x)]_{(\alpha\beta)(\lambda\mu)} \tag{1.4}$$

$$S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x)=c_0^{\alpha\beta\nu\rho}K_{\nu\rho\tau\delta}(x)\,c_0^{\tau\delta\lambda\mu}-c_0^{\alpha\beta\lambda\mu}\delta(x) \tag{1.5}$$

Известно, что $G(x)$ — однородная функция степени (-1). Тогда из предыдущих соотношений следует, что $K(x)$ и $S(x)$ являются однородными обобщенными функциями степени (-3), а их преобразования Фурье $K^\vee(k)$ и $S^\vee(k)$ — однородные функции нулевой степени. Поэтому $\mathbf{K}$ и $\mathbf{S}$ можно рассматривать как псевдодифференциальные операторы (с символами $K^{\vee}(k)$ и $S^{\vee}(k)$), действие которых на функцию $\varphi(x) \in S(\mathbf{R}^3)$ может быть определено равенствами [3] ($\xi = a^{-1}x$):

$$(\mathbf{K}\varphi)(x) = \fint K[a(\xi-\xi')]\varphi(a\xi')\det a d\xi' + A\varphi(x) \qquad (1.6)$$

$$(\mathbf{S}\varphi)(x) = \fint S[A(\xi-\xi')]\varphi(a\xi')\det a d\xi' + D\varphi(x) \qquad (1.7)$$

Здесь символ $\fint$ означает интеграл в смысле главного значения по Коши, a — произвольный симметричный двухвалентный тензор, определяющий невырожденное линейное преобразование пространства, постоянные тензоры A и D имеют вид

$$A = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_1} K^{\vee}(a^{-1}k)\,d\Omega, \qquad D = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_1} S^{\vee}(a^{-1}k)\,d\Omega \qquad (1.8)$$

где Ω_1 — поверхность единичной сферы в k-пространстве.

Если все включения сосредоточены в финитной области, то для определения операторов $\mathbf{K}$ и $\mathbf{S}$ в (1.1), (1.2) можно использовать соотношения (1.6), (1.7), правые части которых существуют для любой кусочно-непрерывной финитной функции φ. Однако для приложений интерес представляют случаи, когда неоднородности образуют регулярную решетку или являются реализацией однородного в пространстве случайного множества включений. Если при этом внешнее поле $\varepsilon_0(x)$ ($\sigma_0(x)$) есть периодическая или почти-периодическая функция, то возникает необходимость определения операторов $\mathbf{K}$ и $\mathbf{S}$ на нефинитных функциях — периодических или почти-периодических.

Ограничимся наиболее интересным для приложений случаем функций, представимых в виде ряда экспонент с, вообще говоря, несоизмеримыми волновыми векторами

$$\Psi(x) = \Psi_0 + \sum_j \psi_j \exp[i(k_j, x)] \qquad (i^2 = -1) \qquad (1.9)$$

где $k_j \neq 0$ для всех j, Ψ_0 — постоянная составляющая функция $\Psi(x)$, коэффициенты ψ_j таковы, что ряд здесь сходится, может быть, в обобщенном смысле.

Для определения операторов $\mathbf{K}$ и $\mathbf{S}$ на функции $\exp[i(k_j, x)]$ можно по-прежнему использовать соотношения (1.6), (1.7). Для такой функции интегралы в этих соотношениях сходятся в нуле и на бесконечности. Отметим, что при действии $\mathbf{K}$ и $\mathbf{S}$ на ряд в (1.9) последний перейдет в аналогичный, абсолютно сходящийся ряд, если исходный ряд сходился абсолютно.

Остается определить действие $\mathbf{K}$ и $\mathbf{S}$ на постоянную Ψ_0. При $\varphi = \mathrm{const}$ интегралы в (1.6), (1.7) формально расходятся на бесконечности. Можно показать [4], что при фиксированных внешних напряжениях и нестесненных на бесконечности деформациях действие $\mathbf{K}$ и $\mathbf{S}$ на постоянные определяется равенствами

$$\int K(x-x')\,dx' = c_0^{-1}, \qquad \int S(x-x')\,dx' = 0 \qquad (1.10)$$

каждое из которых, согласно (1.4), (1.5), является следствием другого. Существенно, что никакой «естественной регуляризации» операторов $\mathbf{K}$ и $\mathbf{S}$ на постоянных указать нельзя и соотношения (1.10) равносильны некоторым дополнительным физическим условиям.

