

УДК 539.3.01

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ С УГЛАМИ

ЗАРГАРЯН С. С.

Исследованию плоской задачи теории упругости для областей с углами посвящено большое число работ (см., например, [1]). Следует также отметить работу [2]. Однако проблема фактического построения решений с выявлением возможных особенностей для напряжений, возникающих в окрестности угловых точек контура, исследована недостаточно.

Теория разрешимости общих эллиптических задач с конечным числом конических или угловых точек на границе построена в [3]. Этим же вопросам для классов суммируемых функций и функций классов Гельдера посвящены работы [4, 5].

Учитывая эффективность метода граничных интегральных уравнений для решения краевых задач, понижающих на единицу размерность искомых функций, в [6–8] интегральные уравнения Шермана – Лауричелла распространены на области с угловыми точками на границе в пространствах суммируемых функций.

В публикуемой работе интегральные уравнения Шермана – Лауричелла, дающие решения плоских задач теории упругости для многосвязных областей с гладкой границей при заданных на границе внешних силах, распространяются на случай областей с кусочно-гладкими контурами. Интегралы, входящие в это уравнение, рассматриваются как интегралы Стильтьеса с непрерывной плотностью, и доказывается, что интегральный оператор уравнения при наличии угловых точек контура является обобщенным оператором Фредгольма.

Кроме того, непосредственно из рассматриваемых интегральных уравнений выводится трансцендентное уравнение [9], корни которого характеризуют поведение степенной асимптотики плотности интегрального уравнения, справедливость которой обосновывается окончательным результатом – получением известной асимптотики напряженно-деформированного состояния вблизи угла в случаях простых нулей трансцендентного уравнения, а также в случаях, когда особенность правой части для напряжений, заданных на контуре, сильнее особенности, порождаемой асимптотикой однородных решений. Приведенный численный пример иллюстрирует результаты расчетов на ЭВМ методом последовательных приближений для случая разрывной нагрузки.

1. Пусть упругая область D^+ ограничена одним или несколькими замкнутыми кусочно-гладкими контурами L_1, L_2, \dots, L_{m+1} , из которых L_{m+1} содержит внутри все остальные (либо вовсе отсутствует). Полную границу области обозначим через $L = L_1 + L_2 + \dots + L_{m+1}$. Будем считать положительным направление обхода контура, при котором область D^+ остается слева. Конечные области, ограниченные контурами L_k , обозначим D_k^- ($k=1, 2, \dots, m$), а бесконечную область, ограниченную контуром $L_{m+1} - D_{m+1}^-$.

Граничное условие первой и второй основных задач [10]

$$k_1 \varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t), \quad t \in L_k \quad (k=1, 2, \dots, m+1) \quad (1.1)$$

будем удовлетворять интегралами типа Коши [11, 12]:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau) d\tau}{\tau - z} + Q_1(z), \quad \psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{k_1 \omega(\tau) - \bar{\tau} \omega'(\tau)}}{\tau - z} d\tau + Q_2(z) \quad (1.2)$$

В случае первой основной задачи

$$f(t) = i \int_{t_0}^t (X_n + iY_n) ds + C_h, \quad C_h = -\frac{1}{N_h} \int_{L_h} \omega(\tau) ds, \quad Q_1(z) = 0 \quad (1.3)$$

$$Q_2(z) = \sum_{j=1}^m \frac{b_j}{z - z_j}, \quad b_j = \frac{i}{M_j} \int_{L_j} \{\omega(\tau) d\bar{\tau} - \overline{\omega(\tau)} d\tau\}, \quad z_j \in D_j^-$$

В случае второй основной задачи

$$f(t) = -2\mu(u + iv), \quad Q_1(z) = \sum_{j=1}^m \{\ln(z - z_j)\} \int_{L_j} \omega(\tau) ds$$

$$Q_2(z) = -\kappa \sum_{j=1}^m \{\ln(z - z_j)\} \int_{L_j} \overline{\omega(\tau)} ds, \quad z_j \in D_j^- \quad (1.4)$$

где предположено, что главные векторы $X_n + iY_n$ внешних усилий, приложенных к контуру L_h , равны нулю. Действительные числа N_h и M_j , входящие в (1.3) и (1.4), определяются в процессе решения [13]. Плотность $\omega(\tau)$ является непрерывной на L_h комплексной функцией, имеющей производную $\omega'(\tau)$, удовлетворяющую одному из условий H или H^* [14] в окрестности угловых точек, в зависимости от определяемой в п. 2 асимптотики для искомой плотности.

Подставив граничные значения интегралов типа Коши (1.2) в (1.1), почти всюду на L получаем

$$k_1 \omega(t) + \frac{k_1}{2\pi i} \int_L \omega(\tau) d \ln \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - \bar{t}} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\omega(\tau)} d \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - \bar{t}} + G(t) = f(t) \quad (1.5)$$

где функция $G(t)$ для первой и второй основных задач имеет вид

$$G(t) = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\bar{b}_j}{\bar{t} - \bar{z}_j} - C_h$$

$$G(t) = -2\kappa \sum_{j=1}^m \{\ln|t - z_j|\} \int_{L_j} \omega(\tau) ds$$

а $f(t)$ определяется по (1.3), (1.4). Интегралы, входящие в (1.5), будем рассматривать как интегралы Стильтеса. В случае первой задачи чистое мнимое слагаемое

$$b_{m+1} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left\{ \frac{\omega(\tau)}{\tau^2} d\tau + \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\bar{\tau}^2} d\bar{\tau} \right\}$$

введено в (1.5) для единообразия записи, полагая, что $z_{m+1} = 0$. При условии равенства нулю главного момента внешних сил получаем $b_{m+1} = 0$.

