МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1982

УДК 531.383

О ПРИМЕНИМОСТИ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО МЕТОДА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДИНАМИКИ ГИРОСКОПА С ЖИДКОСТНЫМ ПОДВЕСОМ

ГОРОДЕЦКИЙ О. М., КЛИМОВ Д. М.

Квазистационарный метод решения задач о движении жидкости в подшипнике скольжения [1] и в цилиндрическом жидкостном подвесе гироскопа [2] использует приближенные уравнения Рейнольдса. Как известно, они получаются из уравнений Навье – Стокса отбрасыванием инерционных членов, что соответствует предположению о малости сил инерции, действующих на частицу жидкости, по сравнению с силами вязкого трения.

Для оценки точности получаемого этим методом приближенного решения рассмотрим плоскую нестационарную гидродинамическую задачу. Теория плоских нестационарных движений жидкости в цилиндрическом гидродинамическом подвесе и близкая к ней теория нестационарных движений жидкости в бесконечно длинном подшипнике скольжения использованы в работах [1, 3–14].

По применяемым методам эти работы можно разделить на две группы. К первой [3–10] относятся работы, использующие приближенные уравнения гидродинамики, когда либо опущены нелинейные члены, либо для их учета используется метод последовательных приближений или метод осреднения ускорения частиц жидкости по зазору. Решения, полученные в указанных работах, достаточно точны при малых числах Рейнольдса.

Ко второй группе относятся работы [11–14], в которых за основу взяты точные уравнения Навье – Стокса, либо обобщенное уравнение Гельмгольца для функции тока. Решение строится в виде рядов, расположенных по степеням Рейнольдса и другим малым параметрам, появляющимся вследствие конструктивных особенностей цилиндрического подвеса. Достаточно строгие результаты этих исследований представляются в виде весьма громоздких формул (в большинстве случаев приводятся два члена разложений для функции тока), при помощи которых трудно оценить влияние инерционных членов на основные характеристики цилиндрического подвеса.

В публикуемой работе на основании точных уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости исследованы периодические установившиеся движения жидкости в гидродинамическом цилиндрическом подвесе в случае периодических движений поплавка; получены выражения для результирующей и момента сил реакции жидкости, действующих на поплавок, из-за которых главным образом и возникают уходы поплавковых гироскопов; изучено влияние сил инерции частиц жидкости на величины результирующей и среднего момента сил реакции жидкости. Считается, что движение поплавка возникает в результате внутренних возмущений [15] [1].

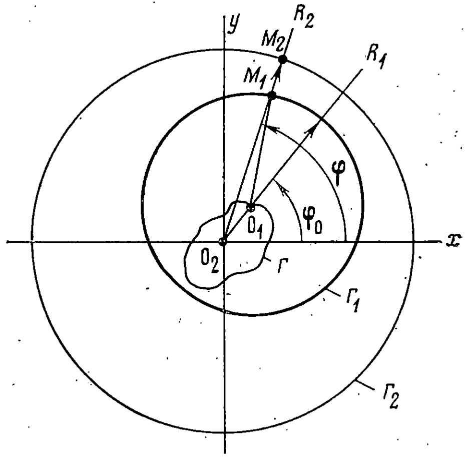
1. Рассмотрим плоское, нестационарное, изотермическое, ламинарное движение вязкой жидкости в цилиндрическом гидродинамическом подвесе (влияние торцов подвеса на течение жидкости не учитывается). В такой постановке задача сводится к изучению течения жидкости в пространстве между эксцентрично расположенными кругами — сечениями поплавка и камеры (фиг. 1).

На фигуре введены следующие обозначения: Γ_1 — окружность сечения поплавка, Γ_2 — окружность сечения камеры, O_1 — центр окружности Γ_1, O_2 — центр окружности Γ_2, O_2xy — система координат, связанная с камерой, φ_0 — угол между линией центров O_1O_2 и осью x, φ — полярный угол,

[1] См. также *Журавлев В. Ф.* Теория вибрации гироскопов.– Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1972, № 22. 48 с.

отсчитываемый от оси x, M_1 — произвольная точка окружности Γ_1, M_2 — произвольная точка окружности Γ_2, O_1M_1, O_2M_2 — радиусы сечений поплавка и камеры соответственно ($O_1M_1=R_1$, $O_2M_2=R_2$).

Предположим, что поплавок совершает плоскопараллельное периодическое движение относительно неподвижной камеры, т. е. он вращается с угловой скоростью $q(t)$ относительно камеры (вектор $q(t)$ ортогонален плоскости сечения поплавка и его величина $q(t)$ — периодическая функция времени периода T_1), а центр поплавка движется по некоторому плоскому контуру Γ (фиг. 1) с периодом T_0. Как правило, T_0, T_1 — величины одного порядка. Детально вопросы, связанные с частотами и другими характеристиками внутренней вибрации гироскопов, исследовались в работах [2] [2].



В реальных гироскопах внутренняя вибрация вызывает такое движение поплавка, что всегда выполняются неравенства

$$|O_1O_2|/\delta \ll 1, \quad |q(t)|\,\omega_0 \ll 1, \tag{1.1}$$

$$\delta=R_1-R, \quad \omega_0=2\pi/T_0$$

Соотношения (1.1) позволяют ввести малые параметры ε_1, ε_2 по формулам

$$\varepsilon_1=\max|O_2O_1/\delta|, \quad \varepsilon_2=\max|q(t)/\omega_0| \tag{1.2}$$

На основании формул (1.2) величины O_1O_2, $q(t)$ можно представить в виде

$$O_1O_2=\xi(t)\varepsilon_1\delta, \quad q(t)=\eta(t)\varepsilon_2\omega_0 \quad \text{причем} \quad \xi(t)\leqslant 1, \quad \eta(t)\leqslant 1 \tag{1.3}$$

Введем также малый параметр k характерный для гидродинамических подвесов, по формуле $k=\delta/R$.