Таким образом, действие операторов $\mathbf{K}$ и $\mathbf{S}$ на функцию $\Psi(x)$ вида (1.9) можно определить формулами

$$(\mathbf{K}\Psi)(x) = \int K(x-x')[\Psi(x') - \Psi_0]\,dx' + c_0^{-1}\Psi_0 \qquad (1.11)$$

$$(\mathbf{S}\Psi)(x)=\int S(x-x')[\Psi(x')-\Psi_0]dx' \tag{1.12}$$

где интегралы понимаются в смысле правых частей (1.6), (1.7) и при этом сходятся в нуле и на бесконечности.

Особый интерес для приложений представляет случай однородной среды, содержащей множество трещин. Деформации и напряжения в среде с трещинами можно записать в форме, аналогичной (1.1), (1.2) [5]:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(x)=\varepsilon_{0\alpha\beta}(x)+\int K_{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x')c_0^{\lambda\mu\nu\rho}m_{\nu\rho}(x')dx' \tag{1.13}$$

$$\sigma^{\alpha\beta}(x)=\sigma_0^{\alpha\beta}(x)+\int S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x')m_{\lambda\mu}(x')dx' \tag{1.14}$$

$$m_{\alpha\beta}(x)=\sum_i n_\alpha^i(x)b_\beta^i(x)\delta(\Omega_i) \tag{1.15}$$

Здесь $n^i(x)$ — нормаль к поверхности i-й трещины Ω_i, $b^i(x)$ — вектор скачка перемещений на трещине, $\delta(\Omega_i)$ — дельта-функция, сосредоточенная на Ω_i.

Используя результаты [6], можно показать, что ядро $S(x)$ в (1.2), (1.14) есть операция Rot от тензора Грина для внутренних напряжений. Поэтому представления (1.2), (1.14) для $\sigma(x)$ позволяют интерпретировать возмущенное поле в среде с неоднородностями как поле внутренних напряжений в однородной среде (c_0) с некоторым распределением дислокационных моментов. В случае трещин эквивалентная плотность дислокационных моментов $m(x)$ имеет вид (1.15), а в случае включений

$$m(x)=\sum_i B_{1i}\sigma(x)V(x) \tag{1.16}$$

Отметим, что плотность $m(x)$ является линейным функционалом внешнего поля $\sigma_0(x)$. Поэтому среда с неоднородностями может рассматриваться как однородная среда, в которой под действием внешних нагрузок индуцируются дислокационные моменты с плотностью, зависящей от упругих свойств и геометрии поля неоднородностей.

2. Модель точечного дефекта. Пусть одиночное включение занимает ограниченную область V_1 в однородной среде. Из представления (1.2) следует, что поле напряжений вне включения однозначно определяется, если известно значение $\sigma(x)$ лишь в области V_1. Уравнение для функции $\sigma^+(x)=\sigma(x)V_1(x)$ получим домножая обе части (1.2) на $V_1(x)$. Отсюда видно, что $\sigma^+(x)$ зависит только от $\sigma_0^+(x)=\sigma_0(x)V_1(x)$ — значений внешнего поля в области V_1. Поэтому из (1.16) следует, что плотность эквивалентных данному включению дислокационных моментов представима в форме

$$m(x)=(\mathbf{P}^1\sigma_0^+)(x)V_1(x) \tag{2.1}$$

где линейный оператор $\mathbf{P}^1$ определяется из решения задачи об изолированной неоднородности и зависит только от формы области V_1 и значения упругих постоянных среды и включения. Деформации и напряжения в среде с одиночным включением вычисляются из (1.13), (1.14) при $m(x)$ в форме (2.1).

Рассмотрим задачу аппроксимации включения точечной неоднородностью. Будем исходить из того условия, что асимптотика возмущенного поля от конечного включения и от точечного дефекта, которым он моделируется, должны совпадать на бесконечности. Тогда переход к точечному дефекту соответствует замене плотности эквивалентных данному включению дислокационных моментов первым членом разложения в ряд по мультиполям [6]:

$$m(x)=M\delta(x-\xi)+\ldots,\quad M=\int m(x)\,dx \tag{2.2}$$

где ξ — точка приведения, которую удобно выбрать в центре тяжести включения.