Покажем, что для уравнения (1.5) верны теоремы Фредгольма в предположении, что искомая функция $\omega(\tau)$ является непрерывной на каждом замкнутом кусочно-гладком контуре L_h . Отделяя действительную и мнимую части уравнения (1.5), получаем следующую систему двух действительных интегральных уравнений второго рода, записанную в матричном виде

$$\mathbf{w}(t) - \int_L \mathbf{K}(\mathbf{e}) \mathbf{w}(\tau) dF(t, \tau) = \mathbf{m}(t), \quad (\mathbf{I} - \mathbf{T}) \mathbf{w} = \mathbf{m}$$

$$\mathbf{e} = (\tau - t) / |\tau - t|, \quad F(t, \tau) = \arg(\tau - t) \quad (1.6)$$

где вектор-функция $w(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t))$ составлена из действительной и мнимой частей плотности $\omega(t) = \omega_1(t) + i\omega_2(t)$.

Матрица-функция $K(e)$ размера (2×2) в случае второй задачи имеет элементы

$$K_{ij} = -\frac{1}{\pi} \left[\left(1 - \frac{1}{\kappa} \right) \delta_{ij} + \frac{2}{\kappa} (e, e_i) (e, e_j) \right] \quad (i, j=1, 2). \quad (1.7)$$

где e_i — орты координатных осей, δ_{ij} — символ Кронекера.

В случае первой задачи элементы матрицы получаются из (1.7) при $\kappa=1$, если полагать, что $F(t, \tau) = -\pi/2 + \arg(\tau - t)$. Вектор-функция $m(t) = (m_1(t), m_2(t))$ имеет координаты:

$$m_1(t) = \operatorname{Re}(f(t) - G(t))/k_1, \quad m_2(t) = \operatorname{Im}(f(t) - G(t))/k_1 \quad (1.8)$$

Отнесем точкам t и τ контура L_j соответственно значения σ и s сегмента $[s'_{j-1}, s''_j]$ вещественной оси, полагая, что значениям s'_{j-1} и s''_j соответствует точка L_j , отличная от угловой.

Предположим, также, что $s'_0 < s'_1 < \dots < s'_m$ и сегменты $[s'_0, s'_1]$, $[s'_1, s'_2]$, ..., $[s'_m, s''_{m+1}]$ не перекрываются. Тогда $F[t(\sigma), \tau(s)] = F(\sigma, s)$, называемая углом видимости, свойства которого хорошо известны [15, 16]

изменяется непрерывно, когда $\sigma \in (s'_{j-1}, s''_j)$, а $s \in (s'_{k-1}, s''_k)$ ($j, k = 1, 2, \dots, m+1; j \neq k$). Если $\sigma, s \in (s'_{j-1}, s''_j)$, она также изменяется непрерывно, кроме линии $\sigma = s$, где $F(\sigma, s)$ остается неопределенной.

Представим матричный интегральный оператор Tw в виде суммы двух операторов:

$$Tw = Vw + Aw \quad (1.9)$$

$$Vw(\sigma) = \int_{L \setminus I_0(t)} K(e) w(s) d_s F(\sigma, s) \quad (1.10)$$

$$Aw(\sigma) = \int_{I_0(t)} K(e) w(s) d_s F(\sigma, s) \quad (1.11)$$

где $I_0(t)$ — стандартная дуга на L_j , т. е. $|t - t_1| = |t - t_2| = \delta$. Оператор $Vw(\sigma)$ является вполне непрерывным, так как переменная s находится вне сегмента $\sigma - \varepsilon \leq s \leq \sigma + \varepsilon$, отображаемого на стандартную дугу $I_0(t)$, причем

$$\begin{aligned} Vw(\sigma) = & \int_{L \setminus L_j} K(e) w(s) d_s F(\sigma, s) + \int_{s'_{j-1}}^{\sigma - \varepsilon} K(e) w(s) F'_s(\sigma, s) ds + \\ & + \int_{\sigma + \varepsilon}^{s''_j} K(e) w(s) F'_s(\sigma, s) ds \end{aligned}$$

где $F'_s(\sigma, s)$ равномерно ограничена на сегментах $[s'_{j-1}, \sigma - \varepsilon]$ и $[\sigma + \varepsilon, s''_j]$ [16]. Поэтому

$$|Vw(\sigma'') - Vw(\sigma')| < M |\sigma'' - \sigma'| \quad \text{при} \quad |w(\sigma)| \leq 1$$

Для линейного ограниченного оператора T , действующего в банаховом пространстве B , радиус Фредгольма R_T [16] определяет наибольший круг на комплексной плоскости λ с центром $\lambda=0$, внутри которого оператор $I - \lambda T$ является обобщенным оператором Фредгольма, где I — тождественный оператор.

Этот радиус есть верхняя грань радиусов сходимости ряда Неймана

$$I + \lambda(T - V) + \lambda^2(T - V)^2 + \dots \quad (1.12)$$

где верхняя грань берется по множеству $\{V\}$ всех вполне непрерывных операторов, действующих в банаховом пространстве B . Ряд (1.12) сходится при $|\lambda| \leq \|T - V\|_B^{-1}$, поэтому $R_T \geq \inf \|T - V\|_B^{-1}$, где нижняя грань также берется по множеству $\{V\}$ в пространстве B . В [17] для существенной нормы

$$\|\Omega\| = \inf_{\{V\}} \|A\|_B \quad (1.13)$$

являющейся оценкой снизу для R_T , найдено точное значение

$$\|\Omega(\kappa)\| = \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right) E\left(\frac{\pi - \theta_{\min}}{2}, \frac{2\sqrt{\kappa}}{1 + \kappa}\right) \quad (1.14)$$

$$\theta_{\min} = \min \{\beta_1 - \alpha_1, \beta_2 - \alpha_2, \dots, \beta_N - \alpha_N, 2\pi - (\beta_1 - \alpha_1), 2\pi - (\beta_2 - \alpha_2), \dots, 2\pi - (\beta_N - \alpha_N)\},$$

где $\beta_j - \alpha_j$ — углы между полукасательными в угловой точке контура, E — неполный эллиптический интеграл II рода. В случае первой задачи $\|\Omega(1)\| = (\frac{2}{3}) \cos^2 \theta_{\min}$.

