

УДК 539.214; 539.374

**ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ
К РАСЧЕТУ ЗАПРЕССОВАННЫХ ШАЙБ НА КРУЧЕНИЕ**

РЖАНИЦЫН А. Р.

Определяются предельные моменты, закручивающие запрессованные в пластинку шайбы квадратной, треугольной, шестиугольной и прямоугольной формы. При этом используется разработанная автором теория сосредоточенных пластических деформаций вдоль линий минимального сопротивления.

1. Приближенные решения задач теории пластичности методом сосредоточенных деформаций или кривизн давно применяются для практических расчетов пластинок и оболочек. В [1] получено уравнение экстремалей задачи о минимуме разрушающей нагрузки, рассчитанной по методу сосредоточенных деформаций для плоского напряженного состояния при условиях текучести Губера — Генки — Мизеса. Энергия внутренних сил пластинки единичной толщины была найдена в виде

$$-T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \int \sqrt{4E^2 + \Gamma^2} ds \quad (1.1)$$

где E — сосредоточенная деформация удлинения, Γ — сосредоточенная деформация сдвига, σ_T — предел текучести материала; интегрирование ведется по всей длине линии сосредоточенных деформаций.

Далее рассматривался поворот одной части жесткой пластинки относительно другой вокруг мгновенного центра вращения O на малый угол ϕ (фиг. 1), $R\rho = M$. Сосредоточенные деформации при этом равны $E = \phi\rho \cos \psi$, $\Gamma = \phi\rho \sin \psi$, где $\rho = \rho(\theta)$ — уравнение линии сосредоточенных деформаций в полярных координатах θ, ρ с центром в точке O , ψ — угол между касательной к линии $\rho(\theta)$ и радиус-вектором ρ в точке касания.

Подставляя в (1.1) соотношения $\cos \psi = \rho' / (\rho^2 + \rho'^2)^{1/2}$, $\sin \psi = \rho / (\rho^2 + \rho'^2)^{1/2}$, $ds = d\theta (\rho^2 + \rho'^2)^{1/2}$, получим выражение энергии внутренних сил в форме

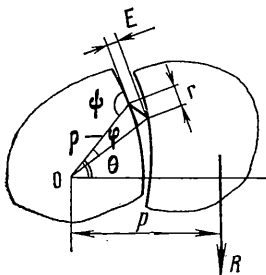
$$-T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \int \rho \sqrt{4\rho'^2 + \rho^2} d\theta \quad (1.2)$$

Минимум функционала (1.2) находится из уравнения Эйлера, которое в данном случае принимает вид $\rho^2 + 6\rho'^2 - 2\rho\rho'' = 0$ и имеет решение

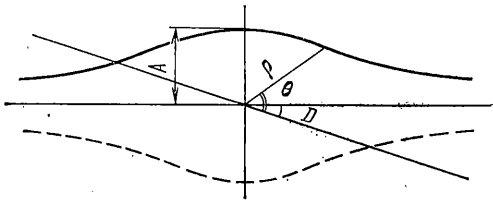
$$\rho = A / \sqrt{\sin(\theta - D)} \quad (1.3)$$

где A и D — произвольные постоянные.

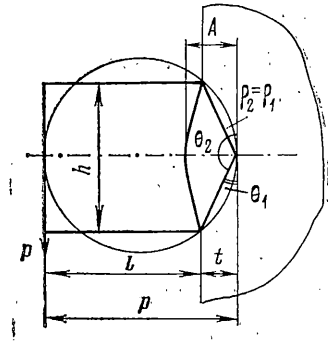
Вид экстремали (1.3) показан на фиг. 2. Ось $\theta = D$ — асимптота экстремали. Предельный момент, уравновешивающий данную деформацию, равен $M = (\sigma_T / \sqrt{3}) [\text{ctg}(\theta_1 - D) - \text{ctg}(\theta_2 - D)]$, где θ_1 и θ_2 — координатные углы,



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

соответствующие выходам линии сосредоточенных деформаций на кромки пластинки.

В [4] дано решение задачи о несущей способности короткой консоли, в которой линия сосредоточенных деформаций проходит через точки заделки кромок пластинки (фиг. 3). Согласно этому решению, уточняющему другие известные решения той же задачи, предельная зависимость момента M от поперечной силы Q выражается формулой $4M^2/h^2 + Q^2 = \sigma_T^2 h^2/3$.