В случае постоянного в области V_1 внешнего поля $m(x)$ принимает вид

$$m(x)=P^1(x)\sigma_0,\quad P^1(x)=(\mathbf{P}^1V_1)(x)\,V_1(x) \tag{2.3}$$

где $(\mathbf{P}^1V_1)(x)$ — значение оператора $\mathbf{P}^1$ на функции $V_1(x)$, а тензор M в (2.2) представляется в форме

$$M=P_0^1\sigma_0,\quad P_0^1=\int P^1(x)\,dx \tag{2.4}$$

Используя результаты [2], можно показать, что для включения эллипсоидальной формы тензор P_0^1 имеет вид (I — единичный четырехвалентный тензор)

$$P_0^1=-v_1c_0^{-1}c_1(I+Ac_1)^{-1}c_0^{-1} \tag{2.5}$$

где v_1 — объем включения, тензор A определяется соотношением (1.8), причем линейное преобразование a^{-1} в (1.8) переводит эллипсоид в единичный шар.

Если неоднородность представляет собой эллиптическую трещину, то выражение для P_0^1 можно получить используя, например, результаты [7]. В дальнейшем значение тензора P_0^1 предполагается известным.

Ниже под моделью точечных дефектов будет пониматься приближение, при котором плотности эквивалентных неоднородностям дислокационных моментов заменяются первыми членами своих мультипольных разложений.

3. Взаимодействие изолированных неоднородностей. Пусть однородная среда содержит множество изолированных дефектов — включений или трещин. Обозначим через σ_i^* локальное поле, в котором находится i-й дефект. Это поле определенное в области V_i, складывается из внешнего поля $\sigma_0(x)$ и поля, наведенного окружающими дефектами. Из предыдущего следует, что $\sigma_i^*(x)$ имеет вид

$$\sigma_i^*(x)=\sigma_0(x)+\sum_{j\neq i}\int S(x-x')\,m^j(x')\,dx'\quad (x\in V_i) \tag{3.1}$$

где тензоры $m^j(x)$ в силу (2.1) представляются в форме

$$m^j(x)=(\mathbf{P}^j\sigma_j^*\ (x)\,V_j(x) \tag{3.2}$$

Здесь оператор $\mathbf{P}^j$ определяется из решения задачи для изолированной j-й неоднородности. Подставляя (3.2) в (3.1) и полагая $i=1, 2, \ldots$, получим систему уравнений для определения тензоров $\sigma_i^*(x)$, которые, при заданных операторах $\mathbf{P}^i$, являются основными неизвестными задачи.

Перейдем к модели точечных дефектов и заменим плотности $m^j(x)$ в (3.1) первыми членами разложения в ряд по мультиполям (2.2). Строго говоря, это означает, что характерный размер дефектов l предполагается малым по сравнению с характерным расстоянием между ними. Если к тому же внешнее поле $\sigma_0(x)$ мало меняется на расстояниях порядка l, то функции $\sigma_j^*(x)$ естественно считать постоянными в областях V_j. Выражение для коэффициента M^j в разложении (2.2) примет тогда вид (2.4), где P_0^1 и σ_0 следует заменить на P_0^j и σ_j^* соответственно. Соотношение (3.1) при переходе к точечным дефектам примет вид

$$\sigma_i^*=\sigma_0(\xi_i)+\sum_{j\neq i}\int S(\xi_i-x')\,P_0^j\sigma_j^*\delta(x'-\xi_j)\,dx' \tag{3.3}$$

где ξ_i — центр тяжести i-го включения, $i=1, 2, \ldots$.

Поля напряжений и деформаций в среде с неоднородностями в приближении точечных дефектов выражаются через тензоры σ_i^* — решение системы (3.3) — по формулам (1.13), (1.14), где

$$m(x)=\sum_i P_0{}^i\sigma_i{}^*\delta(x-\xi_i) \qquad (3.4)$$

Рассмотрим простейший пример. Пусть на плоскости имеются две прямолинейные трещины, длина каждой из которых $2l$. Трещины расположены на одной прямой, и расстояние между их центрами есть r. Внешнее поле представляет собою одноосное растяжение напряжениями σ_0 в направлении нормали n к линии трещин.