Согласно (1.14), $\|\Omega(1)\| < 1$ для следующих углов: $76,48^\circ < \theta_{\min} \leq 180^\circ$ для $\kappa=1$, $50^\circ < \theta_{\min} \leq 180^\circ$ для $\kappa=1,4$, $30^\circ < \theta_{\min} \leq 180^\circ$ для $\kappa=1,8$, $20^\circ < \theta_{\min} \leq 180^\circ$ для $\kappa=2,2$, $15^\circ < \theta_{\min} \leq 180^\circ$ для $\kappa=2,6$, $10^\circ < \theta_{\min} \leq 180^\circ$ для $\kappa=3$, где $\kappa=3-4\sigma$, σ — коэффициент Пуассона, а границы для θ_{\min} определены с точностью до 5° , если $1 < \kappa \leq 3$.

Применяя обратный оператор $(I - \Omega)^{-1}$, получаемый из (1.12) при $\lambda=1$, с учетом (1.19) и (1.13), к обеим частям уравнения (1.6), получим $w - (I - \Omega)^{-1}Vw = (I - \Omega)^{-1}m$, где $(I - \Omega)^{-1}Vw$ — вполне непрерывный оператор. Следовательно, интегральный оператор исходного уравнения (1.6) является обобщенным оператором Фредгольма [18] и для этого уравнения имеют место все три теории Фредгольма по крайней мере для тех областей, углы которых изменяются в указанных выше пределах.

Теорему единственности решения уравнения (1.5) можно доказать повторяя выкладки, приводящиеся при доказательстве единственности решения уравнения Шермана — Лауричелла, учитывая при этом, что теорема Коши о равенстве нулю интеграла от аналитической функции справедлива для произвольного спрямляемого кусочно-гладкого контура.

2. Исследуем асимптотику плотности $\omega(\tau)$ представлений (1.2) в окрестности угловой точки a . Комплексная бигармоническая функция Гурса

$$U(z, \bar{z}) = \chi_1(z) + \chi_2(\bar{z}) + (\bar{z} - \bar{a})\varphi_1(z) + (z - a)\varphi_2(\bar{z}) \quad (2.1)$$

при $z - a = re^{i\theta}$ и принятых в [19] значениях

$$\begin{aligned} \chi_1(z) &= d_1(z - a)^{\lambda+1}, & \chi_2(\bar{z}) &= d_2(\bar{z} - \bar{a})^{\lambda+1} \\ \varphi_1(z) &= d_3(z - a)^\lambda, & \varphi_2(\bar{z}) &= d_4(\bar{z} - \bar{a})^\lambda \end{aligned} \quad (2.2)$$

принимает в полярных координатах вид

$$U(r, \theta) = r^{\lambda+1} [b_1 \sin(\lambda+1)\theta + b_2 \cos(\lambda+1)\theta + b_3 \sin(\lambda-1)\theta + b_4 \cos(\lambda-1)\theta] \quad (2.3)$$

$$b_1 = i(d_1 - d_2), \quad b_2 = d_1 + d_2, \quad b_3 = i(d_3 - d_4), \quad b_4 = d_3 + d_4 \quad (2.4)$$

Решение (2.3) было положено в основу исследования асимптотики бигармонической задачи при однородных граничных условиях [9].

Пусть разомкнутые гладкие линии $L_{k,j}$ и $L_{k,j+1}$ замкнутого кусочно-гладкого контура L_k , имеющего n_k угловых точек, в точке a образуют угол упругой области прямолинейными отрезками $\delta_j^- \in L_{k,j}$ и $\delta_{j+1}^+ \in L_{k,j+1}$ ($j = 1, 2, \dots, n_k$), гладко сопрягаемыми с остальными частями $L_{k,j}$ и $L_{k,j+1}$

соответственно. Обозначим $\alpha = \arg(t^+ - a)$, если $t^+ \in \delta_{j+1}^+$, а $\beta = \arg(t^- - a)$, если $t^- \in \delta_j^-$.

Разбивая интегралы представлений (1.2) на сумму трех интегралов, распространенных соответственно по δ_j^- , δ_{j+1}^+ и оставшейся части контура $l = L \setminus (\delta_j^- + \delta_{j+1}^+)$, определим предельные значения этих интегралов в окрестности вершины угла a при приближении точки z изнутри упругой области к точкам контура $t^- \in \delta_j^-$ и $t^+ \in \delta_{j+1}^+$. Так как точки t^- и t^+ расположены вне части контура l , то интегралы

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\omega(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad \psi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\overline{k_1 \omega(\tau)} - \bar{\tau} \omega'(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (2.5)$$

являются аналитическими функциями в угловой точке a .

На основании известных свойств интеграла типа Коши [14] предельные значения интегралов на δ_j^- и δ_{j+1}^+ от функции вида $(\tau - a)^\lambda$, где λ — комплексное число, $\operatorname{Re} \lambda > 0$, представимы в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_j^-} \frac{(\tau - a)^\lambda d\tau}{\tau - t^-} &= (2i)^{-1} \operatorname{ctg} \lambda \pi (t^- - a)^\lambda + b_0 + b_1(t^- - a) + b_2(t^- - a)^2 + \dots \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_{j+1}^+} \frac{(\tau - a)^\lambda d\tau}{\tau - t^-} &= -\frac{e^{-i\lambda\pi}}{2i \sin \lambda\pi} (t^- - a)^\lambda + a_0 + a_1(t^- - a) + a_2(t^- - a)^2 + \dots \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_j^-} \frac{(\tau - a)^\lambda d\tau}{\tau - t^+} &= \frac{e^{i\lambda\pi}}{2i \sin \lambda\pi} (t^+ - a)^\lambda + b_0 + b_1(t^+ - a) + b_2(t^+ - a)^2 + \dots \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_{j+1}^+} \frac{(\tau - a)^\lambda d\tau}{\tau - t^+} &= -(2i) \operatorname{ctg} \lambda \pi (t^+ - a)^\lambda + a_0 + a_1(t^+ - a) + a_2(t^+ - a)^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

Эти формулы получены в предположении, что $\operatorname{Re} \lambda = -\gamma$, причем $0 \leq \gamma < 1$, $\lambda \neq 0$. Однако очевидно, что они имеют место и при $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Кроме того, разложения (2.6) верны при замене λ на $\bar{\lambda}$.

