МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1982

УДК 539.3

ПЛОСКАЯ ТРЕЩИНА НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА ПРИ НАЛИЧИИ ЛИНЕЙНЫХ СВЯЗЕЙ МЕЖДУ ЕЕ ПОВЕРХНОСТЯМИ

ШИФРИН Е. И.

Рассматривается плоская трещина, расположенная в упругом пространстве. Предполагается, что к поверхностям трещины приложены нормальные, симметричные относительно плоскости трещины, раскрывающие усилия, а между поверхностями трещины имеются связи. Считаем, что влияние связей можно учесть наличием нормальных усилий, закрывающих трещину и пропорциональных раскрытию трещины. Одним из примеров, соответствующих рассматриваемой модели, может служить материал с трещиной, поверхность которой пересекается большим количеством упругих армирующих элементов, имеющих небольшие размеры. Здесь закрывающие трещину усилия возникают благодаря сцеплению материала с армирующими элементами.

Доказаны теоремы сравнения для решений исследуемой задачи, вполне аналогичные имеющимся утверждениям в задаче без связей, полученным в [1, 2]. Доказана теорема сравнения по параметру, характеризующему связи. При помощи указанных утверждений получены оценки коэффициентов интенсивности напряжений при однородных нагрузках в терминах геометрических характеристик области трещины. Приведены оценки объема трещины, аналогичные оценкам объема в задаче без связей, найденным в [3]. Даны результаты численного решения задачи о дискообразной трещине при однородных нагрузках и различных характеристиках связей.

1. Постановка задачи и локальные оценки. Обозначим приложенную нагрузку $p(x, y)$, а нормальное смещение поверхности трещины — $u(x, y)$. Из сделанных предположений следует, что к поверхностям трещины приложены нормальные раскрывающие усилия, равные $q(x, y)=p(x, y)-du(x, y)$; $d\geqslant 0$ — размерный коэффициент, характеризующий связи. Обычным образом задача сводится к нахождению гармонической в полупространстве $z\geqslant 0$ функции $\Phi(x, y, z)$, где $z=0$ — плоскость расположения трещины. Пусть G — область, занимаемая трещиной. Граничные условия для функции $\Phi(x, y, z)$ принимают вид

$$\Phi(x, y, 0)=0 \quad ((x, y)\in R^2\backslash G), \quad \Phi|_\infty=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\Phi(x,y,0)}{\partial z}=-2\frac{(1-\nu^2)}{E}q(x,y) \qquad ((x,y)\in G)$$

Напомним, что $\Phi(x, y, 0)=u(x, y)$, $(x, y)\in G$. Переходя к уравнению для смещения поверхности трещины, получим

$$p_G\Lambda u=2(1-\nu^2)E^{-1}[p(x, y)-du(x, y)], \tag{1.2}$$

$$u(x, y)=0 \quad ((x, y)\in R^2\backslash G)$$

(определение оператора $p_G\Lambda$ см. в [3]). Нетрудно видеть, что при $p(x, y)\in H_{-1/2}(G)$ уравнение (1.2) имеет и единственное решение в пространстве $H_{1/2}^0(G)$. Определение пространств $H_s^0(G)$ и $H_s(G)$ см. в [4].

Теорема 1. Предположим, что $p(x, y)\geqslant 0$ в G и $p(x, y)\not\equiv 0$, тогда $u(x, y)>0$ внутри G для любого $d\geqslant 0$.