Заменим трещины точечными дефектами. В силу симметрии задачи имеем

$$P_0{}^1=P_0{}^2, \quad n_\alpha\sigma_1^{*\alpha\beta}n_\beta=n_\alpha\sigma_2^{*\alpha\beta}n_\beta \qquad (3.5)$$

Найдем выражение для величины $\sigma_{nn}{}^*=n_\alpha\sigma_1^{*\alpha\beta}n_\beta$. Можно показать, что для рассматриваемых дефектов в случае изотропной среды справедливо равенство

$$n_\alpha S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x)P^1_{0\lambda\mu\nu\rho}=\frac{l^2}{2x^2}\delta_\rho{}^\beta n_\nu \qquad (3.6)$$

где x — координата вдоль прямой, на которой сосредоточены дефекты. Домножая обе части (3.3) справа и слева на n и учитывая (3.5), (3.6), получим

$$\sigma_{nn}{}^*=\sigma_0+\frac{l^2}{2r^2}\sigma_{nn}{}^*, \quad \sigma_{nn}{}^*(r)=\sigma_0\frac{r^2}{r^2-{}^1/{}_2l^2} \qquad (3.7)$$

Здесь выражение для $\sigma_{nn}{}^*(r)$ представляет собой нормальную компоненту поля напряжений, в котором находится каждый из двух точечных дефектов, расположенных на расстоянии r друг от друга. Очевидно, что $\sigma_{nn}{}^*(r)$ — асимптотика при $r>2l$ решения задачи о взаимодействии двух одинаковых трещин, лежащих на одной прямой. Если $r\leqslant l/\sqrt{2}$, то решение (3.7) уже не имеет физического смысла.

Таким образом, к модели точечных дефектов в локальной теории упругости следует подходить с осторожностью. Строго говоря, замена включения конечных размеров точечным дефектом означает введение в сплошной среде характерной длины l порядка размеров дефекта и расстояния меньшие l не всегда имеют смысл. В частности, взаимодействие конечных включений на расстояниях порядка l с помощью модели точечных дефектов нельзя описать даже качественно.

4. Регулярные решетки неоднородностей. Пусть идентичные неоднородности образуют регулярную решетку в однородной среде. Если внешнее поле σ_0 постоянное, то для простых решеток локальные поля $\sigma_i{}^*(x)$ совпадают при всех i.

Перейдем к модели точечных дефектов. Выберем начало координат в призвольном узле решетки, образованной дефектами. Поле σ^* для дефекта, расположенного в этом узле, на основании (3.2) определяется из соотношения

$$\sigma^*=\sigma_0+\int S(x)P_0\Psi(x)\,dx\sigma^* \qquad (4.1)$$

где учтено, что тензоры $\sigma_j{}^*$, как и $P_0{}^j$, одинаковы для всех j, и введены обозначения

$$\sigma_j{}^*=\sigma^*, \quad P_0{}^j=P_0, \quad \Psi(x)=\sum_t{}' \delta(x-t) \qquad (4.2)$$

Здесь t — вектор решетки, образованной точечными дефектами, штрих над знаком суммы означает пропуск слагаемого $t=0$.

Регуляризация интеграла в (4.1) в силу (1.12), (1.7) имеет вид

$$Q=\int S(x)\Psi(x)\,dx=\int S(x)\,[\Psi(x)-\Psi_0]\,dx-D\Psi_0 \qquad (4.3)$$

где учтено, что $\Psi(0)=0$, тензор D определяется соотношением (1.8) при $a_\beta{}^\alpha=\delta_\beta{}^\alpha$, $\delta_\beta{}^\alpha$ — символ Кронекера. Постоянная составляющая функции $\Psi(x)$ вычисляется по формуле

$$\Psi_0=\lim_{v\to\infty}\frac{1}{v}\int_V \Psi(x)\,dx=v_0^{-1} \qquad (4.4)$$

Здесь V — область с объемом v, в пределе занимающая все пространство, v_0 — объем элементарной ячейки решетки.

Интегралы в (4.3) можно представить в виде суммы интегралов по элементарным ячейкам w_t, на которые разбивается все пространство (ячейка w_t соответствует узлу решетки с вектором t). При этом тензор Q выражается в виде следующего сходящегося ряда:

$$Q=\sum_t{}'\left[S(t)-v_0^{-1}\int_{w_t}S(x)\,dx\right]-v_0^{-1}\left[\int_{w_0}S(x)\,dx+D\right] \qquad (4.5)$$

Из (4.1) и (4.3) теперь имеем

$$\sigma^{*\alpha\beta}=\Lambda_{\lambda\mu}{}^{\alpha\beta}\sigma_0{}^{\lambda\mu},\quad \Lambda=(I-QP_0)^{-1} \qquad (4.6)$$

Полученное выражение для σ^* позволяет приближенно оценить концентрацию напряжений на включениях, образующих решетку. Указанная величина должна определяться из решения задачи об изолированной неоднородности в поле напряжений σ^* (см. [5]).