В предположениях, отмеченных ранее, движение жидкости в зазоре между окружностями Γ_1, Γ_2 описывается уравнениями Навье — Стокса

$$\begin{gathered}
\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}-\frac{v_\varphi^2}{r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=\\
=\nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}-\frac{v_r}{r^2}\right)\\
\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{v_r v_\varphi}{r}+\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}=\\
=\nu\left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}-\frac{v_\varphi}{r^2}\right).
\end{gathered} \tag{1.4}$$

и уравнением неразрывности $\partial(rv_r)/\partial r+\partial v_\varphi/\partial\varphi=0$, где v_r, v_φ — радиальная и тангенциальная компоненты вектора скорости частиц жидкости в полярной системе координат $O_2r\varphi$, связанной, с неподвижным кругом Γ_2 (фигура), ρ — плотность жидкости, ν — кинематический коэффициент вязкости.

[2] См. также *Журавлев В. Ф.* Указ. публ. с. 10.

Краевыми условиями системы дифференциальных уравнений в частных производных являются условия прилипания частиц жидкости к поплавку и камере на границах Γ_1, Γ_2.

Основная трудность интегрирования системы уравнений (1.4) определяется наличием нелинейных членов, а также подвижностью границы Γ_1.

На основании фигуры легко получить уравнение границ Γ_1, Γ_2 в полярной системе координат $O_2r\varphi$:

$$r|_{\Gamma_1}=R_1f_0(t,\varphi),\ r|_{\Gamma_2}=R_1+\delta$$
$$f_0(t,\varphi)=1+\varepsilon_1k\xi\cos(\varphi-\varphi_0)-{}^1/{}_2\varepsilon_1^2k^2\xi^2\sin^2(\varphi-\varphi_0)+O(\xi^3k^3) \tag{1.5}$$

где ξ, φ_0 — заданные по условию функции времени.

Поскольку скорость произвольной точки M_1 внутреннего круга Γ_1 (фигура) относительно Γ_2 представима в виде $\mathbf{v}|_{\Gamma_1}=\mathbf{v}_{O_1}+\mathbf{q}\times\mathbf{R}$, где $\mathbf{v}_{O_1}$ — скорость точки O_1 относительно системы координат O_2xy, $\mathbf{R}$ — вектор O_1M_1 (фигура), то на основании формул (1.3) получаем следующие краевые условия к системе уравнений (1.4):

$$v_r|_{\Gamma_1}=\frac{d}{dt}[\varepsilon_1\delta\xi\cos(\varphi-\varphi_0)]-\omega_0\eta(t)\varepsilon_2\varepsilon_1\delta\xi\sin(\varphi-\varphi_0)$$
$$v_\varphi|_{\Gamma_1}=\frac{d}{dt}[\varepsilon_1\delta\xi\sin(\varphi-\varphi_0)]+\omega_0\eta(t)\varepsilon_2[R_1f_0(t,\varphi)-\varepsilon_1\delta\xi\cos(\varphi-\varphi_0)], \tag{1.6}$$
$$v_r|_{\Gamma_2}=v_\varphi|_{\Gamma_2}=0$$

Для того чтобы перейти к краевой задаче с неподвижными границами, сделаем замену переменных, которая соответствует преобразованию, переводящему внешний круг в неподвижный круг радиуса $1+\varepsilon_3$, а внутренний — в неподвижный круг радиуса ε_3. Величина ε_3 предполагается достаточно малой, но сразу положить ее равной нулю нельзя, так как при $\varepsilon_3=0$ граница внутреннего круга отобразится в точку, в которой угол φ неопределен, в то время как граничные условия (1.6) существенно зависят от φ. В дальнейшем будет показано, что при переходе от уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям с новой независимой переменной r_1 величину ε_3 всюду можно будет положить равной нулю.

Требуемая замена переменных определяется соотношениями

$$r_1=\frac{r-R_1f_0(t,\varphi)}{R_1+\delta-R_1f_0(t,\varphi)}+\varepsilon_3,\qquad t_1=t\omega_0,\qquad \varphi_1=\varphi \tag{1.7}$$

Заметим, что преобразование (1.7) невырождено.

Введем также функции f_1, f_2, f_3 по формулам

$$f_1(t,\varphi)=(R_1+\delta-R_1f_0(t,\varphi))/\delta$$
$$f_2(t,\varphi)=f_1^{-1}(t,\varphi),\quad f_3(t,\varphi)=f_0(t,\varphi)f_2(t,\varphi) \tag{1.8}$$

С учетом (1.8) первую из формул (1.7), а также формулу для обратного преобразования можно привести к виду

$$r_1=r\delta^{-1}f_2(t,\varphi)-R_1\delta^{-1}f_3(t,\varphi)+\varepsilon_3$$
$$r=\delta(r_1-\varepsilon_3)f(t(t_1),\varphi(\varphi_1))+R_1f_0(t(t_1),\varphi(\varphi_1)) \tag{1.9}$$