Аналогичные формулы могут быть получены для интегралов по δ_j^- и δ_{j+1}^+ от сопряженных функций $(\bar{\tau} - \bar{a})^\lambda$ и $(\bar{\tau} - \bar{a})^\lambda$ при таком выборе однозначных ветвей, когда на отрезках прямых δ_j^- и δ_{j+1}^+ :

$$\begin{aligned} (\bar{t}^- - \bar{a})^\lambda &= \exp[-2i(\beta + \pi)\lambda] (t^- - a)^\lambda, \quad (\bar{t}^+ - \bar{a})^\lambda = \\ &= \exp[-2i(\alpha - \pi)\lambda] (t^+ - a)^\lambda \end{aligned} \quad (2.7)$$

Выберем однозначную ветвь многозначной функции $(\bar{z} - \bar{a})^\lambda$ с линией разреза, совпадающей с δ_j^- (либо δ_{j+1}^+) и будем определять ее по формуле:

$$(\bar{z} - \bar{a})^\lambda = \exp\{\lambda[\ln(z - a) - 2i\theta]\}, \quad \theta = \arg(z - a)$$

которая является непрерывной, когда $\alpha \leq \arg(z - a) \leq \beta$. Очевидно, что предельные значения таким образом определенной функции из D^+ и D_h^- разрывны при приближении к δ_j^- (либо δ_{j+1}^+). Предельные значения $(\bar{z} - \bar{a})^\lambda$ из области D_h^- совпадают со значениями (2.7).

Представляя в (2.1) функции $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\chi_1(z)$ и $\chi_2(z)$ интегралами типа Коши, плотность которых имеет степенную асимптотику в окрестности угловой точки a , и учитывая, что главные члены разложений этих интегралов по (2.6) с точностью до мультипликативных постоянных совпадают со значениями функций $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\chi_1(z)$ и $\chi_2(z)$ в (2.2), будем

полагать, что на δ_j^- и δ_{j+1}^+ плотность интегралов (1.2) представима в виде (2.8)

$$\omega_j(\tau) = \sum_{s=1}^m \{A_{s,j}^\pm(\tau-a)^{\lambda_s} + \bar{B}_{s,j}^\pm(\tau-a)^{\bar{\lambda}_s}\} + \sum_{s=0}^p E_{s,j}^\pm(\tau-a)^s \quad (j=1,2,\dots,n_h)$$

где числа $m, p \geq 1$ и выбираются в зависимости от принимаемой точности приближенного решения, причем $0 < \operatorname{Re} \lambda_1 < \operatorname{Re} \lambda_2 < \dots < \operatorname{Re} \lambda_m$.

Вне участков δ_j^- и δ_{j+1}^+ функция $\omega_j(\tau)$ предполагается продолженной непрерывно, например при помощи сплайнов. Регулярные слагаемые второй суммы в (2.8) добавлены к асимптотике плотности, представляющей слагаемые первой суммы, для гладкого сопряжения асимптотики со сплайном.

Определение асимптотики плотности по (2.8) и получаемый с ее помощью известный окончательный результат для асимптотики напряженно-деформированного состояния вблизи угла подтверждают ее справедливость. Однако такое определение асимптотики плотности не претендует на математическую строгость и ее доказательство может стать предметом отдельного исследования.

В (2.8) знак плюс в верхнем индексе соответствует разложению искомой на $L_{h,j}$ функции $\omega(\tau)$ у начала разомкнутой линии $L_{h,j}$, а минус — разложению у ее конца при движении по контуру L_h в положительном направлении. Ввиду непрерывности $\omega(\tau)$ на L_h в (2.8) имеем, что

$$E_{0,j}^- = E_{0,j+1}^+ \quad (j=1,2,\dots,n_h), \quad E_{0,n_h}^+ = E_{0,1}^+ \quad (2.9)$$

Подставив (2.8) в (1.2) и устремив в последнем выражении точку z к $t \in \delta_j^-$, с учетом (2.5), (2.6) и (2.9) получим