Доказательство. Воспользуемся формулировкой задачи (1.1). Обозначим гармоническую функцию $U(x, y, z)$, при этом $U(x, y, 0)=u(x, y)$. Допустим, что утверждение теоремы 1 неверно. В этом случае найдется точка $(x, y)\in G$, где $u(x, y)\leqslant 0$. Если обозначить точку, в которой $u(x, y)$ достигает минимума через (x_0, y_0), то $(x_0, y_0)\in G$ и $u(x_0, y_0)\leqslant 0$. В силу этого и, учитывая, что $p(x_0, y_0)\geqslant 0$, получим $\partial U(x_0, y_0, 0)/\partial z=-2(1-\nu^2)E^{-1}[p(x_0, y_0)-dU(x_0, y_0, 0)]\leqslant 0$, что противоречит усиленному принципу максимума Хопфа для гармонических функций, поскольку $U(x, y, z)$ должна достигать минимума в точке $(x_0, y_0, 0)$. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть область $D\subset D_1$, $p(x, y)\geqslant 0$ в D_1. Обозначим через $u(x, y)$ и $u_1(x, y)$ нормальные смещения поверхностей трещин, занимающих области D и D_1 соответственно, тогда $u_1(x, y)\geqslant u(x, y)$.

Доказательство. Обозначим через $U(x, y, z)$ и $U_1(x, y, z)$ гармонические в $R_+{}^3$ функции, соответствующие u и u_1

$$\partial U(x, y, 0)/\partial z=-2(1-\nu^2)E^{-1}[p(x, y)-dU(x, y, 0)] \quad ((x, y)\in D)$$
$$\partial U_1(x, y, 0)/\partial z=-2(1-\nu^2)E^{-1}[p(x, y)-dU_1(x, y, 0)] \quad ((x, y)\in D_1)$$

Рассмотрим гармоническую функцию $V(x, y, z)=U_1(x, y, z)-U(x, y, z)$. Согласно условиям задачи $V(x, y, 0)=0$ $((x, y)\in D_1)$, $V|_\infty=0$. В силу теоремы 1 $V(x, y, 0)=u_1(x, y)>0$ $((x, y)\in D_1\backslash D)$. Обозначим $V(x, y, 0)=$ $=v(x, y)$. Если минимум $v(x, y)$ достигается в точке $(x_0, y_0)\in D$ и $v(x_0, y_0)\leqslant 0$, то

$$\frac{\partial V(x_0, y_0, 0)}{\partial z}=-\frac{2(1-\nu^2)}{E}[-dV(x_0, y_0, 0)]=\frac{2d(1-\nu^2)}{E}v(x_0, y_0)\leqslant 0$$

что противоречит усиленному принципу максимума. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 2 остается справедливой, если не требовать условия $p(x, y)\geqslant 0$ в D_1, но предположить, что $u_1(x, y)\geqslant 0$. Отметим также, что доказательства теорем 1, 2 остаются без изменения в случае $d=d(x, y)\geqslant 0$.

Теорема 3. Пусть $u(x, y)$ — решение задачи (1.2) в области G с параметром d, а $u_1(x, y)$ — решение задачи (1.2) в области G с параметром d_1, причем $0\leqslant d\leqslant d_1$. Предполагается, что $p(x, y)\geqslant 0$ в G, $p(x, y)\not\equiv 0$. Тогда $u_1(x, y)<u(x, y)$ внутри G.

Доказательство. Допустим $U(x, y, z)$, $U_1(x, y, z)$ — гармонические в $R_+{}^3$ функции, соответствующие $u(x, y)$ и $u_1(x, y)$. Рассмотрим гармоническую функцию $V(x, y, z)=U_1(x, y, z)-U(x, y, z)$:

$$V|_\infty=0,\ V(x, y, 0)=0\ ((x, y)\in R^2\backslash G),\ V(x, y, 0)=v(x, y)$$
$$\partial V(x, y, 0)/\partial z=-2(1-\nu^2)E^{-1}[-d_1U_1(x, y, 0)+dU(x, y, 0)] \quad ((x, y)\in G)$$