На основании (1.5) получаем разложения

$$f_1=1-\varepsilon_1\xi\cos(\varphi-\varphi_0)+{}^1/{}_2\varepsilon_1^2k\xi^2\sin^2(\varphi-\varphi_0)+O(\varepsilon_1^3k^2)$$

$$f_2=1+\varepsilon_1\xi\cos(\varphi-\varphi_0)+\varepsilon_1^2\xi^2[\cos^2(\varphi-\varphi_0)-{}^1/_2k\sin^2(\varphi-\varphi_0)]+O(\varepsilon_1^3) \quad (1.10)$$

$$f_3=1+\varepsilon_1\xi\cos(\varphi-\varphi_0)(1+k)+\varepsilon_1^2\xi^2[\cos^2(\varphi-\varphi_0)-{}^1/_2k\sin^2(\varphi-\varphi_0)]+O(\varepsilon_1^3)$$

После замены переменных по формулам (1.7), (1.9) в уравнениях (1.4) получим систему уравнений в частных производных, коэффициенты которых аналитически зависят от малого параметра ε_1. Сами уравнения ввиду громоздкости здесь не приводятся. Как показывают формулы (1.6), краевые условия к этой системе уравнений также аналитически зависят от малых параметров ε_1, ε_2, поэтому решение системы уравнений будем искать в виде степенных рядов по малым параметрам ε_1, ε_2.

Возвращаясь к поставленной задаче, положим, что движение внутреннего круга Γ_2 описывается выражениями

$$x_1+iy_1=\delta\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_me^{imt_1}, \qquad \eta(t_1)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}b_me^{im\omega_2t_1} \quad (1.11)$$

где x_1, y_1 — координаты точки O_1 в системе координат O_2xy, a_m, b_m — некоторые комплексные числа, $\omega_2=T_0/T_1$, i — мнимая единица.

На основании формул (1.11) легко получаются соотношения

$$\xi\cos(\varphi-\varphi_0)=\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(a_me^{-i\varphi}+\bar{a}_{-m}e^{i\varphi})e^{imt_1} \quad (1.12)$$

$$\xi\sin(\varphi-\varphi_0)=\frac{i}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(a_me^{-i\varphi}-\bar{a}_{-m}e^{i\varphi})e^{imt_1}$$

Здесь и далее черта над буквой указывает на сопряженную величину.

Для выполнения краевых условий (1.6) с учетом (1.11), (1.12) будем строить решение в виде рядов

$$v_r=\omega_0\delta\sum_{\substack{l,m,m_2=-\infty\\ n,s=0}}^{\infty}v_{1,l,m_1,m_2,n,s}\varepsilon_1^n\varepsilon_2^s\exp\{i[l\varphi_1+(m_1+m_2\omega_2)t_1]\}$$

$$v_\varphi=\omega_0R_1\sum_{\substack{l,m,m_2=-\infty\\ n,s=0}}^{\infty}v_{2,l,m_1,m_2,n,s}\varepsilon_1^n\varepsilon_2^s\exp\{i[l\varphi_1+(m_1+m_2\omega_2)t_1]\} \quad (1.13)$$

$$p=\frac{\omega_0\mu}{k^2}\sum_{\substack{l,m_1,m_2=-\infty\\ n,s=0}}^{\infty}p_{1,l,m_1,m_2,n,s}\varepsilon_1^n\varepsilon_2^s\exp\{i[l\varphi_1+(m_1+m_2\omega_2)t_1]\}$$

Выражения для v_r, v_φ, p, определенные в виде формул (1.13), будут соответствовать классу периодических по времени решений. Для определения зависящих от r_1 коэффициентов разложений $v_{1,l,m_1,m_2,n,s}$, $v_{2,l,m_1,m_2,n,s}$, $p_{1,l,m_1,m_2,n,s}$ следует подставить разложения (1.13) в соответствующую систему уравнений с частными производными. После приведения подобных членов и приравнивания нулю коэффициентов при всех произведениях типа $\varepsilon_1^n\varepsilon_2^s\exp\{i[l\varphi_1+(m_1+m_2\omega_2)t_1]\}$ для всех l, m_1, m_2, n, s получается система обыкновенных дифференциальных уравнений с независимой переменной r_1. Разложение краевых условий (1.6) в ряды, аналогичные рядам (1.13), дает краевые условия для полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Заметим, что после перехода к обыкновенным дифференциальным уравнениям угловая переменная уже не будет входить ни в сами уравнения, ни в краевые условия, поэтому везде величину ε_3 можно положить равной нулю.

2. Легко видеть, что при $n=s=0$ краевым условиям и уравнениям будут удовлетворять решения

$$v_{1,\,l,\,m_1,\,m_2,\,0,\,0}=v_{2,\,l,\,m_1,\,m_2,\,0,\,0}=0,\quad p_{1,\,l,\,m_1,\,m_2,\,0,\,0}=\mathrm{const} \tag{2.1}$$

В случае $n=1$, $s=0$, после исключения $v_{2,\,l,\,m_1,\,m_2,\,1,0}$ имеем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2V}{dr_1^2}+\frac{3k}{kr_1+1}\frac{dV}{dr_1}+\left[\frac{k^2(1-l^2)}{(kr_1+1)^2}-i(m_1+\omega_2 m_2)\boldsymbol{Re}\right]V-k^{-2}\frac{dp}{dr_1}=0$$

$$\frac{d^3V}{dr_1^3}+\frac{4k}{kr_1+1}\frac{d^2V}{dr_1^2}+\left[\frac{k^2(1-l^2)}{(kr_1+1)^2}-i(m_1+\omega_2 m_2)\boldsymbol{Re}\right]\frac{dV}{dr_1}+$$

$$+\left[\frac{k^3(l^2-1)}{(kr_1+1)^3}-\frac{i(m_1+\omega_2 m_2)k\boldsymbol{Re}}{kr_1+1}\right]V-\frac{l^2}{(kr_1+1)^2}P=0 \tag{2.2}$$