2. Решим тем же методом задачу о сопротивлении кручению жесткой шайбы, запрессованной в металлический лист единичной толщины. Будем считать, что шайба имеет по крайней мере две оси симметрии, так что поворот ее происходит вокруг геометрического центра.

Рассмотрим сначала квадратную шайбу (фиг. 4). Линии сосредоточенных деформаций будут иметь асимптотами оси симметрии квадрата, не проходящие через его вершины.

По линиям $1-1'$, $2-2'$, $3-3'$ и $4-4'$ проводим мысленно разрезы, но, так как части плоскости $1'122'$, $2'233'$, $3'344'$ и $4'411'$ поворачиваются вокруг центра шайбы на один и тот же угол, деформации по линиям разреза отсутствуют и всю внешнюю часть плоскости можно рассматривать как одно жесткое целое.

При помощи простых преобразований находим для одной стороны квадрата

$$\begin{aligned} \rho_1 &= A/\sqrt{\sin \theta_1}, \quad A = \rho_1 \sqrt{\sin \theta_1}, \\ M_1 &= \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} A^2 \operatorname{ctg} \theta_1 = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \rho_1 \cos \theta_1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Поскольку $\theta_1 = 45^\circ$, то $\rho_1 = a/\sqrt{2}$, $A = 0,5946a$, $M_1 = 0,4082\sigma_T a^2$, а для всех сторон квадрата $M = 4M_1 = 1,633\sigma_T a^2$.

Для сравнения примем деформацию в виде сдвига по кругу, описанному вокруг шайбы (фиг. 5). Тогда скручивающий момент будет равен $M = 2\pi r^2 \sigma_T / \sqrt{3} = 1,8138$.

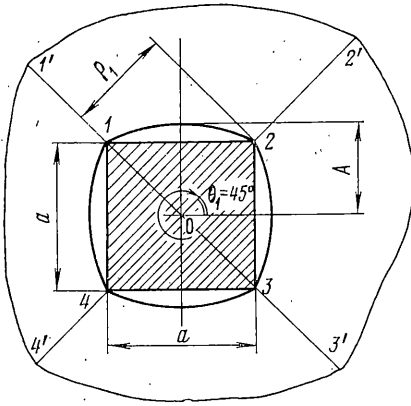
Аналогично квадратной шайбе θ_1 для шайбы в виде равностороннего треугольника со стороной a получаем: $\rho_1 = a/\sqrt{3}$, $A = 0,4082a$, $M_1 = \sigma_T a^2/3$, $M = 3M_1 = \sigma_T a^2$.

Для шайбы в виде правильного шестиугольника со стороной a имеем: $\theta_1 = 60^\circ$, $\rho_1 = a$, $A = 0,9306a$, $M = 6M_1 = 2\sqrt{3}\sigma_T a^2 = 3,464\sigma_T a^2$.

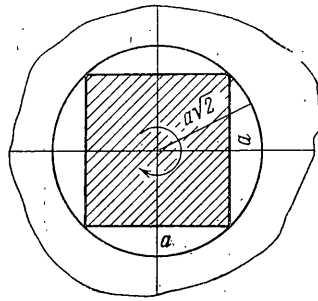
Для шайбы, имеющей форму прямоугольника со сторонами a и b , аналогично формуле (2.1) получаем:

для длинной стороны

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= \frac{1}{4}(a^2 + b^2), \quad \cos \theta_1 = (a^2 + b^2)^{-1/2} \\ M_1 &= (\sigma_T/2\sqrt{3}) a (a^2 + b^2)^{1/2} \end{aligned}$$



Фиг. 4



Фиг. 5

для короткой стороны

$$\rho_1^2 = 1/4(a^2 + b^2), \quad \cos \theta_1 = b(a^2 + b^2)^{-1/2}$$

$$M_2 = (\sigma_T / 2\sqrt{3}) b(a^2 + b^2)^{1/2}$$

Общий предельный момент равен

$$M = 2M_1 + 2M_2 = (\sigma_T / 2\sqrt{3}) (a + b) (a^2 + b^2)^{1/2}$$

При $b \rightarrow 0$, т. е. для очень тонкого прямоугольника, $M = \sigma_T a^2 / \sqrt{3} = 0,577 \sigma_T a^2$. В последнем случае линии сосредоточенных деформаций идут по длинным сторонам шайбы без сдвигов.