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \varphi_0(t) + \sum_{s=1}^m \left\{ \left[A_{s,j}^- \left(\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{ctg} \lambda_s \pi}{2i} \right) - A_{s,j+1}^+ \frac{\exp(-i\lambda_s \pi)}{2i \sin \lambda_s \pi} \right] (t-a)^{\lambda_s} + \right. \\ & \left. + \left[\bar{B}_{s,j}^- \left(\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{ctg} \bar{\lambda}_s \pi}{2i} \right) - \bar{B}_{s,j+1}^+ \frac{\exp(-i\bar{\lambda}_s \pi)}{2i \sin \bar{\lambda}_s \pi} \right] (t-a)^{\bar{\lambda}_s} \right\} + \\ & + \frac{E_{1,j}^- - E_{1,j+1}^+}{2\pi i} (t-a) \ln(t-a) + O_1(t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Аналогично, принимая во внимание (2.5) и (2.7), из (1.2) определяем также предельное значение функции $\psi(z)$:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & \psi_0(t) + \sum_{s=1}^m \left\{ \left[k_1 \bar{A}_{s,j}^- \left(\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{ctg} \bar{\lambda}_s \pi}{2i} \right) \exp[-2i(\beta+\pi)\bar{\lambda}_s] - \right. \right. \\ & - \bar{B}_{s,j}^- \bar{\lambda}_s \left(\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{ctg} \bar{\lambda}_s \pi}{2i} \right) \exp(-2i\beta) - k_1 \bar{A}_{s,j+1}^+ \frac{\exp[-2i(\alpha-\pi)\bar{\lambda}_s - i\bar{\lambda}_s \pi]}{2i \sin \bar{\lambda}_s \pi} + \\ & \left. + \bar{B}_{s,j+1}^+ \frac{\bar{\lambda}_s \exp(-2i\alpha - i\bar{\lambda}_s \pi)}{2i \sin \bar{\lambda}_s \pi} \right] (t-a)^{\bar{\lambda}_s} + \\ & + \left[-A_{s,j}^- \lambda_s \left(\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{ctg} \lambda_s \pi}{2i} \right) \exp(-2i\beta) + \right. \\ & + k_1 B_{s,j}^- \left(\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{ctg} \lambda_s \pi}{2i} \right) \exp[-2i(\beta+\pi)\lambda_s] + A_{s,j+1}^+ \lambda_s \frac{\exp(2i\alpha - i\lambda_s \pi)}{2i \sin \lambda_s \pi} - \\ & \left. - k_1 B_{s,j+1}^+ \frac{\exp[-2i(\alpha-\pi)\lambda_s - i\lambda_s \pi]}{2i \sin \lambda_s \pi} \right] (t-a)^{\lambda_s} \right\} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{a} \sum_{s=1}^m \left\{ \left[A_{s,j}^- \bar{\lambda}_s \left(\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{ctg} \lambda_s \pi}{2i} \right) - A_{s,j+1}^+ \frac{\exp(-i\lambda_s \pi)}{2i \sin \lambda_s \pi} \right] (t-a)^{\lambda_s-1} + \right. \\
& \quad \left. + \left[\bar{B}_{s,j} \bar{\lambda}_s \left(\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{ctg} \bar{\lambda}_s \pi}{2i} \right) - \bar{B}_{s,j+1}^+ \bar{\lambda}_s \frac{\exp(-i\bar{\lambda}_s \pi)}{2i \sin \bar{\lambda}_s \pi} \right] (t-a)^{\bar{\lambda}_s-1} \right\} + \\
& \quad + \bar{a} \frac{E_1^+ - E_1^-}{2\pi i} \ln(t-a) + \left\{ \frac{\bar{a}}{\pi i} (E_2^+ - E_2^-) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{k_1}{2\pi i} [\bar{E}_1^- \exp[-2i(\pi+\beta)] - \bar{E}_1^+ \exp(-2i\alpha)] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2\pi i} [E_1^+ \exp(-2i\alpha) - E_1^- \exp[-2i(\pi+\beta)]] (t-a) \ln(t-a) + O_2(t) \right\} \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Удовлетворяя при помощи (2.10) и (2.11) граничному условию (1.1) в точке $t \in \delta_j^-$, с учетом (2.7) и (2.9) получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^m \left\{ [-k_1 A_{s,j+1}^+ (\exp(-i\lambda_s \pi) - \exp[i\lambda_s \pi - 2i\lambda_s(\pi+\beta-\alpha)]) + \right. \\
& \quad + B_{s,j+1}^+ \lambda_s (\exp[i\lambda_s \pi - 2i\beta(\lambda_s-1)] - \exp(i\lambda_s \pi + 2i\alpha - 2i\lambda_s \beta))] \frac{(t-a)^{\lambda_s}}{2i \sin \lambda_s \pi} + \\
& \quad + [\bar{A}_{s,j+1}^+ \bar{\lambda}_s (\exp[i\bar{\lambda}_s \pi - 2i\beta(\bar{\lambda}_s-1)] - \exp(i\bar{\lambda}_s \pi + 2i\alpha - 2i\bar{\lambda}_s \beta)) - \\
& \quad \left. - k_1 \bar{B}_{s,j+1}^+ (\exp(-i\bar{\lambda}_s \pi) - \exp[i\bar{\lambda}_s \pi - 2i\bar{\lambda}_s(\pi+\beta-\alpha)]) \right] \frac{(t-a)^{\bar{\lambda}_s}}{2i \sin \bar{\lambda}_s \pi} \left. \right\} + \\
& \quad + \frac{1}{2\pi i} \{ E_1^- - \bar{E}_1^- - E_1^+ + \bar{E}_1^+ - \exp[-2i(\pi+\beta)] [2a(\bar{E}_2^+ - \bar{E}_2^-) + \\
& \quad + k_1(E_1^- \exp[2i(\pi+\beta)] - E_1^+ \exp(2i\alpha)) + \\
& \quad + (\bar{E}_1^+ \exp(2i\alpha) - \bar{E}_1^- \exp[2i(\pi+\beta)])] \} (t-a) \ln(t-a) + O_3(t) = f(t) \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Аналогично, переходя в (1.2) к пределу, когда точка z стремится к $t \in \delta_{j+1}^+$, и опуская промежуточные выкладки, граничное условие (1.1) в этой точке приводим к виду

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^m \left\{ [k_1 A_{s,j}^- (\exp(i\lambda_s \pi) - \exp[-i\lambda_s \pi + 2i\lambda_s(\pi+\beta-\alpha)]) - \right. \\
& \quad - \lambda_s B_{s,j}^- (\exp[-i\lambda_s \pi - 2i\alpha(\lambda_s-1)] - \\
& \quad \left. - \exp(2i\beta - i\lambda_s \pi - 2i\alpha\lambda_s))] \frac{(t-a)^{\lambda_s}}{2i \sin \lambda_s \pi} + \right. \\
& \quad + [-\bar{\lambda}_s \bar{A}_{s,j}^- (\exp[-i\bar{\lambda}_s \pi - 2i\alpha(\bar{\lambda}_s-1)] - \exp(2i\beta - i\bar{\lambda}_s \pi - 2i\alpha\bar{\lambda}_s)) + \\
& \quad \left. + k_1 \bar{B}_{s,j}^- (\exp(i\bar{\lambda}_s \pi) - \exp[-i\bar{\lambda}_s \pi + 2i\bar{\lambda}_s(\pi+\beta-\alpha)]) \right] \frac{(t-a)^{\bar{\lambda}_s}}{2i \sin \bar{\lambda}_s \pi} \left. \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi i} \{ E_1^- - \bar{E}_1^- - E_1^+ - \bar{E}_1^+ - \exp(-2i\alpha) [2a(\bar{E}_2^+ - \bar{E}_2^-) + \\
& + k_1(E_1^- \exp[2i(\pi+\beta)] - E_1^+ \exp(2i\alpha)) + (\bar{E}_1^+ \exp(2i\alpha) - \\
& - \bar{E}_1^- \exp[2i(\pi+\beta)])] \} (t-a) \ln(t-a) + O_4(t) = f(t)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

В (2.10), (2.11), (2.12) и (2.13) функции $O_i(t)$ имеют вид

$$O_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(i)} (t-a)^k + \{ \ln(t-a) \} \sum_{k=2}^{\infty} q_k^{(i)} (t-a)^k \quad (i=1,2,3,4)$$

где $p_k^{(i)}$ и $q_k^{(i)}$ — линейные комбинации коэффициентов $E_{k,j}^{\pm}$, входящих в (2.8), а также коэффициентов разложений аналитических в точке a функций $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$, $Q_1(z)$ и $Q_2(z)$. Под $\ln(t-a)$ понимается определенная ветвь, принимающая функцией $\ln(z-a)$ на левой стороне разрезанной вдоль $L_{h,j}$ плоскости.