где $\boldsymbol{Re}$ — число Рейнольдса, определяемое по формуле: $\boldsymbol{Re}=\omega_0\delta^2/\nu$, $V=v_{1,\,l,\,m_1,\,m_2,\,1,\,0}$, $P=p_{1,\,l,\,m_1,\,m_2,\,1,\,0}$. Краевые условия для системы (2.2) имеют вид

$$v_{1,\,1,\,m,\,0,\,1,\,0}\big|_{r_1=0}=im\bar{a}_{-m}/2,\quad v_{1,\,-1,\,m,\,0,\,1,\,0}=ima_m/2 \tag{2.3}$$

$$v_{1,\,l,\,m_1,\,m_2,\,1,\,0}\big|_{r_1=0}=0,\quad v_{1,\,l,\,m_1,\,m_2,\,1,\,0}\big|_{r_1=1}=0,\quad dv_{1,\,l,\,m_1,\,m_2,\,1,\,0}/dr_{r_1=0}=0$$

$$r_1=1$$

при $l\neq\pm1$ или $m_2\neq0$.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (2.2) легко приводится к нормальной форме

$$dX_{l,\,m_1,\,m_2}/dr_1+A_{l,\,m_1,\,m_2}X_{l,\,m_1,\,m_2}=0 \tag{2.4}$$

где компоненты вектора $X_{l,\,m_1,\,m_2}$ удовлетворяют соотношениям: $X_{1,\,l,\,m_1,\,m_2}=P$, $X_{2,\,l,\,m_1,\,m_2}=V$, $X_{3,\,l,\,m_1,\,m_2}=dV/dr_1$, $X_{4,\,l,\,m_1,\,m_2}=d^2V/dr_1^2$; $A_{l,\,m_1,\,m_2}$ — матрица вида

$$A_{l,\,m_1,\,m_2}=\begin{Vmatrix} 0 & k^2(k_2-k_1^2(1-l^2)) & -3k^2k_1 & -k^2\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ -\dfrac{l^2}{(lr_1+1)^2} & -k_1k_2+k_1^3(1-l^2) & -k_2+k_1^2(1-l^2) & 4k_1 \end{Vmatrix} \tag{2.5}$$

$$k_1=k/(kr_1+1),\ k_2=i(m_1+\omega_2 m_2)\boldsymbol{Re}$$

Если найти решение системы (2.4) с краевыми условиями

$$X_{2,\,l,\,m_1,\,m_2}\big|_{r_1=0}=1,\ X_{2,\,l,\,m_1,\,m_2}\big|_{r_1=1}=0,\ X_{3,\,l,\,m_1,\,m_2}\big|_{r_1=0}=X_{3,\,l,\,m_1,\,m_2}\big|_{r_1=1}=0 \tag{2.6}$$

то решение системы уравнений (2.2) с краевыми условиями (2.3) получается умножением найденного решения на $\frac{1}{2}im\bar{a}_{-m}$ или на $\frac{1}{2}ima_m$ в зависимости от l, m_1, m_2. Поэтому ненулевыми решениями системы (2.2) с краевыми условиями (2.3) будут лишь решения при $l=\pm1$, $m_2=0$. Решение системы (2.4) X_m с краевыми условиями (2.6) легко получить через компоненты фундаментальной матрицы $(Z_{i,\,j}(r_1))$ системы (2.4) в виде

$$X_m=Z_2+C_1Z_1+C_4Z_4 \tag{2.7}$$

где Z_k — k-ый столбец фундаментальной матрицы $(Z_{i,\,j})$:

$$C_1=(Z_{2,\,4}(1)Z_{3,\,2}(1)-Z_{2,\,2}(1)Z_{3,\,4}(1))/\Delta_c$$

$$C_4=(Z_{2,\,2}(1)Z_{3,\,1}(1)-Z_{3,\,2}(1)Z_{2,\,1}(1))/\Delta_c \tag{2.8}$$

$$\Delta_c=Z_{2,\,1}(1)Z_{3,\,4}(1)-Z_{3,\,1}(1)Z_{2,\,4}(1)$$

r_1	Re $X_{1,m}$	Im $X_{1,m}$	Re $X_{2,m}$	Im $X_{2,m}$	Re $X_{5,m}$	Im $X_{5,m}$	Re $X_{4,m}$	Im $X_{4,m}$
0	12,1208	0,6035	1,0000	0,00000	0,0100	0,0000	1,0000	0,0000
0,1	12,1207	0,6035	0,9717	−0,00017	−0,5351	−0,0025	0,8995	−0,0014
0,2	12,1207	0,6035	0,8952	−0,00039	−0,9587	−0,0016	0,7991	−0,0024
0,3	12,1207	0,6035	0,7826	−0,00046	−1,2609	0,0004	0,6989	−0,0029
0,4	12,1207	0,6035	0,6462	−0,00031	−1,4421	0,0023	0,5987	−0,0031
0,5	12,1206	0,6035	0,4981	−0,00002	−1,5024	0,0031	0,4987	−0,0031
0,6	12,1207	0,6034	0,3502	0,00027	−1,4422	0,0024	0,3987	−0,0027
0,7	12,1207	0,6034	0,2146	0,00043	−1,2616	0,0005	0,2989	−0,0022
0,8	12,1207	0,6034	0,1032	0,00037	−0,9608	−0,0015	0,1991	−0,0015
0,9	12,1207	0,6034	0,0277	0,00016	−0,5402	−0,0024	0,0995	−0,0008
1	12,1208	0,6034	0,0000	0,00000	0,0000	0,0000	0,0000	−0,0000