Если утверждение теоремы неверно, то, обозначая (x_0, y_0) точку, в которой $v(x, y)$ достигает максимума, получим

$$v(x_0, y_0)\geqslant 0\ ((x_0, y_0)\in G)\ \partial V(x_0, y_0, 0)/\partial z=2(1-\nu^2)E^{-1}[d_1U_1(x_0, y_0, 0)-$$
$$-dU(x_0, y_0, 0)]\geqslant 2(1-\nu^2)dE^{-1}[U_1(x_0, y_0, 0)-U(x_0, y_0, 0)]=$$
$$=2(1-\nu^2)dE^{-1}v(x_0, y_0)\geqslant 0$$

Здесь было учтено, что в силу сделанных предположений и теоремы 1 $U_1(x, y, 0)\geqslant 0$. Поскольку $\partial V(x_0, y_0, 0)/\partial z\geqslant 0$, приходим в противоречие с тем, что $V(x, y, z)$ достигает максимума, в точке $(x_0, y_0, 0)$. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 3 остается справедливой, если не требовать условия $p(x, y)\geqslant 0$ в G, но предположить, что $u_1(x, y)\geqslant 0$ либо $u(x, y)\geqslant 0$.

Доказательство теоремы 3 также без изменения проходит в случае

$$0\leqslant d=d(x, y)\leqslant d_1(x, y)=d_1$$

Теоремы 1—3 позволяют находить двусторонние локальные оценки решения задачи, если известны решения для других областей, значений d и нагрузок $p(x, y)$ (о применении теорем сравнения подробнее см. в [2]).

В качестве следствия теорем 1, 2 получим изопериметрические оценки коэффициентов интенсивности напряжений для выпуклых областей G при однородной нагрузке $p=\mathrm{const}>0$ в терминах геометрических характеристик области. Поскольку $p>0$, из теорем 1, 2 следует, что коэффициенты интенсивности положительны и если $G_0\subset G\subset G_1$, причем границы всех областей касаются в точке M, то коэффициенты интенсивности напряжений в этой точке для областей G_0, G, G_1 связаны неравенствами $N_{G_0}(M)\leqslant \leqslant N_G(M)\leqslant N_{G_1}(M)$, где $N_{G_i}(M)$ — коэффициент интенсивности напряжений в точке M для области G_i. Доказанное свойство позволяет в рассматриваемой задаче использовать прием, примененный в [5] для оценки модуля градиента решения уравнения Пуассона. Пусть G — выпуклая область и кривизна кривой ∂G изменяется в пределах $0<k_{\min}\leqslant k_{\max}$. Согласно результатам [6], для любой точки $M\in\partial G$ всегда можно вписать в G круг радиуса r и описать вокруг G круг радиуса R, касающиеся ∂G в точке M, причем $r\geqslant k_{\max}^{-1}=r_{\min}$, $R\leqslant k_{\min}^{-1}=r_{\max}$.

В силу этого получаем

$$N_{r_{\min}}\leqslant N_G(M)\leqslant N_{r_{\max}} \tag{1.3}$$

где $N_{r_{\min}}, N_{r_{\max}}$ — коэффициенты интенсивности напряжений для кругов радиусов $r_{\min}$ и $r_{\max}$ при нагрузке p.

Из (1.3) следует, что

$$N_{r_{\min}}\leqslant N_{G_{\min}}\leqslant N_{G_{\max}}\leqslant N_{r_{\max}} \tag{1.4}$$

где $N_{G_{\min}}$ и $N_{G_{\max}}$ — минимальное и максимальное значения коэффициентов интенсивности напряжений для трещины, занимающей область G. Неравенства (1.3) и (1.4) являются изопериметрическими, так как в случае круговой области G переходят в равенства. Если связи отсутствуют, т. е. $d=0$, то неравенство (1.4) принимает вид

$$\sqrt{2}\,p\pi^{-1}r_{\min}^{1/2}\leqslant N_{G_{\min}}\leqslant N_{G_{\max}}\leqslant \sqrt{2}\,p\pi^{-1}r_{\max}^{1/2} \tag{1.5}$$

