МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1982

УДК 539.3

ПРИНЦИП ГИББСА И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ТЕЛ

ГРИНФЕЛЬД М. А.

Предлагается новая процедура получения термодинамических неравенств из принципа Гиббса, позволяющая наряду с жидкими рассматривать также твердые упругие среды. Формулируется понятие об устойчивости среды по Гиббсу, которое в случае жидкости сводится к выполнению классических термодинамических неравенств. Показывается, что акустический тензор устойчивого нелинейно-упругого материала имеет три неотрицательных собственных значения для любого направления распространения адиабатических волн ускорений. Получены термодинамические неравенства, характеризующие устойчивую изотропную нелинейно-упругую среду в любой неискаженной конфигурации.

Проблема получения априорных соотношений, которым должны удовлетворять параметры наблюдаемых в природе веществ, является одной из центральных в механике сплошной среды [1]. Основой получения таких неравенств для идеальных сред может служить принцип Гиббса: «Для равновесия любой изолированной системы необходимо и достаточно, чтобы при всех возможных изменениях состояния системы, не влияющих на ее энтропию, вариация энергии ее исчезала или была положительна» [2]. Хотя формулировка Гиббса оставляет значительный произвол в трактовке понятий «изолированности», «системы», «возможных изменений», ясно, что речь идет об исследовании изопериметрической вариационной задачи для функционала энергии, причем роль обобщенного изопериметрического условия играет постоянство полной энтропии системы. В работе [2] Гиббс в общем виде наметил также путь получения априорных неравенств, который в дальнейшем получил широкое распространение в физической и химической литературе (современное изложение метода Гиббса можно найти, например, в [3]). Метод Гиббса связан с введением химического потенциала фазы, и, возможно, именно поэтому перенесение метода с жидких систем на твердые упругие оказался неожиданно сложным: химический потенциал упругой негидростатически напряженной (даже однокомпонентной!) фазы является конструкцией значительно более сложной, чем химический потенциал жидкости [4, 5].

Другая методика нахождения априорных термодинамических неравенств для твердых упругих сред, приводящая к иным результатам, была предложена в [6]: метод Колемана и Нолла не связан с введением химического потенциала, но существенно использует положения, близкие принципу Гиббса.

1. Обозначим через x^i ($i=1, 2, 3$) лагранжевы (материальные) координаты точек нелинейно-упругого тела. Пусть $\mathring{x}_{ij}(x)$, $\mathring{x}^{ij}(x)$ — метрический тензор начальной конфигурации, с помощью которого опускаются и поднимаются индексы, а также осуществляется ковариантное дифференцирование, обозначаемое латинским индексом после вертикальной черты. Состояние упругой среды задано, если известны компоненты поля перемещений по базису начальной конфигурации $u^i(x)$ и массовая плотность энтропии $\eta(x)$. Пусть плотность массы в начальной конфигурации будет $m(x)$, а массовая плотность внутренней энергии в точке x^i задается дважды непрерывно дифференцируемой функцией $e(x, u_{i|j}, \eta)$.

Пусть полная энергия рассматриваемой изолированной системы определяется выражением

$$E=\int\limits_{\omega} d\omega\, m e(x, u_{k|l}(x), \eta(x)) \tag{1.1}$$

где ω — область, занимаемая телом в начальной конфигурации.

Массовые и поверхностные силы считаются отсутствующими. На части σ_1 границы тела σ заданы перемещения

$$u^i|_{\sigma_1}=U^i \tag{1.2}$$

а на остальной части поверхности $\sigma-\sigma_1$ «возможные» перемещения произвольны.

Применение критерия Гиббса сводится к исследованию минимума полной энергии E при дополнительном условии постоянства полной энтропии S, которая, по предположению, аддитивна

$$S=\int\limits_{\omega} d\omega m\eta(x) \tag{1.3}$$

Задача об условном экстремуме функционала (1.1) при дополнительном условии (1.3) использованием метода множителей Лагранжа (см., например, [7]) сводится к исследованию безусловного экстремума функционала

$$J=\int\limits_{\omega} d\omega m e(x, u_{k|l}, \eta)+\Lambda\int\limits_{\omega} d\omega m\eta \tag{1.4}$$

где константа Λ — неопределенный множитель Лагранжа.

Из условия обращения в нуль первой вариации функционала J приходим к следующим необходимым условиям экстремума (уравнениям равновесия):

$$\frac{\partial e(x, \overset{\circ}{u}_{k|l}, \eta^\circ)}{\partial\eta}=\Theta^\circ=-\Lambda \tag{1.5}$$

$$\left[m\frac{\partial e(x, \overset{\circ}{u}_{k|l}, \eta^\circ)}{\partial u_{i|j}}\right]_{|j}=p_{|j}{}^{ji}(x, \overset{\circ}{u}_{k|l}, \eta^\circ)=0 \tag{1.6}$$

$$p^{\circ ji}|_{\sigma-\sigma_1}n_j=0 \tag{1.7}$$

где Θ — абсолютная температура, p^{ji} — тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа, n_j — поле единичных нормалей к граничной поверхности σ в начальной конфигурации. Градусами обозначены объекты, характеризующие рассматриваемое равновесное состояние.