Предполагая, что $f(t)$ является бесконечно дифференцируемой функцией в окрестности угловой точки a , показатель степени которой при разложении ее в ряд в окрестности точки a не совпадает с λ_s или $\bar{\lambda}_s$, приравнивая в (2.12) и (2.13) коэффициенты при одинаковых степенях $(t-a)^{\lambda_s}$ и $(t-a)^{\bar{\lambda}_s}$ и переходя при этом во вторых равенствах к сопряженным значениям, получим следующие две системы однородных алгебраических уравнений для определения коэффициентов $A_{s,j+1}^+$, $B_{s,j+1}^+$ и $A_{s,j}^-$, $B_{s,j}^-$:

$$\begin{aligned}
& k_1 A_{s,j+1}^+ (\exp(-i\lambda_s \pi) - \exp[i\lambda_s \pi - 2i\lambda_s(\pi + \beta - \alpha)]) - \\
& - \lambda_s B_{s,j+1}^+ \exp(i\lambda_s \pi - 2i\lambda_s \beta) [\exp(2i\beta) - \exp(2i\alpha)] = 0 \\
& \lambda_s \bar{A}_{s,j+1}^+ \exp(-i\lambda_s \pi + 2i\lambda_s \beta) [\exp(-2i\beta) - \exp(-2i\alpha)] - \\
& - k_1 \bar{B}_{s,j+1}^+ (\exp(i\lambda_s \pi) - \exp[-i\lambda_s \pi + 2i\lambda_s(\pi + \beta - \alpha)]) = 0
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
& k_1 A_{s,j}^- (\exp(i\lambda_s \pi) - \exp[-i\lambda_s \pi + 2i\lambda_s(\pi + \beta - \alpha)]) - \\
& - \lambda_s \bar{B}_{s,j}^- \exp(-i\lambda_s \pi - 2i\alpha \lambda_s) [\exp(2i\alpha) - \exp(2i\beta)] = 0 \\
& \lambda_s \bar{A}_{s,j}^- \exp(i\lambda_s \pi + 2i\alpha \lambda_s) [\exp(-2i\alpha) - \exp(-2i\beta)] - \\
& - k_1 B_{s,j}^- (\exp(-i\lambda_s \pi) - \exp[i\lambda_s \pi - 2i\lambda_s(\pi + \beta - \alpha)]) = 0
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Приравнивая нулю определители систем (2.14) и (2.15), получаем одно и то же трансцендентное уравнение [9]:

$$R(\lambda_s, \beta - \alpha) = \sin^2 \lambda_s (\beta - \alpha) - (\lambda_s/k_1)^2 \sin^2 (\beta - \alpha) = 0 \tag{2.16}$$

Учитывая, что ранг матриц действительных однородных систем, получаемых из (2.14) и (2.15) при отделении их действительных и мнимых частей равен трем, три из четырех действительных постоянных каждой из систем линейно выражаются через четвертую [19]. Значение последней постоянной, а также коэффициенты $E_{k,j}^{\pm}$ регулярных членов в (2.8) определяются из решения интегрального уравнения (1.6).

Как показывает исследование корней уравнения (2.16), при $\pi < \beta - \alpha < 2\pi$ наименьший положительный корень λ_1 этого уравнения является простым и меньше единицы. Этим значением определяется главный член

асимптотики (2.8). Если же $0 < \beta - \alpha \leq \pi$, то наименьшим положительным простым корнем (2.16) является $\lambda_1 = 1$, кроме угла области $\beta - \alpha \approx 0,715\pi$, когда корень является кратным, так как при этом значении угла в нуль обращается и $R(\lambda_1, \beta - \alpha)$ и ее производная $R'(\lambda_1, \beta - \alpha) = \operatorname{tg} \lambda_1 \alpha - \lambda_1 \alpha$ [20]. Случай, когда $\lambda_1 = 1$ или когда корень является кратным, требуют отдельного изучения и ниже не рассматриваются.

Предположим теперь, что в окрестности точки a имеет место разложение

$$f(t) = (t-a)^{\lambda_f} M(t) + (t-a)^{\bar{\lambda}_f} N(t), \quad \operatorname{Re} \lambda_f > 0 \quad (2.17)$$

где $M(t)$ и $N(t)$ — бесконечно дифференцируемые функции, не обращающиеся в нуль при $t=a$.

В случае, когда в (2.12) и (2.13) показатель λ_f в разложении (2.17) совпадает с λ_1 и $0 < \operatorname{Re} \lambda_1 < 1$, решение уравнения (1.5) в окрестности угловой точки не может представляться в форме (2.8), так как системы (2.14) и (2.15) оказываются неоднородными, а следовательно, и неразрешимыми при значениях λ_f , удовлетворяющих уравнению (2.16).

В этом случае, полагая в (2.2)

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_1(z) &= d_1(z-a)^{\lambda+1} \ln(z-a) + e_1(z-a)^{\lambda+1} \\ \chi_2(z) &= d_2(z-a)^{\lambda+1} \ln(z-a) + e_2(z-a)^{\lambda+1} \\ \varphi_1(z) &= d_3(z-a)^\lambda \ln(z-a) + e_3(z-a)^\lambda \\ \varphi_2(z) &= d_4(z-a)^\lambda \ln(z-a) + e_4(z-a)^\lambda \end{aligned} \quad (2.18)$$

из (2.1) получим [3]:

$$U(r, \theta) = r^{\lambda+1} \ln r \Psi_1(\theta, \lambda) + r^\lambda \Psi_2(\theta, \lambda) \quad (2.19)$$

где $\Psi_1(\theta, \lambda)$ и $\Psi_2(\theta, \lambda)$ — бесконечно дифференцируемые по θ функции.