2. Оценка объема трещины. Обозначим $2(1-\nu^2)E^{-1}d=d_0$,

$$2(1-\nu^2)E^{-1}p(x,y)=p_0(x,y), \qquad \int\limits_G u(x,y)\,dx\,dy=I_u$$

Уравнение (1.2) примет вид

$$p_G\Lambda u+d_0u=p_0(x,y) \qquad (u\in H_{1/2}{}^0(G)) \tag{2.1}$$

$$(p_G\Lambda u+d_0u,\ u)=(p_0,\ u)\leqslant\|p_0\|\,\|u\| \tag{2.2}$$

Здесь $(\ldots,\ldots)$ и $\|\ldots\|$ — скалярное произведение и норма в $L_2(G)$. Из (2.2) получим

$$(\Lambda u,\ u)+d_0\|u\|^2\leqslant\|p_0\|\,\|u\| \tag{2.3}$$

По доказанному в [3]:

$$(\Lambda u,\ u)\geqslant\lambda_1(G)\,\|u\|^2\geqslant\lambda_1(\mathrm{cir}_R)\,\|u\|^2 \tag{2.4}$$

где $\lambda_1(G)$ — минимальное собственное число оператора $p_G\Lambda$, cir_R — круг радиуса R, $R=\sqrt{S/\pi}$, $S=\mu(G)$. В [3] показано, что

$$\lambda_1(\mathrm{cir}_R)=R^{-1}\lambda_1(\mathrm{cir}_1)=\sqrt{\pi/S}\,\lambda_1(\mathrm{cir}_1)\approx2\sqrt{\pi/S} \tag{2.5}$$

Из (2.3)—(2.5) следует

$$(\sqrt{\pi/S}\,\lambda_1(\mathrm{cir}_1)+d_0)\,\|u\|\leqslant\|p_0\|$$

$$\|u\|\leqslant\|p_0\|\,(\sqrt{\pi/S}\,\lambda_1(\mathrm{cir}_1)+d_0)^{-1} \tag{2.6}$$

Так как $I_u \leqslant \sqrt{S}\|u\|$, то, используя (2.6), получаем оценку объема трещины сверху

$$V_c = 2I_u \leqslant 2\sqrt{S}\|p_0\|(\sqrt{\pi/S}\lambda_1(\mathrm{cir}_1)+d_0)^{-1} \tag{2.7}$$

Оценка (2.7) применима для произвольной нагрузки $p(x, y)$. В случае однородной нагрузки $p=\mathrm{const}$ можно получить более точную оценку объема сверху. Для этого запишем вариационную формулировку уравнения (2.1). Заметим, что форма $(p_G\Lambda u+d_0u, v)$ положительно определена в $\overset{\circ}{H}_{1/2}(G)$ и порождает норму, эквивалентную обычной норме в пространстве $\overset{\circ}{H}_{1/2}(G)$. Обозначим скалярное произведение, соответствующее введенной норме через $\{u, v\}=(p_G\Lambda u+d_0u, v)$ $(u, v\in \overset{\circ}{H}_{1/2}(G))$. Пусть $w(x, y)$ – решение уравнения (2.1) при $p_0=1$. При помощи неравенства Шварца имеем

$$\{w, v\}^2=I_v^2 \leqslant \{w, w\}\{v, v\}=I_w(p_G\Lambda v+d_0v, v) \tag{2.8}$$

Из (2.8) следует, что $w(x, y)$ реализует минимум функционала

$$q_0(G)=\inf_{v\in H^0_{1/2}(G)}[(\Lambda v, v)+d_0\|v\|^2]I_v^{-2} \tag{2.9}$$

$$[(\Lambda v, v)+d_0\|v\|^2]I_v^{-2}=(K_V+d_0\|v\|^2)I_v^{-2}$$

$$K_V=\int_{R_+^3}|\mathrm{grad}\, V(x,y,z)|^2\,dx\,dy\,dz, \qquad V(x,y,0)=v(x,y), \qquad V|_\infty=0$$

где $V(x, y, z)$ – гармоническая в R_+^3 функция.