Выражения для тензоров деформаций и напряжений в среде с решеткой точечных дефектов принимают вид

$$\varepsilon(x)=\varepsilon_0+\int K(x-x')\,c_0[m(x')-m_0]\,dx'+m_0 \qquad (4.7)$$

$$\sigma(x)=\sigma_0+\int S(x-x')\,[m(x')-m_0]\,dx' \qquad (4.8)$$

$$m(x)=P_0\Lambda\sigma_0\sum_t\delta(x-t),\qquad m_0=v_0^{-1}P_0\Lambda\sigma_0 \qquad (4.9)$$

Интегралы здесь понимаются в смысле правых частей (1.6), (1.7) и существуют при x, не совпадающем ни с одним из возможных значений вектора t.

Найдем тензор эффективной упругой податливости среды с дефектами B_*, определенный соотношением

$$\langle\varepsilon\rangle=B_*\langle\sigma\rangle \qquad (4.10)$$

где угловые скобки означают операцию интегрального среднего по всему пространству.

Из (4.9) следует, что разложение функции $m(x)-m_0$ в ряд вида (1.9) не содержит постоянной составляющей. Следовательно, в рядах, полученных действием операторов $\mathbf{K}c_0$ и $\mathbf{S}$ на $m(x)-m_0$, постоянные составляющие также будут отсутствовать.

Поскольку среднее от $\exp[i(k_j, x)]$ $(k_j\neq 0)$ по всему пространству равно нулю, то при осреднении выражений (4.7), (4.8) интегральные члены исчезают и средние деформации и напряжения в среде с дефектами примут вид

$$\langle\varepsilon\rangle=\varepsilon_0+v_0^{-1}P_0\Lambda\sigma_0,\quad \langle\sigma\rangle=\sigma_0 \tag{4.11}$$

Отсюда и из (4.10) имеем

$$B_*=B_0+v_0^{-1}P_0\Lambda\quad (B_0=c_0^{-1}) \tag{4.12}$$

Рассмотрим пример изотропной среды, в которой сферические анизотропные включения образуют кубическую решетку. Тензор B_* принимает в этом случае вид (p — концентрация включений)

$$B_*=B_0-pB_0c_1[I+pB_0c_1+(1-p)Ac_1+\alpha p\Gamma c_1]^{-1}B_0 \tag{4.13}$$

где компоненты тензоров A и Γ в системе базисных векторов решетки определяются соотношениями

$$A_{\alpha\beta\lambda\mu}=\frac{1}{3\mu_0}\left[\delta_{\alpha\beta}\delta_{\lambda\mu}-\frac{1}{10(1-\nu_0)}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\lambda\mu}+\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu}+\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda})\right]$$

$$\Gamma_{\alpha\beta\lambda\mu}=\frac{1}{\mu_0(1-\nu_0)}\left[\delta_{\alpha\beta}\delta_{\lambda\mu}+\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu}+\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda}-5\sum_{i=1}^{3}\delta_{i\alpha}\delta_{i\beta}\delta_{i\lambda}\delta_{i\mu}\right]$$

Здесь μ_0 — модуль сдвига, ν_0 — коэффициент Пуассона основной среды. Безразмерный скалярный коэффициент α в (4.13) представляется в форме сходящегося ряда, аналогичного (4.5), численное суммирование которого дает $\alpha=0{,}080$.

Перейдем к плоской задаче. Здесь все построения проводятся аналогично трехмерной ситуации. Рассмотрим квадратную решетку круговых включений в изотропной среде. В этом случае тензор B_* имеет вид (4.13), где все тензоры следует заменить их двумерными аналогами. Для плоского напряженного состояния компоненты тензоров A и Γ в базисе векторов решетки определяются соотношениями

$$A_{ijkl}=\frac{1}{16\mu_0}[4(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})-(1+\nu_0)(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})] \tag{4.14}$$

$$\Gamma_{ijkl}=\frac{(1+\nu_0)}{\mu_0}\left[\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}-4\sum_{s=1}^{2}\delta_{si}\delta_{sj}\delta_{sk}\delta_{sl}\right]$$

где латинские индексы принимают значения 1, 2. Коэффициент α также выражается в виде суммы некоторого сходящегося ряда и в данном случае $\alpha=0{,}092$.