Можно показать, что при этом представление

$$\begin{aligned} \omega_j(\tau) &= \left\{ \sum_{s=1}^m A_{s,j}^\pm (\tau-a)^{\lambda_s} \ln(\tau-a) + \bar{B}_{s,j}^\pm (\tau-a)^{\bar{\lambda}_s} \ln(\tau-a) + \right. \\ &\quad \left. + C_{s,j} (\tau-a)^{\lambda_s} + D_{s,j}^\pm (\tau-a)^{\bar{\lambda}_s} \right\} + \sum_{s=0}^p E_{s,j}^\pm (\tau-a)^s \end{aligned} \quad (2.20)$$

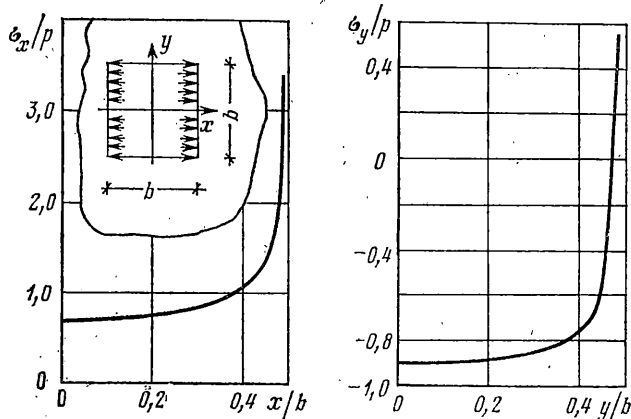
приводит к системам (2.14) и (2.15).

С учетом (2.17), перепишем равенства (2.12) и (2.13) в виде

$$\begin{aligned} G_1(t-a)^{\lambda_1} + \sum_{s=2}^m G_s(t-a)^{\lambda_s} + \bar{H}_1(t-a)^{\bar{\lambda}_1} + \sum_{s=2}^m \bar{H}_s(t-a)^{\bar{\lambda}_s} + \\ + q_1(t-a) \ln(t-a) + O_i(t) = (t-a)^{\lambda_f} M(t) + (t-a)^{\bar{\lambda}_f} N(t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Дифференцируя это уравнение и умножая на степень $(\tau-a)^{1-\lambda_0}$, получим

$$\begin{aligned} G_1 \lambda_1 (t-a)^{\lambda_1 - \lambda_0} + \sum_{s=2}^m G_s \lambda_s (t-a)^{\lambda_s - \lambda_0} + \bar{H}_1 \bar{\lambda}_1 (t-a)^{\bar{\lambda}_1 - \lambda_0} + \\ + \sum_{s=2}^m \bar{H}_s \bar{\lambda}_s (t-a)^{\bar{\lambda}_s - \lambda_0} + q_1 (t-a)^{1-\lambda_0} [\ln(t-a) + 1] + \\ + O_i'(t) (t-a)^{1-\lambda_0} = \lambda_f (t-a)^{\lambda_f - \lambda_0} M(t) + (t-a)^{\lambda_f + 1 - \lambda_0} M'(t) + \\ + \bar{\lambda}_f (t-a)^{\bar{\lambda}_f - \lambda_0} N(t) + (t-a)^{\bar{\lambda}_f + 1 - \lambda_0} N'(t) \end{aligned} \quad (2.22)$$



В случае $\text{Re } \lambda_1 < \text{Re } \lambda_j$, где λ_1 — корень уравнения (2.16) с наименьшей положительной действительной частью, устремив в этом равенстве t к a при $\lambda_0 = \lambda_1$ и при $\lambda_0 = \bar{\lambda}_1$ соответственно, получим $G_1 = 0$ и $\bar{H}_1 = 0$, что совпадает с системами (2.14) и (2.15) при $s=1$, если в виде (2.21) представлять соответственно граничные равенства (2.12) при $t \in \delta_j^-$ и (2.13) при $t \in \delta_{j+1}^+$.

Если же $\text{Re } \lambda_1 > \text{Re } \lambda_j$ из (2.22) при t , стремящемся к a и $\lambda_0 = \lambda_1$, либо $\lambda_0 = \bar{\lambda}_1$, задача определения постоянных $A_{1,j+1}^+$, $B_{1,j+1}^+$ и $A_{1,j}^-$, $B_{1,j}^-$ в представлении (2.8) оказывается неразрешимой. Поэтому в качестве главного члена асимптотики в (2.8) необходимо принять вместо степеней с показателями λ_1 и $\bar{\lambda}_1$ степени с показателями $\lambda_1^* = \lambda_j$ и $\bar{\lambda}_1^* = \bar{\lambda}_j$. При этом, полагая в (2.22) $\lambda_0 = \lambda_1^*$, либо $\lambda_0 = \bar{\lambda}_1^*$, и устремив t к a , получим

$$G_1 = M(a), \quad \bar{H}_1 = N(a) \quad (2.23)$$

Так как λ_j не является корнем трансцендентного уравнения (2.16), неоднородная система (2.23) является однозначно разрешимой.

Таким образом, более сильная особенность для напряжений или деформаций, заданных в окрестности угловых точек контура в качестве внешнего воздействия становится главной в асимптотике решения и оттесняет особенность, порождаемую трансцендентным уравнением (2.16).

3. Приведем результаты решения задачи для бесконечной плоскости с квадратным отверстием со стороной b , когда две противоположные стороны загружены равномерно распределенными нормальными напряжениями с интенсивностью p , а две другие — свободны от напряжений. Пусть a_i — вершина квадрата, $L_1 = [a_1, a_2], \dots, L_4 = [a_4, a_1]$ — его стороны (фигура). Пользуясь произволом в выборе константы C_1 в (1.3), примем при $k_1 = 1$ (первая задача) значение $C_1 = -ipb$. Тогда получим $f(t) = -ip \text{Im } t$.