Лемма 1. Среди всех областей площади S функционал $q_0(G)$ достигает минимума на круге.

Доказательство. Пусть $W(x, y, z)$ – гармоническая в R_+^3 функция, соответствующая $w(x, y)$. В силу теоремы 1 $w(x, y)>0$ в G и, следовательно, $W(x, y, z)>0$ в R_+^3. Поэтому к $W(x, y, z)$ можно применить симметризацию функции, использованную в [3]. Такая симметризация не изменит величины $\|w\|^2$, I_w и уменьшит K_W. В силу этого, применяя ту же схему доказательства, что и в [3], придем к утверждению леммы. Из леммы 1 следует, что при однородной нагрузке объем трещины, занимающей область G, не превосходит объема круговой трещины той же площади. Для оценки объема снизу отметим, что

$$(p_0, u)=\sup_{v\in H^0_{1/2}(G)}(p_0, v)^2[(\Lambda v, v)+d_0\|v\|^2]^{-1} \tag{2.10}$$

где u – решение уравнения (2.1). Доказательство формулы (2.10) проводится аналогично доказательству формулы (2.9). Для любого $v\in \overset{\circ}{H}_{1/2}(G)$:

$$(p_0, v)^2=\{u, v\}^2 \leqslant \{u, u\}\{v, v\}=(p_0, u)[(\Lambda v, v)+d_0\|v\|^2]$$

Отсюда получаем формулу (2.10). Выражение (2.10) позволяет оценивать снизу величину (p_0, u) с помощью выбора различных пробных функций $v(x, y)\in \overset{\circ}{H}_{1/2}(G)$. Если $p_0(x, y)\geqslant 0$, то

$$u(x,y)>0, \qquad \int_G p_0(x,y)u(x,y)\,dx\,dy \leqslant \frac{1}{2}p_{0_{\max}}V_c$$

где V_c – объем трещины. Следовательно

$$V_c \geqslant 2p_{0\max}^{-1}\sup_{v\in H^0_{1/2}(G)}(p_0, v)^2[(\Lambda v, v)+d_0\|v\|^2]^{-1} \tag{2.11}$$

Если $p_0(x, y) \geqslant p_{0_{\min}} > 0$, то можно получить другую оценку

$$V_c = 2I_u = 2\{w, u\} = 2\int_G p_0(x, y)\,w(x, y)\,dx\,dy \geqslant 2p_{0_{\min}} I_w \geqslant$$
$$\geqslant 2p_{0_{\min}} \sup_{v \in \overset{\circ}{H}_{1/2}(G)} I_v^2 [(\Lambda v, v) + d_0 \|v^2\|]^{-1}$$

где $w(x, y)$ — решение задачи (2.1) при $p_0 = 1$.

Для упрощения вычислений можно учесть, что $\overset{\circ}{H}_1(G) \subset \overset{\circ}{H}_{1/2}(G)$, и $(\Lambda v, v) \leqslant (-\Delta v, v)^{1/2} \|v\|$ для $v \in \overset{\circ}{H}_1(G)$

Поэтому будем иметь

$$\sup_{v \in \overset{\circ}{H}_{1/2}(G)} (p_0, v)^2 [(\Lambda v, v) + d_0 \|v\|^2]^{-1} \geqslant \sup_{v \in \overset{\circ}{H}_1(G)} (p_0, v)^2 [(-\Lambda v, v)^{1/2} \|v\| +$$
$$+ d_0 \|v\|^2]^{-1}$$

3. Численное решение задачи в случае дискообразной трещины. 3.1. Пусть действует однородная нагрузка $p = \text{const}$. Покажем сначала, что для решения задачи в произвольном круге при различных значениях p_0 и d_0 достаточно знать решения для круга единичного радиуса с $p_0 = 1$ при различных значениях d_0. Действительно, пусть u_{t_0} – решение задачи

$$p_{\text{cir}_1} \Lambda u_{t_0} + t_0 u_{t_0} = 1 \qquad (u_{t_0} \in \overset{\circ}{H}_{1/2}(\text{cir}_1)) \tag{3.1}$$

Соответствующий коэффициент интенсивности напряжений обозначим N_{t_0}. Предположим, что u – решение уравнения $p_{\text{cir}_R} \Lambda u + d_0 u = p_0$ $(u \in \overset{\circ}{H}_{1/2}(\text{cir}_R))$.