Можно показать, что при $\alpha=0$ и A в форме (4.14) соотношение (4.13) дает в приближении точечных дефектов выражение для тензора эффективной упругой податливости изотропной плоскости с правильной треугольной решеткой круговых включений.

Сравним полученные результаты с точными значениями эффективных параметров плоских решеток включений в однородной среде, которые приводятся в [8]. Рассмотрим относительную ошибку Δ, которая возникает при расчете, например, эффективного модуля сдвига μ_* предложенным методом

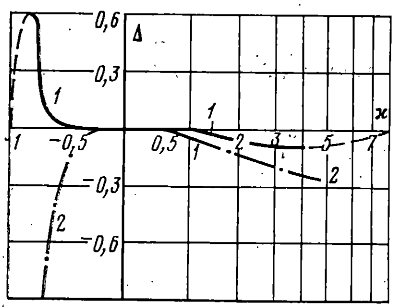
$$\Delta=(\mu_*-\mu_*^T)/\mu_*^T \tag{4.15}$$

Здесь μ_*^T и μ_* — точное значение эффективного модуля сдвига и вычисленное по (4.13) соответственно. Расчеты показывают, что Δ — функция безразмерного параметра

$$\varkappa=(pc_1)/[c_0+(1-p)\chi c_1] \tag{4.16}$$

где c_0 — характерное значение модуля упругости матрицы, c_1 — то же для возмущения модуля упругости во включениях, χ — параметр, зависящий от формы включений и равный характерному значению компонент тензора Ac_0. Для круговых включений $\chi=0{,}675$. Зависимость $\Delta(\varkappa)$ для треугольной (кривая *1*) и квадратной (кривая *2*) решеток приведена на фигуре, где по оси абсцисс отложен $\lg(2+\varkappa)$.

Параметр $\varkappa$ может меняться в пределах $-1\leqslant\varkappa<\infty$, причем отрицательным $\varkappa$ соответствуют включения более податливые, чем матрица, а положительным — наоборот. Как видно из фигуры, для треугольной решетки ошибка более 10% имеет место в области $-1<\varkappa<-0{,}8$, а для квадратной решетки — при $-1<\varkappa<-0{,}5$ и $\varkappa>2$. Сплошная и штрихпунктирная кривые на фигуре получены используя результаты [8], штриховая часть — предположительное значение ошибки с учетом того, что при $\alpha=0$ и $p\to1$ формула (4.13) дает правильные результаты для всех c_1.



Относительная ошибка для других эффективных упругих постоянных (λ_*, ν_*) практически совпадает с $\Delta(\varkappa)$ при всех $\varkappa$.

5. Случайное множество дефектов. Пусть теперь множество точечных дефектов является реализацией однородного в пространстве случайного поля. Обозначим через X множество точек ξ_i, в которых расположены дефекты. Введем множество X_{x_0}, которое определим равенствами

$$X_{x_0}=X=\bigcup_i \xi_i \quad \text{при} \quad x_0\in X; \qquad X_{x_0}=\bigcup_{i\neq k}\xi_i \quad \text{при} \quad x_0=\xi_k\in X$$

Пусть $X(x)$ и $X(x_0;\,x)$ — обобщенные функции, сосредоточенные на множествах X и X_{x_0} соответственно

$$X(x)=\sum_{\xi_i\in X}\delta(x-\xi_i), \qquad X(x_0;\,x)=\sum_{\xi_i\in X_{x_0}}\delta(x-\xi_i) \tag{5.1}$$

При использовании этих обозначений система (3.2) для определения тензоров σ_i^* записывается в форме одного уравнения

$$\sigma^*(x)=\sigma_0(x)+\int S(x-x')P_0(x')\sigma^*(x')X(x;\,x')\,dx' \qquad (x\in X) \tag{5.2}$$

где функции $P_0(x)$ и $\sigma^*(x)$ совпадают, соответственно, с P_0^j и σ_j^* в точках $x=\xi_j$, $j=1,\,2,\ldots$.