Введем обозначения

$$v_{1,n,s}=\sum_{l,m_1,m_2=-\infty}^{\infty} v_{1,l,m_1,m_2,n,s}\exp\{i[l\varphi_1+(m_1+m_2\omega_2)t_1]\}$$

$$v_{2,n,s}=\sum_{l,m_1,m_2=-\infty}^{\infty} v_{2,l,m_1,m_2,n,s}\exp\{i[l\varphi_1+(m_1+m_2\omega_2)t_1]\} \tag{2.9}$$

$$p_{1,n,s}=\sum_{l,m_1,m_2=-\infty}^{\infty} p_{1,l,m_1,m_2,n,s}\exp\{i[l\varphi_1+(m_1+m_2\omega_2)t_1]\}$$

Тогда в соответствии с формулами (2.3), (2.7) получаем

$$p_{1,1,0}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{im}{2}X_{1,m}(\bar a_{-m}e^{i\varphi_1}+a_m e^{-i\varphi_1})e^{imt_1}$$

$$v_{1,1,0}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{im}{2}X_{2,m}(\bar a_{-m}e^{i\varphi_1}+a_m e^{-i\varphi_1})e^{imt_1} \tag{2.10}$$

$$v_{2,1,0}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{m}{2}X_{5,m}(a_m e^{-i\varphi_1}-\bar a_{-m}e^{i\varphi_1})e^{imt_1}$$

$$X_{5,m}=(kr_1+1)X_{3,m}+kX_{2,m}$$

Фундаментальная матрица $(Z_{i,j})$ в десяти равноотстоящих точках на отрезке [0, 1] была получена просчетом на ЭВМ по методу Рунге — Кутта четвертого порядка. Результаты счета для $X_{n,m}=ReX_{n,m}+i\,\mathrm{Im}\,X_{n,m}$, $k=0{,}01$, $\boldsymbol{Re}=0$; 1, $m=5$, $\omega_2=0$, 1 приведены в табл. 1.

Поскольку величина k в реальных приборах не превышает 0,01, то, опуская в системе уравнений (2.2) члены, содержащие множителем k в первой и в более высоких степенях, можно получить приближенное уравнение

$$d^4X_{2,m}/dr_1^4-im\boldsymbol{Re}(d^2X_{2,m}/dr_1^2)=0 \tag{2.11}$$

которое имеет решение

$$X_{2,m}=\frac{1}{\Delta}\left[\mathrm{sh}\frac{\lambda}{2}+\lambda\,\mathrm{ch}\frac{\lambda}{2}(r_1-1)+\mathrm{sh}\,\lambda\left(\frac{1}{2}-r_1\right)\right] \tag{2.12}$$

$$\lambda=\sqrt{m\,\mathrm{Re}}\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right),\qquad \Delta=2\,\mathrm{sh}\frac{\lambda}{2}-\lambda\,\mathrm{ch}\frac{\lambda}{2}$$

Таблица 2

r_1	$\operatorname{Re} X_{1,m}$	$\operatorname{Im} X_{1,m}$	$\operatorname{Re} X_{2,m}$	$\operatorname{Im} X_{2,m}$	$\operatorname{Re} X_{5,m}$	$\operatorname{Im} X_{5,m}$	$\operatorname{Re} X_{4,m}$	$\operatorname{Im} X_{4,m}$
0	12,0003	0,6000	1,0000	0,00000	0,0000	−0,00000	1,0000	−0,0000
0,1	12,0003	0,6000	0,9720	−0,00016	−0,5401	−0,00248	0,9002	−0,0024
0,2	12,0003	0,6000	0,8960	−0,00038	−0,9601	−0,00160	0,8001	−0,0033
0,3	12,0003	0,6000	0,7840	−0,00044	−1,2600	0,00052	0,7001	−0,0037
0,4	12,0003	0,6000	0,6480	−0,00029	−1,4399	0,00240	0,6001	−0,0038
0,5	12,0003	0,6000	0,5000	0,00000	−1,4998	0,00312	0,5001	−0,0037
0,6	12,0003	0,6000	0,3520	0,00029	−1,4399	0,00240	0,4000	−0,0032
0,7	12,0003	0,6000	0,2160	0,00044	−1,2600	0,00052	0,3000	−0,0026
0,8	12,0003	0,6000	0,1040	0,00038	−0,9601	−0,00160	0,2000	−0,0018
0,9	12,0003	0,6000	0,0280	0,00016	−0,5401	−0,00247	0,1000	−0,0009
1	12,0003	0,6000	0,0000	0,00000	0,0000	0,00000	0,0000	0,0000

Из последнего уравнения системы (2.2) для малых k получаем

$$X_{1,m}=-\lambda^3\Delta^{-1}\operatorname{ch}{}^1/_2\lambda \tag{2.13}$$

а по первой из формул (2.12) находим

$$X_{3,m}=\frac{\lambda}{\Delta}\left[\operatorname{ch}\frac{\lambda}{2}-\operatorname{ch}\lambda\left(\frac{1}{2}-r_1\right)\right] \tag{2.14}$$

Результаты счета на ЭВМ при малых k (табл. 1) хорошо согласуются с результатами, полученными по формуле (2.12)—(2.14). Для сравнения в табл. 2 приведены значения $X_{1,m}$, $X_{2,m}$, $X_{5,m}$, вычисленные на основании соотношений (2.12)—(2.14). Разложения величин $X_{1,m}$, $X_{2,m}$, $X_{5,m}$ в степенные ряды относительно λ имеют вид

$$\begin{gathered}X_{1,m}=12(1+\lambda^2/10+\ldots)\\ X_{2,m}=1-r_1^2\left(3+\frac{\lambda^2}{20}\right)+r_1^3\left(2+\frac{\lambda^2}{5}\right)-r_1^4\frac{\lambda^2}{4}+r_1^5\frac{\lambda^2}{10}+\ldots\\ X_{5,m}=-r_1\left(6+\frac{\lambda^2}{10}\right)+r_1^2\left(6+\frac{3}{5}\lambda^2\right)-r_1^3\lambda^2+r_1^4\frac{\lambda^2}{2}+\ldots\end{gathered} \tag{2.15}$$