Сделаем преобразование координат $\mathbf{x}' = R\mathbf{x}$. Поскольку $\mathbf{x}' \in \text{cir}_R$, следовательно, $\mathbf{x} \in \text{cir}_1$. Обозначим $u(\mathbf{x}') = u(R\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})$; так как $u(\mathbf{x}') \in \overset{\circ}{H}_{1/2}(\text{cir}_R)$, то $v(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{H}_{1/2}(\text{cir}_1)$. При указанной замене переменных выражение $p_{\text{cir}_R} \Lambda u$ перейдет в выражение $R^{-1} p_{\text{cir}_1} \Lambda v$. Таким образом, v удовлетворяет уравнению $p_{\text{cir}_1} \Lambda v + R d_0 v = R p_0$.

Очевидно, коэффициент интенсивности для v равен $p_0 R N_{Rd_0}$. Поскольку преобразование $\mathbf{x}' = R\mathbf{x}$ конформно, то нетрудно получить значение коэффициента интенсивности исходной задачи (обозначим его N):

$$u(\mathbf{x}') \approx \text{const}\, N \sqrt{s_B}, \quad u(\mathbf{x}') = v(\mathbf{x}) \approx \text{const}\, p_0 R N_{Rd_0} \sqrt{s_M}$$

Здесь точки $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}$ близки к границам кругов cir_R, cir_1 соответственно; s_B, s_M – расстояния до границ в cir_R и cir_1 (расстояния до границ берутся по радиусам). Поскольку $s_B = R s_M$, то $N(R s_M)^{1/2} = p_0 R N_{Rd_0} s_M^{1/2}$. Окончательно имеем

$$N = p_0 \sqrt{R} N_{Rd_0} \tag{3.2}$$

Соотношение между нормальными смещениями $u(\mathbf{x}') = p_0 R u_{Rd_0}(\mathbf{x})$. Учитывая его, получаем соотношение между объемами трещин

$$V_c = 2\int_{\text{cir}_R} u(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}' = 2\int_{\text{cir}_1} p_0 R u_{Rd_0}(\mathbf{x}) R^2\,d\mathbf{x} = p_0 R^3 V_{Rd_0} \tag{3.3}$$

где V_c – объем трещины рассматриваемой задачи, V_{Rd_0} – объем трещины, соответствующий задаче (3.1) с $t_0 = Rd_0$.

3.2. В силу указанных свойств далее считаем, что область трещины является единичным кругом и $p_0 = 1$. Так как задача осесимметрична, то решение (3.1) $u_{t_0}(\mathbf{x}) = u_{t_0}(r)$, $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$. Известен вид решения уравнения (см., например [7]):

$$p_{\text{cir}_1} \Lambda u = f(r) \quad (u \in \overset{\circ}{H}_{1/2}(\text{cir}_1)), \quad u(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\rho} f\left(\sqrt{r^2 \sin^2\alpha + y^2}\right) dy\, d\alpha$$
$$(\rho = \sqrt{1 - r^2} \sin\alpha) \tag{3.4}$$

В данном случае $f(r) = 1 - t_0 u(r)$. Таким образом, (3.4) позволяет получить следующее уравнение для решения задачи (3.1):

$$u_{t_0}(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\rho} [1 - t_0 u_{t_0}(\sqrt{r^2 \sin^2\alpha + y^2})]\,dy\,d\alpha =$$

$$=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-r^2}-\frac{2t_0}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\rho}u_{t_0}(\sqrt{r^2\sin^2\alpha+y^2})\,dy\,d\alpha \tag{3.5}$$