Если значения функции $\sigma^*(x)$ на множестве X известны, то поля деформаций и напряжений в среде с точечными дефектами определяются из соотношений

$$\varepsilon(x)=\varepsilon_0(x)+\int K(x-x')c_0P_0(x')\sigma^*(x')X(x')\,dx' \tag{5.3}$$

$$\sigma(x)=\sigma_0(x)+\int S(x-x')P_0(x')\sigma^*(x')X(x')\,dx' \tag{5.4}$$

Пусть внешнее поле $\varepsilon_0(\sigma_0)$ постоянное. Если X — однородное случайное множество, то определенное на X поле $\sigma(x)$ будет также случайным. Уравнения для статистических моментов $\sigma(x)$ можно получить исходя из (5.2) (см. [9]). Однако в первом приближении будем считать, что поле $\sigma^*(x)$ постоянное и одинаковое для всех дефектов. Такое предположение эквивалентно основной гипотезе метода эффективного (самосогласованного) поля [4, 10].

Уравнение для постоянного тензора σ^* получим осредняя (5.2) по ансамблю реализаций случайного множества X при условии $x \in X$:

$$\sigma^* = \sigma_0 + \int S(x-x') P \langle X(x; x') | x \rangle dx \sigma^* \quad (5.5)$$

Здесь $\langle \cdot | x \rangle$ означает среднее при условии $x \in X$; случайные функции $P_0(x')$ и $X(x; x')$ в (5.2) предполагаются статистически независимыми и $P = \langle P_0(x) | x \rangle = \langle P_0^j \rangle$, где справа стоит среднее по ансамблю от случайной величины P_0^j, которая имеет одинаковое распределение для всех j. Если точечные дефекты моделируют эллипсоидальные включения, то P_0^j определяется соотношением (2.5), где v_1, c_1, A — случайные величины с известными функциями распределения.

Пусть X — пуассоновское множество [11], для которого координаты всех точек ξ_i — независимые случайные величины, равномерно распределенные в пространстве. В этом случае, с точностью до множества меры нуль, имеют место равенства

$$\langle X(x) \rangle = \langle X(x; x') | x \rangle = v_0^{-1} \quad (5.6)$$

где v_0 — средний объем, приходящийся на один дефект.

Интеграл в (5.5) при этом исчезает, а средние значения тензоров ε и σ, учитывая (5.3), (5.4) и (5.6), принимают вид

$$\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon_0 + v_0^{-1} P \sigma_0, \quad \langle \sigma \rangle = \sigma_0 \quad (5.7)$$

Отсюда следует выражение для B_* в форме $B_* = B_0 + v_0^{-1} P$. Если рассматривается среда с эллиптическими трещинами, то это выражение для B_* совпадает с полученным в [12], а при малой концентрации трещин приводит к соотношениям работы [13].

В п. 2 отмечалось, что модель точечных дефектов не дает возможности описать взаимодействие неоднородностей на расстояниях, меньших их характерного размера l. Исходя из этого уточним модель пуассоновского точечного поля, введя дополнительные ограничения. Пусть вокруг каждой точки существует область, например сферическая с диаметром порядка l, в которую другие точки множества X не попадают.

Можно показать, что в этом случае среднее $\Psi(x-x') = \langle X(x; x') | x \rangle$ есть ограниченная функция, равная нулю при $x = x'$ с асимптотой v_0^{-1} на бесконечности. В силу изотропии модели при не очень большой концентрации дефектов $\Psi(x)$ сферически симметрична: $\Psi(x) = \Psi(|x|)$. При этом интеграл в (5.5) в силу (1.12), (1.7) принимает вид

$$\int S(x-x') P \Psi(x-x') dx' = -v_0^{-1} D P \quad (5.8)$$

где учтено, что $\Psi_0 = v_0^{-1}$, тензор D определяется соотношением (1.8) при $a_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha$, интеграл в смысле главного значения в (1.7) здесь исчезает в силу сферической симметрии $\Psi(x)$.

Используя (5.8), аналогично предыдущему получим выражения для тензоров σ^* и B_* в форме

$$\sigma^* = (I + v_0^{-1} D P)^{-1} \sigma_0, \quad B_* = B_0 + v_0^{-1} P (I + v_0^{-1} D P)^{-1} \quad (5.9)$$

Если в качестве P взять осредненный по ансамблю тензор P_0^1 вида (2.5), то это выражение для B_* совпадает с полученным в [4] тензором эффективной упругой податливости среды, содержащей изотропное случайное поле эллипсоидальных включений. В случае, когда точечные дефекты моделируют эллиптические трещины в пространстве, соотношения (5.9) совпадают с полученными в [14] для пуассоновского множества трещин с ограничением на их пересечение.