3. Рассмотрим сосредоточенные деформации при условиях текучести Треска — Сен-Венана. В материалах, подчиняющихся этим условиям, текучесть начинается после достижения главными касательными напряжениями предельной величины τ_T . В жесткопластическом теле напряжения τ_T производят работу только в тех точках, где происходят сдвиги, причем величина этой работы равна

$$T = -\tau_T \int \gamma dO \quad (3.1)$$

где γ — главный сдвиг, происходящий на одной из площадок, наклоненных к осям главных деформаций под углом 45° . Интегрирование в формуле (3.1) производится по всему объему тела O .

В случае сосредоточенной деформации пластинки вдоль некоторой линии происходит сосредоточенный сдвиг Γ , а поперек этой линии — сосредоточенное удлинение E . Кроме того, ввиду отсутствия деформаций объема на этой линии по толщине пластинки происходит сосредоточенное укорочение $-E$. В направлении линии сосредоточенных деформаций удлинение равно нулю.

Из круга Мора для сосредоточенных деформаций (фиг. 6) определим главные удлинения в плоскости пластинки

$$E_1 = 0,5(E + \sqrt{E^2 + \Gamma^2}), \quad E_2 = 0,5(E - \sqrt{E^2 + \Gamma^2})$$

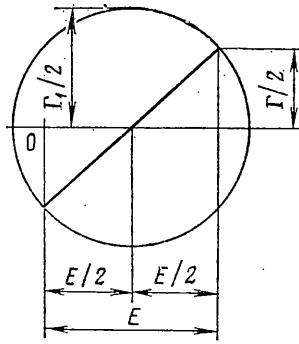
и главный сдвиг $\Gamma_1 = \sqrt{E^2 + \Gamma^2}$.

Другой главный сдвиг происходит под углом 45° к направлениям удлинений E_1 и $E_3 = -E$:

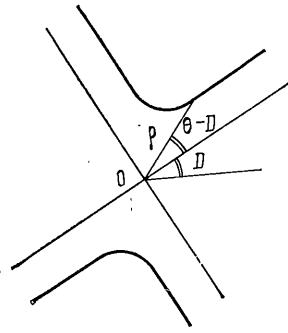
$$\Gamma_3 = E_1 - E_3 = 1,5E + 0,5\sqrt{E^2 + \Gamma^2} \quad (3.2)$$

Работа внутренних сил на линии сосредоточенных деформаций равна

$$T = -\tau_T \int \delta \Gamma_{\max} ds$$



Фиг. 6



Фиг. 7

где δ — толщина пластинки, ds — элемент длины линии сосредоточенных деформаций. В зависимости от соотношения E/Γ максимальным сдвигом может быть Γ_1 или Γ_3 .

Положим, что $\Gamma_1 > \Gamma_3$. Это будет при $(E^2 + \Gamma^2)^{1/2} > 1,5E + 0,5(E^2 + \Gamma^2)^{1/2}$, $E^2 + \Gamma^2 > 9E^2$, $E < \Gamma/\sqrt{8} = 0,3536\Gamma$.

При $E > 0,3536\Gamma$ максимальным сдвигом будет не Γ_1 , а Γ_3 .

Для определения величины τ_T рассмотрим сосредоточенную деформацию E без сдвига. Главный сдвиг, согласно (3.2), здесь будет равен $\Gamma_3 = 2E$. Работа внутренних сил на единицу длины линии сосредоточенных деформаций равна $T = -\tau_T \delta 2E$, а работа внешних сил — $V = \sigma_T \delta 2E$, где σ_T — предельное растягивающее напряжение. Приравнявая $V + T$ нулю, получаем $\tau_T = \sigma_T/2$.

При взаимном повороте одной части пластинки относительно другой на малый угол φ (фиг. 1) сосредоточенные деформации удлинения и сдвига будут определяться выражениями

$$E = -\varphi \rho \rho' / \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}, \quad \Gamma = \varphi \rho^2 / \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \quad (3.3)$$

Положим сначала, что $E < 0,3536\Gamma$, тогда

$$\Gamma_{\max} = \Gamma_1 = \varphi \sqrt{(\rho^2 \rho'^2 + \rho^4) / (\rho^2 + \rho'^2)} = \varphi \rho$$

$$T = -0,5\sigma_T \delta \int \Gamma_1 ds = -0,5\sigma_T \delta \varphi \int \rho \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta$$