Выберем в cir_1 ортонормированную систему функций, которая полна для функций, зависящих от r. Пусть выбранная система $\varphi_1(r)$, $\varphi_2(r),\cdots$, $\varphi_n(r),\cdots$. Обозначим n-мерное пространство, натянутое на φ_1, $\varphi_2,\cdots\varphi_n$, через Π_n. Приближение u_{t_0} в Π_n обозначим $u_n(r)$ $(u_n(r)=\Sigma a_m\varphi_m(r))$. Приближение $2\pi^{-1}(1-r^2)^{1/2}$ представим в виде $\Sigma b_m\varphi_m(r)$. Из уравнения (3.5) получим

$$\Sigma a_m\varphi_m=\Sigma b_m\varphi_m-\frac{2t_0}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\rho}\Sigma a_m\varphi_m(\sqrt{r^2\sin^2\alpha+y^2})\,dy\,d\alpha \tag{3.6}$$

Введем следующие обозначения:

$$G^{\vee}q=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\rho}q(\sqrt{r^2\sin^2\alpha+y^2})\,dy\,d\alpha,\qquad (G^{\vee}\varphi_m,\varphi_p)=\gamma_{mp}$$

Из (3.6) найдем систему линейных уравнений для определения a_k:

$$a_p=b_p-t_0\gamma_{mp}a_m\quad (p,\ m=1,\cdots,\ n) \tag{3.7}$$

$$t_0\gamma_{pm}a_m+a_p=b_p,\quad b_m=(2\pi^{-1}\sqrt{1-r^2},\ \varphi_m)$$

где t_0 – параметр, который варьируется при численном решении. Для конкретной реализации в качестве φ_k брались функции $\varphi_k(r)=\sin(k\pi r)/(\pi r)^{1/2}$. В задаче без связей коэффициент интенсивности напряжений для единичного круга при осесимметричной нагрузке $q(r)$ равен [8]:

$$N=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^1\frac{rq(r)}{\sqrt{1-r^2}}\,dr$$

В данном случае

$$N_{t_0}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^1\frac{r[p-tu_{t_0}(r)]}{\sqrt{1-r^2}}\,dr=\frac{\sqrt{2}E}{\pi2(1-\nu^2)}\int\limits_0^1\frac{r[p_0-t_0u_{t_0}(r)]}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\approx$$

$$\approx\frac{E}{(1-\nu^2)\sqrt{2}\pi}\int\limits_0^1\frac{r[1-t_0\Sigma a_m\sin(m\pi r)/\sqrt{\pi r}]}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\qquad (m=1,\ldots,n) \tag{3.8}$$

Сделаем замену переменных $r=\sin\alpha$. В результате получим

$$N_{t_0}\approx\frac{E}{1-\nu^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\left[1-\frac{t_0}{\sqrt{\pi}}\Sigma a_m\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{\sin\alpha}\,\sin(m\pi\sin\alpha)\,d\alpha\right]\right\} \tag{3.9}$$

Заметим, что выражения (3.8), (3.9) действительно дают приближение значения N_{t_0}, поскольку

$$\left|\int\limits_0^1\frac{ru_{t_0}(r)}{\sqrt{1-r^2}}\,dr-\int\limits_0^1\frac{r\Sigma a_m\sin(m\pi r)/\sqrt{\pi r}}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\right|=$$

$$=\left|\int\limits_0^1\frac{\sqrt{r}[\sqrt{r}\,u_{t_0}(r)-\Sigma a_m\sin(m\pi r)/\sqrt{\pi}]}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^1 r^{1/2}(1-r^2)^{-1/2}\left|\sqrt{r}\,u_{t_0}(r)-\Sigma\frac{a_m}{\sqrt{\pi}}\sin(m\pi r)\right|dr\leqslant\varepsilon'\int\limits_0^1 r^{1/2}(1-r^2)^{-1/2}\,dr<\varepsilon$$