При $k_1 = 1$ и $\beta - \alpha = 3/2\pi$ простыми корнями уравнения (2.16) являются $\lambda_1 = 0,5445$ и $\lambda_2 = 0,9085$; другие корни с $\text{Re } \lambda_s \geq 1$ в (2.8) не учитывались. Так как λ_1 и λ_2 действительны, полагая $A_{s,j+1}^+ = \bar{B}_{s,j+1}^+$ и $A_{s,j}^- = \bar{B}_{s,j}^-$, представим (2.8) для удобства вычислений в виде

$$\omega_j(\tau) = \sum_{s=1}^2 A_{s,j}^\pm \left(\frac{\tau - a}{T - a} \right)^{\lambda_s} + E_{0,j}^\pm + E_{1,j}^\pm (\tau - a) \quad (3.1)$$

где $T \in L_j$ — некоторая фиксированная точка.

Численное решение интегрального уравнения (1.5), ввиду симметрии задачи проведенное для четверти контура, включающей половины сторон, примыкающих к углу a_2 , было реализовано методом последовательных приближений при значении параметра $M = 6\lambda$. Разбивая эту часть контура на $N = 40$ частей равномерным делением, область определения представлений (3.1) была распространена на отрезки длиной в $3,5\Delta$, примыкающие слева и справа к угловой точке a_2 , где $\Delta = b/40$. Непрерывно продолжая искомую плотность на оставшиеся отрезки общей длиной в 33Δ ,

при помощи кубического сплайна получаем, что при 37 итерациях, выполненных на ЭВМ, расхождение удовлетворения граничного условия по отношению к величине заданной интенсивности p не превышает 3%. При этом модули $A_{2,j}^{\pm}$ в (3.1) ничтожно малы и практически не влияют на напряженное состояние, а модули $A_{1,j}^{\pm}$ равны:

$$|A_{1,j}^{-}| = 12,07, \quad |A_{1,j}^{+}| = 11,67.$$

Значения их аргументов определяются из (2.14) и (2.15):

$$\begin{aligned} \arg A_{1,j}^{+} &= 1/2[-\lambda_1(\beta + \alpha - 2\pi) + \beta + \alpha] \\ \arg A_{1,j}^{-} &= 1,2[-\lambda_1(2\pi + \beta + \alpha) + \beta + \alpha] \end{aligned} \quad (3.2)$$

и получены с учетом $\sin 3/2\lambda_1\pi = -\lambda_1 \sin 3/2\pi$, $\sin 3/2\lambda_2\pi = \lambda_2 \sin 3/2\pi$ в (2.16).

Некоторые результаты вычислений напряжений приведены на фигуре, где показаны графики напряжений σ_x и σ_y на примыкающих к углу a_2 половинах сторон L_1 и L_2 соответственно.

Численные эксперименты показывают, что на точность удовлетворения граничного условия в окрестности угловых точек контура существенно влияет сам показатель λ_1 , определяемый из уравнения (2.16). Значениями аргументов по (3.2) можно не пользоваться, увеличивая число разбиений участков интегрирования и определяя значения коэффициентов $A_{s,j}^{\pm}$ из интегрального уравнения последовательными приближениями. К аналогичным выводам приводят результаты численных экспериментов [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Партон В. З., Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 311 с.
2. *Александров А. Я., Зиновьев Б. М., Куршин Л. М.* Об одном численном методе решения задач теории упругости с учетом особенностей напряженного состояния вблизи угловых точек и линий. — Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 3, с. 39–49.
3. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. — Тр. Моск. матем. об-ва, 1967, т. 16, с. 209–292.
4. *Мазья В. Г. и Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи конических точек. — Докл. АН СССР, 1974, т. 249, № 2, с. 286–289.
5. *Мазья В. Г. и Пламеневский Б. А.* Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда — Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе. — Math. Nachr., 1977, В. 81, S. 25–82.
6. *Донагитский Я. Б.* Про один тип сингулярных интегральных уравнений. — В кн.: Теорет. прикл. матем. Вып. 2. Львів: Изд-во Львівск. ун-та, 1963, с. 53–57.
7. *Парасюк Е. Н.* Об индексе интегрального оператора, соответствующего второй основной задаче плоской теории упругости. — Укр. матем. ж., 1964, т. 16, № 2, с. 250–253.
8. *Шелепов В. Ю.* Об индексе интегрального оператора типа потенциала в пространстве L_p . — Докл. АН СССР, 1969, т. 186, № 6, с. 1266–1268.
9. *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. — J. Appl. Mech., 1952, v. 19, No. 4, p. 526–528.
10. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
11. *Шерман Д. И.* К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных внешних силах. — Докл. АН СССР, 1940, т. 28, № 1, с. 25–28.
12. *Шерман Д. И.* К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных на границе смещениях. — Докл. АН СССР, 1940, т. 27, № 9, с. 911–913.
13. *Арсенян В. А., Заргарян С. С., Маргирисян В. Р.* О решении интегральных уравнений плоской теории упругости методом последовательных приближений. — Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 1, с. 79–83.
14. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
15. *Данилюк И. И.* Нерегулярные граничные задачи на плоскости. М.: Наука, 1975. 295 с.
16. *Радон И.* О краевых задачах для логарифмического потенциала. — Успехи матем. н., 1946, т. 1, № 3–4, с. 96–124.
4. *Механика твердого тела, № 3*

17. *Кресин Г. И., Мазья В. Г.* О существенной норме оператора типа потенциала двойного слоя в пространстве S_m .— Докл. АН СССР, 1979, т. 246, № 2, с. 272–275.
18. *Никольский С. М.* Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1943, т. 7, № 3, с. 147–163.
19. *Заргарян С. С.* Плоская задача теории упругости для односвязных областей с углами при заданных на границе внешних силах.— Докл. АН АрмССР, 1975, т. 60, № 1, с. 43–50.
20. *Sternberg E., Koiter W. T.* The wedge under a concentrated couple: a paradox in the two-dimensional theory of elasticity.— J. Appl. Mech., 1958, v. 25, No. 4, p. 575–581.

Ереван

Поступила в редакцию
24.VI.1981