На основании (2.10), (2.15) можно оценить влияние инерционных членов в уравнениях Навье — Стокса (1.5) на величины скоростей и давлений. Поскольку $\lambda^2=im\boldsymbol{Re}$, а присутствие инерционных членов в системе (1.5) соответствует наличию величины $m\boldsymbol{Re}$ в выражениях (2.15), то соотношения (2.15), а также данные табл. 1 позволяют заключить, что инерционные члены существенно влияют на величины скоростей и давлений уже при $m\boldsymbol{Re}$, сравнимых с единицей.

Возвращаясь к определению коэффициентов C_1, C_4 заметим, что существование и единственность решения системы (2.4) зависит от значения величины Δ_c. Если $\Delta_c\neq0$, то система уравнений (2.4) с краевыми условиями (2.3) всегда имеет единственное решение. Для малых k получено решение в виде формул (2.12), которое имеет смысл, если $\Delta(\lambda)\neq0$ при $\lambda\neq0$. По последней формуле (2.12) получаем, что условие $\Delta(\lambda)=0$ эквивалентно соотношению $\operatorname{tg}\lambda/2=\lambda/2$, которое на биссектрисах первого и четвертого квадрантов выполняется лишь при $\lambda=0$, что и доказывает существование и единственность решения (2.12).

3. Для значений $n=0$, $s=1$ система уравнений (2.2) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2V_1}{dr_1^2}+\frac{k}{kr_1+1}\frac{dV_1}{dr_1}-\left[\frac{k^2}{(kr_1+1)^2}+i\omega_2 m\boldsymbol{Re}\right]V_1=0 \tag{3.1}$$

$V_1=v_{2,0,0,m,1,0}$, с краевыми условиями $v_{2,0,0,m,0,1}\big|_{r_1=0}=b_m$, $v_{2,0,0,m,0,1}\big|_{r_1=1}=$

$=0$, причем справедливы соотношения $p_{1,0,0,m,1,0}=\text{const}$, $v_{1,l,m_1,m_2,0,1}=0$, $v_{2,l,m_1,m_2,0,1}=0$ при $l\neq0$ или $m_1\neq0$.

Решение уравнения (3.1) можно построить в виде комбинаций функций Бесселя комплексного аргумента. Однако, как и ранее, для малых k можно получить решение в виде

$$v_{2,0,0,m,0,1}=b_m\frac{\exp[\lambda_1(2-r_1)]-\exp(\lambda_1 r_1)}{\exp(2\lambda_1)-1} \tag{3.2}$$

$$\lambda_1=\sqrt{m\omega_2\boldsymbol{Re}}(\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2)$$

В табл. 1 приведены значения функции $X_{4,m}$, полученные решением на ЭВМ уравнения (3.1) с краевыми условиями $X_{4,m}|_{r_1=0}=1$, $X_{4,m}|_{r_1=1}=0$. Для сравнения в табл. 2 приведены значения функции

$$X_{4,m}=\{\exp[\lambda_1(2-r_1)\}-\exp(\lambda_1 r_1)]/[\exp(2\lambda_1)-1] \tag{3.3}$$

Окончательно имеем

$$v_{2,0,1}=\sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m X_{4,m}\exp(im\omega_2 t_1) \tag{3.4}$$

На основании равенства (3.3) имеем разложение

$$X_{4,m}(r_1)=(1-r_1)[1+{}^1/_6\lambda_1^2(r_1-2)+\ldots] \tag{3.5}$$

4. Аналогично можно находить и коэффициенты разложений (1.14) в случае $n+s=2$. Однако оказывается, что для определения компонент результирующей сил F_x, F_y реакции жидкости достаточно будет уже полученных коэффициентов разложений при $n+s=1$, а для величины момента M этих сил потребуется еще решение, когда $n=2$, $s=0$, $l=0$, $m_2=0$. В этом случае коэффициенты разложений (1.14) получаются в виде

$$\begin{aligned}
v_{1,0,m,0,2,0}&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{im_1}{4}(\bar{a}_{-m_1}a_{m-m_1}+a_{m_1}\bar{a}_{m_1-m})(1-r_1)X_{3,m_1}\\
v_{2,0,m,0,2,0}&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(a_{m_1}\bar{a}_{m_1-m}-\bar{a}_{-m_1}a_{m-m_1})X_{7,m,m_1}\\
p_{1,0,m,0,2,0}&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}m_1(\bar{a}_{-m_1}a_{m-m_1}+a_{m_1}\bar{a}_{m_1-m})X_{8,m,m_1}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где X_{7,m,m_1}, X_{8,m,m_1} получены интегрированием по методу Рунге — Кутта соответствующих дифференциальных уравнений. Значения функций X_{7,m,m_1}, X_{8,m,m_1} при $m=10$, $m_1=5$, $\boldsymbol{Re}=0{,}1$, $k=0{,}01$, $X_{n,m}=\operatorname{Re}X_{n,m}+$ $+i\operatorname{Im}X_{n,m}$ представлены в табл. 3. Для получения среднего по времени момента сил реакции жидкости потребуется еще выражение для $v_{2,0,0,0,2,0}$. Соответствующее приближенное уравнение для малых k имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{d^2v_{2,0,0,0,2,0}}{dr_1^2}=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}m_1(a_{m_1}\bar{a}_{m_1}-a_{-m_1}\bar{a}_{-m_1})\Biggl[\frac{im_1\boldsymbol{Re}}{4}\Biggl(\frac{dX_{5,m_1}}{dr_1}(1-r_1)+\\
+X_{2,m_1}\frac{dX_{5,-m_1}}{dr_1}+X_{5,-m_1}X_{5,m_1}\Biggr)-\frac{1}{2}\frac{d^2X_{5,m_1}}{dr_1^2}\Biggr]
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Интегрирование уравнения (4.2) с нулевыми краевыми условиями,