t_0	N'_{t_0}	V_{t_0}	t_0	N'_{t_0}	V_{t_0}	t_0	N'_{t_0}	V_{t_0}
0	0,2251	2,648	3,6	0,1277	0,991	10,6	0,0869	0,458
0,4	0,2016	2,225	4,0	0,1235	0,928	11,4	0,0847	0,431
0,8	0,1844	1,920	4,4	0,1198	0,873	12,2	0,0827	0,408
1,2	0,1710	1,691	4,8	0,1164	0,824	13,0	0,0809	0,387
1,6	0,1604	1,511	5,2	0,1133	0,780	13,8	0,0792	0,368
2,0	0,1516	1,367	5,6	0,1106	0,740	26,0	0,0641	0,211
2,4	0,1442	1,248	8,2	0,0953	0,561	27,6	0,0629	0,200
2,8	0,1379	1,148	9,0	0,0922	0,521	30,0	0,0613	0,185
3,2	0,1325	1,064	9,8	0,0894	0,487	33,6	0,0593	0,167

Величина $|\sqrt{r}u_{t_0}(r)-\Sigma a_m \sin(m\pi r)/\sqrt{\pi}|$ может быть сделана меньше ε' для любого заданного $\varepsilon'>0$ при достаточно большом n, так как по построению $a_m\pi^{-1/2}$ являются коэффициентами разложения функции $r^{1/2}u_{t_0}(r)$ в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0, 1]$; $r^{1/2}u_{t_0}(r)$ – гладкая функция в интервале $(0, 1)$. Функция $r^{1/2}u_{t_0}(r)=0$ при $r=0$ и $r=1$ и имеет в этих точках корневую особенность. Поэтому ряд Фурье сходится к $r^{1/2}u_{t_0}(r)$ равномерно. В таблице представлены зависимости V_{t_0} и

$$N_{t_0}' = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\left[1-\frac{t_0}{\sqrt{\pi}}\Sigma a_m\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{\sin\alpha}\,\sin(m\pi\sin\alpha)\,d\alpha\right]$$

от параметра t_0 ($N_{t_0}=E(1-\nu^2)^{-1}N_{t_0}'$).

Для получения коэффициента интенсивности напряжений N и объема V_c при заданных значениях p, R и d необходимо определить по таблице значения N_{t_0}' и V_{t_0} при $t_0=Rd_0$, положить $N_{t_0}=E(1-\nu^2)^{-1}N_{t_0}'$ и получить окончательные результаты по формулам (3.2), (3.3).

Автор признателен Р. В. Гольдштейну и М. М. Холмянскому за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдштейн Р. В., Ентов В. М.* Вариационные оценки для коэффициента интенсивности напряжений на контуре плоской трещины нормального разрыва.– Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3, с. 59–64.
2. *Goldstein R. V., Entov V. M.* Variational bounds and qualitative methods in fracture mechanics.– In: Advances in Research on the Strength and Fracture Materials. V. 4. New York: Pergamon Press, 1978, p. 93–121.
3. *Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И.* Изопериметрические неравенства и оценки некоторых интегральных характеристик решения пространственной задачи теории упругости для тела с плоскими трещинами нормального разрыва.– Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 2, с. 68–79.
4. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 232 с.
5. *Bandle C.* On isoperimetric gradient bounds for Poisson problems and problems of torsional creep.– Z. angew. Math. und Phys., 1979, v. 30, No. 4, p. 713–715.
6. *Бляшке В.* Круг и шар. М.: Наука, 1967. 232 с.
7. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наукова думка, 1968. 246 с.
8. *Парис П., Си Дж.* Анализ напряженного состояния около трещин.– В кн.: Прикладные вопросы вязкости разрушения. М.: Мир, 1968, с. 64–142.

Москва

Поступила в редакцию
12.III.1980