Таким образом, модель точечных дефектов, с необходимыми оговорками, позволяет получить те же выражения для эффективных упругих постоянных, что и метод эффективного поля, учитывающий конечные размеры дефектов.

Остановимся на области применимости модели точечных дефектов. При вычислении эффективных упругих постоянных неоднородной среды эту область удобно оценить как в плоском, так и в трехмерном случае с помощью параметра $\varkappa$, определенного соотношением (4.16). Если рассматривается правильная треугольная решетка включений на плоскости (п. 3), то размеры области изменения $\varkappa$, где модель дает ошибку более 10%, относительно невелики. В нее попадает, например, случай круговых отверстий при концентрации $p>0{,}4$. По-видимому, оценка, данная в п. 3 для треугольных решеток, справедлива и для других типов структур, в том числе и стохастических, в которых распределение включений не слишком отличается от изотропного.

Для плоскости, содержащей случайное множество прямолинейных трещин, роль $\varkappa$ играет параметр $4l^2/\omega_0$, где $2l$ — средняя длина трещин, ω_0 — средняя площадь, приходящаяся на одну трещину. Сравнение с экспериментами [14] показывает, что модель точечных дефектов дает погрешность не более 10% при вычислении эффективных упругих постоянных, когда $4l^2/\omega_0<1{,}5-2$.

В пространственном случае рассматриваемая модель имеет качественно ту же область применимости. (Для среды с трещинами эту область можно оценить параметром $\gamma a^3/v_0$, где a — характерный линейный размер трещин, γ — безразмерный параметр порядка единицы, зависящий от формы трещины.) Однако в трехмерной среде потенциал отдельного дефекта затухает на бесконечности быстрее, чем на плоскости ($\sim|x|^{-2}$ и $|x|^{-1}$ соответственно). Поэтому взаимодействие конечных неоднородностей может быть удовлетворительно описано при помощи модели точечных дефектов на меньших расстояниях, чем в плоском случае. Другая особенность трехмерной задачи состоит в том, что непосредственно взаимодействовать здесь может большее число дефектов, чем на плоскости. Все это может несколько сдвинуть количественные границы применимости метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронеоднородных сред.– М.: Наука, 1977. 399 с.
2. *Кунин И. А., Соснина Э. Г.* Эллипсоидальная неоднородность в упругой среде.– Докл. АН СССР, 1971, т. 199, № 3, с. 571–574.
3. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений.– М.: Наука, 1973. 232 с.
4. *Канаун С. К.* О приближении самосогласованного поля для упругой композитной среды.– ПМТФ, 1977, № 2, с. 160–169.
5. *Канаун С. К.* Взаимодействие периодических систем трещин в упругой среде.– Прикл. механика, 1980, т. 16, № 9, с. 36–42.
6. *Кунин И. А.* Теория дислокаций: Доп. к кн. А. Я. Схоутена «Тензорный анализ для физиков».– М.: Наука, 1965, с. 373–443.
7. *Sekine H., Mura T.* The elastic field around an elliptical crack in an anisotropic medium under an applied stress of polinomial forms.– Internat. J. Engng. Sci., 1979, v. 17, No. 5, p. 641–649.
8. *Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А.* Перфорированные пластины и оболочки.– М.: Наука, 1970. 556 с.
9. *Канаун С. К.* Постоянный электрический ток в среде с большим числом трещин.– ПМТФ, 1979, № 4, с. 20–31.
10. *Чабан И. А.* Метод самосогласованного поля в применении к расчету эффективных параметров неоднородных сред.– Акуст. ж., 1964, т. 10, вып. 3, с. 351–358.
11. *Большаков И. А., Ракошиц В. С.* Прикладная теория случайных потоков.– М.: Сов. радио, 1978. 248 с.
12. *Левин В. М.* К определению эффективных упругих модулей композитных материалов.– Докл. АН СССР, 1975, т. 220, № 5, с. 1042–1045.
13. *Салганик Р. Л.* Механика тел с большим числом трещин.– Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4, с. 149–158.
14. *Канаун С. К.* Пуассоновское множество трещин в упругой сплошной среде.– ПММ, 1980, т. 44, № 6, с. 1129–1139.

Ленинград

Поступила в редакцию
1.XII.1980