Работа внешнего момента M равна $M\varphi$, приравняв ее работе внутренних сил с обратным знаком, получаем

$$M = 0,5\sigma_T \delta \int \rho \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta \quad (3.4)$$

Для определения экстремалей сосредоточенных деформаций составляем для функционала (3.4) уравнение Лагранжа — Эйлера, которое будет иметь вид

$$2\rho^2 + 3\rho'^2 - \rho\rho'' = 0 \quad (3.5)$$

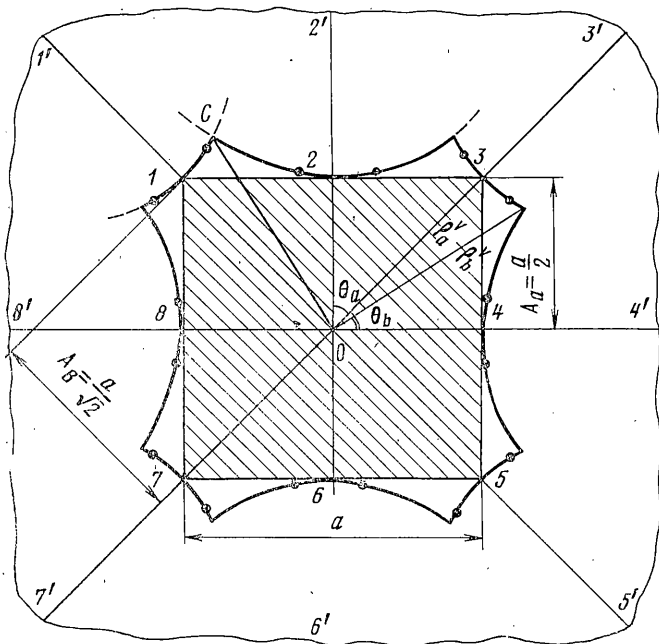
Общее решение уравнения (3.5) находится при помощи подстановки $\rho = u^{-0,5}$ и определяется выражением

$$\rho = A/\sqrt{\sin(2\theta - D)} \quad (3.6)$$

где A и D — произвольные постоянные решения. Вид экстремали (3.6) показан на фиг. 7.

Величину предельного момента M получим после подстановки общего решения (3.6) в функционал (3.4). Интегрируя, будем иметь

$$M = 0,25A^2 \sigma_T \delta [\text{ctg}(2\theta_1 - D) - \text{ctg}(2\theta_2 - D)] \quad (3.7)$$



Фиг. 8

Пределы применимости этой формулы определяются точками на экстремали (3.6), в которых отношение E/Γ равно 0,3536. Подставив в выражения (3.3) величину ρ (3.6), после некоторых преобразований получим

$$E = A\varphi \frac{\cos(2\theta - D)}{\sqrt{\sin(2\theta - D)}}, \quad \Gamma = A\varphi \sqrt{\sin(2\theta - D)}, \quad E/\Gamma = \pm \operatorname{ctg}(2\theta - D)$$

Приравняв $\operatorname{ctg}(2\theta - D) = \pm 0,3536$, найдем для θ два значения: $\theta_1 = 35^\circ 16' + D$, $\theta_2 = 54^\circ 44' + D$ и одно значение для $\rho_1 = \rho_2 = A/(\sin 70^\circ 32')^{0,5} = 1,029A$.

Для всего среднего участка экстремали, удовлетворяющего условию $E/\Gamma = 0,3536$, момент

$$M = \sigma_T \delta A^2 / (2\sqrt{8}) = 0,1768 A^2 \sigma_T \delta \quad (3.8)$$

Перейдем теперь к случаю $E/\Gamma > 0,3536$. При этом

$$\Gamma_{\max} = \Gamma_3 = 0,5\Gamma_1 + 1,5E = \varphi \left(\frac{\rho}{2} - \frac{3}{2} \frac{\rho\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \right)$$

$$T = -\frac{\sigma_T \delta}{2} \varphi \int \left(\frac{\rho}{2} - \frac{3}{2} \frac{\rho\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \right) ds = -\frac{\sigma_T \delta \varphi}{4} \int (\rho \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} - 3\rho\rho') d\theta$$

$$M = 0,25 \sigma_T \delta A^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\rho \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} + 3\rho\rho') d\theta \quad (3.9)$$