Таблица 3

r_1	$\operatorname{Re} X_{7,\,m,\,m_1}$	$\operatorname{Im} X_{7,\,m,\,m_1}$	$\operatorname{Re} X_{8,\,m,\,m_1}$	$\operatorname{Im} X_{8,\,m,\,m_1}$
0	0,00000	0,00000	0,000000	0,000000
0,1	0,27051	−0,03534	−0,000016	0,000042
0,2	0,48018	−0,05875	−0,000093	0,000078
0,3	0,62946	−0,07145	−0,000255	0,000108
0,4	0,71868	−0,07522	−0,000491	0,000133
0,5	0,74804	−0,07189	−0,000768	0,000152
0,6	0,71766	−0,06311	−0,001044	0,000165
0,7	0,62763	−0,05026	−0,001277	0,000172
0,8	0,47799	−0,03451	−0,001434	0,000172
0,9	0,26877	−0,01716	−0,001508	0,000165
1	0,00000	0,0000	−0,001521	0,000153

что следует из разложений (1.7), приводит к соотношению

$$v_{2,\,0,\,0,\,0,\,2,\,0} = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} m_1 (a_{m_1}\bar{a}_{m_1} - a_{-m_1}\bar{a}_{-m_1}) \left[\frac{i m_1 Re}{4} \left(X_{2,\,m_1}(1-r_1) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\int_0^{r_1} X_{2,m_1} dr_1 + \int_0^{r_1} X_{2,m_1} X_{5,m_1} dr_1 \right) - \frac{1}{2} X_{5,\,m_1} + C_{1,\,m_1} r_1 + C^{\circ}_{2,\,m_1} \right] \quad (4.3)$$

где постоянные $C_{1,\,m_1}, C_{2,\,m_1}$ определяются в соответствии с краевыми условиями

$$v_{2,\,0,\,0,\,0,\,2,\,0}\big|_{r_1=0} = v_{2,\,0,\,0,\,0,\,2,\,0}\big|_{r_1=0} = 0 \qquad (4.4)$$

Окончательно на основании формул (2.10), (2.12), (4.1), (4.3) при малых k можно получить выражение, которое понадобится для дальнейшего анализа:

$$4\frac{dX_{7,0,m_1}}{dr_1}\bigg|_{r_1=0} + \frac{dX_{5,m_1}}{dr_1}\bigg|_{r_1=0} = \frac{\lambda_{m_1}^2 (2\operatorname{sh} {}^1/_2\lambda_{m_1} - {}^3/_2\lambda_{m_1} \operatorname{ch} {}^1/_2\lambda_{m_1})}{2\operatorname{sh} {}^1/_2\lambda_{m_1} - \lambda_{m_1}\operatorname{ch} {}^1/_2\lambda_{m_1}} \qquad (4.5)$$

5. В соответствии с обозначениями на фиг. 1 выражения для компонент результирующей сил реакции жидкости и момента M этих сил имеют вид

$$F_x = l_1 \int_{\Gamma_1} p_{nx}\, ds, \qquad F_y = l_1 \int_{\Gamma_1} p_{ny}\, ds, \qquad M = l_1 R \int_{\Gamma_1} p_{n\tau}\, ds \qquad (5.1)$$

Здесь l_1 — длина поплавка, p_{nx}, p_{ny}, $p_{n\tau}$ — проекции напряжения, действующего на отрезке ds контура Γ_1 на соответствующее направление x, y, τ (τ — касательное направление к контуру Γ_1), $ds = R[1+\varepsilon_1 k\xi\cos(\varphi-\varphi_0) + O(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)]\,d\varphi$.

Нетрудно показать, что p_{nx}, p_{ny}, $p_{n\tau}$ связаны с компонентами тензора напряжений в полярной системе координат соотношениями

$$\begin{aligned} p_{nx} &= p^{rr}\cos\varphi - p^{r\varphi}\sin\varphi + o(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2) \\ p_{ny} &= p^{rr}\sin\varphi + p^{r\varphi}\cos\varphi + o(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2) \\ p_{n\tau} &= p^{r\varphi} + \varepsilon_1 k\xi\sin(\varphi-\varphi_0)\,(p^{\varphi\varphi} - p^{rr}) + O(\varepsilon_1^2,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_2^2) \end{aligned} \qquad (5.2)$$