Сравнивая (3.9) и (3.4), видно, что первый член в скобках выражения (3.9) дает после интегрирования половину правой части (3.7), а второй член дает приращение, равное

$$\Delta M = \frac{3}{4} \sigma_T \delta A^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho\rho' d\theta = 0,375 \sigma_T \delta A^2 [\operatorname{cosec}(2\theta_2 - D) - \operatorname{cosec}(2\theta_1 - D)]$$

Таким образом, для участков, где $E/\Gamma > 0,3536$, получаем

$$M = 0,125A^2\sigma_T\delta [\operatorname{ctg} (2\theta_1 - D) - \operatorname{ctg} (2\theta_2 - D) + 3 \operatorname{cosec} (2\theta_2 - D) - 3 \operatorname{cosec} (2\theta_1 - D)] \quad (3.10)$$

4. Решим теперь задачу о сопротивлении кручению квадратной шайбы в материале, подчиняющемся условию Треска — Сен-Венана. Для квадратной запрессованной шайбы может иметь место комбинация экстремалей сосредоточенных деформаций, показанная на фиг. 8. Линии 1—1, 2—2,, 8—8 представляют собой разрезы, вдоль которых отсутствуют какие-либо деформации, так как вся внешняя часть плоскости поворачивается вокруг центра шайбы на один и тот же угол.

Экстремали, касающиеся середин сторон квадрата, имеют в полярных координатах с осью $\theta_a = 0$, совпадающей с диагональю квадрата, уравнение $\rho_a = 1/2a (\sin 2\theta_a)^{-0,5}$, а экстремали, касающиеся вершин квадрата, имеют уравнение в полярных координатах с осью $\theta_b = 0$, проходящей через середины сторон квадрата $\rho_b = 1/2a (\sin 2\theta_b)^{-0,5}$.

Отсчет углов θ_a ведется по часовой стрелке, а отсчет углов θ_b — против.

Найдем точку пересечения экстремалей θ_a^\sim , ρ_a^\sim , θ_b^\sim , ρ_b^\sim , замечая, что в ней $\theta_a^\sim + \theta_b^\sim = 45^\circ$ и $\rho_a^\sim = \rho_b^\sim$. Получаем

$$2\theta_b^\sim = 90^\circ - 2\theta_a^\sim, \quad \rho_b^\sim = \rho_a^\sim = 1/2a (\sin 2\theta_a^\sim)^{-0,5} = a (\cos 2\theta_a^\sim)^{-0,5} / \sqrt{2}$$

$$4 \sin 2\theta_a^\sim = 2 \cos \theta_a^\sim, \quad \operatorname{ctg} 2\theta_a^\sim = 2, \quad \sin 2\theta_a^\sim = 0,4472,$$

$$\operatorname{ctg} 2\theta_b^\sim = 0,5, \quad \sin 2\theta_b^\sim = 0,8944$$

Обозначим звездочкой точки экстремалей θ_a^* , ρ_a^* и θ_b^* , ρ_b^* , в которых $E/\Gamma = 0,3536$ и, используя формулы (3.8) и (3.10), найдем момент, приходящийся на сектор $c - 0 - 2$:

$$M_1 = A_a^2 \frac{\sigma_T \delta}{8} \left(8 \frac{0,1768}{2} + \operatorname{ctg} 2\theta_a^\sim - \operatorname{ctg} 2\theta_a^* - \right.$$

$$\left. - 3 \operatorname{cosec} 2\theta_a^* + 3 \operatorname{cosec} 2\theta_a^\sim = 0,735 A_a^2 \sigma_T \delta \right.$$

и момент, приходящийся на сектор 1 — 0 — c:

$$M_2 = A_b^2 \frac{\sigma_T \delta}{8} \left(8 \frac{0,1768}{2} + \operatorname{ctg} 2\theta_b^\sim - \operatorname{ctg} 2\theta_b^* - \right.$$

$$\left. - 3 \operatorname{cosec} 2\theta_b^* + 3 \operatorname{cosec} 2\theta_b^\sim = 0,735 A_b^2 \sigma_T \delta \right.$$

Полный момент, закручивающий шайбу, равен: $M = 8(M_1 + M_2) = 8(0,735a^2/4 + 0,128 \cdot a^2/2) \sigma_T \delta = 1,982a^2 \sigma_T \delta$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ржаницын А. Р. Приближенные решения задач теории пластичности. — Исследования по вопросам строительной механики и теории пластичности: Сб. статей. М.: Госстройиздат, 1956, с. 6—65.

Москва

Поступила в редакцию
10.XI.1980.