Пользуясь известными выражениями для компонент тензора напряжений в полярной системе координат и формулами (5.1), (5.2), (2.10), (2.12), получаем для $k \ll 1$ соотношения

$$F_x = -2\pi\mu\omega_0 l_1 R k^{-2} \left[\varepsilon_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{imt_1} \frac{im}{4} (\bar{a}_{-m} + a_m) X_{1,m}(0) + o(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2) \right]$$

$$F_y=2\pi\mu\omega_0 l_1 Rk^{-2}\left[\varepsilon_1\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{imt_1}\frac{m}{4}(\bar{a}_{-m}-a_m)X_{1,m}(0)+o(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\right]$$

$$M=2\pi l_1 R^2\mu\omega_0 k^{-1}\left[\varepsilon_1^2\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\frac{m_1}{4}(a_{m_1}\bar{a}_{m_1-m}-\bar{a}_{-m_1}a_{m-m_1})\left(4\frac{dX_{7,m,m_1}}{dr_1}\bigg|_{r_1=0}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{dX_{5,m_1}}{dr_1}\bigg|_{r_1=0}\right)e^{imt_1}-\varepsilon_2\sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m\lambda_{1,m}\operatorname{cth}\lambda_{1,m}+o(\varepsilon_1^2,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_2^2)\right] \tag{5.3}$$

Как показывает последняя формула (5.3), величина M складывается из момента сил реакции жидкости M_1, везникающего от поступательных перемещений поплавка, и момента M_2, появляющегося вследствие вращательных перемещений поплавка.

На основании выражения (4.5) и последней формулы (5.3) можно получить часто используемую среднюю величину $\langle M_1\rangle$ в виде

$$\langle M_1\rangle=\pi l_1 R^2 k^{-1}\mu\omega_0\left[\varepsilon_1^2\sum_{m=-\infty} m|a_m|^2 \mathbf{Re}\left(\lambda_m^2\frac{2\operatorname{sh}{}^1/_2\lambda_m-{}^3/_2\lambda_m\operatorname{ch}{}^1/_2\lambda_m}{2\operatorname{sh}{}^1/_2\lambda_m-\lambda_m\operatorname{ch}{}^1/_2\lambda_m}\right)+o(\varepsilon_1^2)|\right] \tag{5.4}$$

Разложение этого выражения и второй суммы в последней формуле (5.5) по степеням $\mathbf{Re}$ приводит к выражениям

$$\langle M_1\rangle=\pi l_1 R^2 k^{-1}\mu\omega_0\left[\varepsilon_1^2\sum_{m=-\infty}^{\infty} m|a_m|^2\left(1+\frac{(m\mathbf{Re})^2}{8400}+\ldots\right)+o(\varepsilon_1^2)\right] \tag{5.5}$$

$$M_2=2\pi l_1 R^2 k^{-1}\mu\omega_0\left[\varepsilon_2\sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m\left(1+\frac{im\omega_2\mathbf{Re}}{3}+\ldots\right)e^{im\omega_2 t}+o(\varepsilon_2)\right]$$

Окончательно, на основании формул (5.3), (2.15), (5.4), (5.5) заключаем, что вклад инерционных членов в выражения для F_x, F_y, M_2 может превышать 10% уже при $m\mathbf{Re}\sim 1$, тогда как поправка от инерционных членов к величине среднего момента $\langle M_1\rangle$ даже при $m\mathbf{Re}\sim 10$ не будет превышать 2%.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коровчинский М. В.* Теоретические основы подшипника скольжения. М.: Машгиз, 1959. 403 с.
2. *Городецкий О. М.* Исследование возмущающих моментов сил вязкого трения в подвесе поплавкового гироскопа.– Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1, с. 10–16.
3. *Лейбензон Л. С.* Границы приложимости гидродинамической теории смазки.– В кн.: Гидродинамическая теория смазки. М.– Л.: Гостехиздат, 1934, с. 535–562.
4. *Слезкин Н. А., Тарг С. М.* К вопросу об уточнении решений уравнений Рейнольдса.– Докл. АН СССР, 1946, т. 54, № 2, с. 121–124.
5. *Тарг С. М.* Основные задачи теории ламинарных течений. М.– Л.: Гостехиздат, 1951. 420 с.
6. *Никитин Е. А., Балашова А. А.* Проектирование дифференцирующих и интегрирующих гироскопов и акселерометров. М.: Машиностроение, 1969. 213 с.
7. *Полецкий А. Т.* Интегрирование дифференциальных уравнений неустановившегося течения смазки и определение реакции смазочного слоя.– Тр. III Всес. конф. по трению и износу в машинах. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1961, с. 115–121.
8. *Бурков М. С.* Вибрация валов подшипников скольжения высокооборотных машин.– В кн.: Развитие гидродинамической теории смазки подшипников быстроходных машин. М.: Изд-во АН СССР, 1962, с. 5–128.
9. *Иванова Н. Г.* Влияние сил инерции смазки на характеристики подшипников

скольжения.— В кн.: Развитие гидродинамической теории смазки подшипников быстроходных машин. М.: Изд-во АН СССР, 1962, с. 174–206.
10. *Андрейченко К. П.* Устойчивость цилиндрического гидродинамического подвеса.— Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 6, с. 32–39.
11. *Никитин А. К.* О неустановившемся движении вязкой несжимаемой жидкости в подшипнике.— Изв. вузов. Математика, 1959, № 3, с. 186–199.
12. *Заволженский М. В.* Колебания шипа в подшипнике.— Изв. вузов. Математика, 1968, № 12, с. 35–44.
13. *Коган Г. М.* Плоская нелинейная задача о поступательном движении вала в подшипнике.— В кн.: Математика и некоторые ее приложения в теоретическом и прикладном естествознании. Рост. н/Д. пед. ин-т, 1968, с. 63–73.
14. *Коган Г. М.* О неустановившемся движении вала в подшипнике.— В кн.: Математика и некоторые ее приложения в теоретическом и прикладном естествознании. Рост. н/Д. пед. ин-т, 1972, с. 97—108.
15. *Журавлев В. Ф.* О движении свободного гироскопа при наличии внутренних возмущений.— Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 5, с. 14–21.

Гродно, Москва

Поступила в редакцию
14.IV.1980