Найдем необходимые условия неотрицательности второй вариации функционала E на состояниях, стесненных изопериметрическим условием (1.3). Но на таких состояниях функционалы E и J различаются константой, поэтому будем разыскивать вторую вариацию функционала J в точке, соответствующей равновесному состоянию. Для этого «погрузим» рассматриваемое состояние в однопараметрическое семейство «возможных» состояний $u^i(x, \tau)$, $\eta(x, \tau)$, так, чтобы равновесному состоянию $u^{\circ i}$, η° соответствовало значение времениподобного параметра τ, равное нулю. В рассматриваемой задаче в класс «возможных» естественно включить все состояния, дважды непрерывно дифференцируемые по своим аргументам и удовлетворяющие граничным условиям (1.2). Подставляя однопараметрическое семейство в функционал (1.4) и дифференцируя полученное соотношение дважды по τ, получаем

$$\begin{aligned}\frac{d^2J(\tau)}{d\tau^2}=\int\limits_{\omega} d\omega m\Bigg\{&e^{ijkl}\frac{\partial u_{i|j}(x,\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial u_{k|l}(x,\tau)}{\partial\tau}+2e_\eta{}^{ij}\frac{\partial u_{i|j}(x,\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial\eta(x,\tau)}{\partial\tau}+\\&+e_{\eta\eta}\frac{\partial\eta(x,\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial\eta(x,\tau)}{\partial\tau}+e^{ij}\frac{\partial^2u_{i|j}(x,\tau)}{\partial\tau^2}+(\Lambda+e_\eta)\frac{\partial^2\eta(x,\tau)}{\partial\tau^2}\Bigg\}\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$e^{ijkl}(x,\tau)=\frac{\partial^2e(x, u_{k|l}(x,\tau), \eta(x,\tau))}{\partial u_{i|j}\,\partial u_{k|l}},\qquad e_\eta{}^{ij}(x,\tau)=\frac{\partial^2e(x, u_{k|l}(x,\tau), \eta(x,\tau))}{\partial u_{i|j}\,\partial\eta}$$

Производя в (1.8) интегрирование по частям и используя соотношения (1.5)—(1.7), будем иметь

$$\delta^2 J = \left.\frac{d^2 J(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0} = \int_\omega d\omega m (e^{\circ ijkl} a_{i|j} a_{k|l} + 2 e_\eta{}^{\circ ij} a_{i|j} b + e_{\eta\eta}{}^\circ b^2) \tag{1.9}$$

$$e^{\circ ijkl}(x) = e^{ijkl}(x, 0), \quad e_\eta{}^{\circ ij}(x) = e_\eta{}^{ij}(x, 0), \quad a_i(x) = \left.\frac{\partial u_i(x, \tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0},$$

$$b(x) = \left.\frac{\partial \eta(x, \tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}$$

Подставляя поля $u^i(x, \tau)$, $\eta(x, \tau)$ в соотношения (1.2), (1.3) и дифференцируя по τ, получаем при $\tau=0$

$$a_i|_{\sigma_1} = 0, \qquad \int_\omega d\omega m b = 0 \tag{1.10}$$

2. Условия, сформулированные в принципе Гиббса, нарушатся, если найдутся ненулевые вариации перемещений $\delta u_i(x) = a_i$ и энтропии $\delta\eta(x) = b(x)$, удовлетворяющие условиям (1.10), при которых выполняется соотношение $\delta^2 J < 0$.

Рассмотрим экстремальные значения функционала $\delta^2 J$ при ограничениях (1.10) на единичной сфере

$$\int_\omega d\omega (x^{ij} a_i a_j + \varkappa^2 b^2) = 1 \tag{2.1}$$

где $\varkappa^2$ — некоторая положительная размерная константа.

Экстремум функционала (1.9) при дополнительных условиях (1.10), (2.1) изопериметрического типа будем искать методом множителей Лагранжа [7]. При этом вопрос сводится к исследованию безусловного экстремума функционала П (в дальнейшем нулики опущены)

$$\Pi = \int_\omega d\omega [m (e^{ijkl} a_{i|j} a_{k|l} + 2 e_\eta{}^{ij} a_{i|j} b + e_{\eta\eta} b^2 + 2\pi_1 b) - \pi_2 (x^{ij} a_i a_j + \varkappa^2 b^2)] \tag{2.2}$$

на множестве полей, удовлетворяющих граничному условию в (1.10) (здесь $2\pi_1$ и $-\pi_2$ — соответствующие множители Лагранжа). Варьирование функционала (2.2) приводит к следующим уравнениям Эйлера:

$$(m e^{ijkl} a_{k|l} + m e_\eta{}^{ij} b)_{|j} + \pi_2 a^i = 0 \tag{2.3}$$

$$m e_\eta{}^{ij} a_{i|j} + m\pi_1 + (m e_{\eta\eta} - \pi_2 \varkappa^2) b = 0 \tag{2.4}$$

На свободной части поверхности тела $\sigma - \sigma_1$ должно выполняться естественное краевое условие

$$m (e^{ijkl} a_{k|l} + e_\eta{}^{ij} b)|_{\sigma-\sigma_1} n_j = 0 \tag{2.5}$$

Рассмотрим второе соотношение в (1.10) и уравнения (2.3), (2.4) с граничными условиями (1.10), (2.5) как систему уравнений для нахождения векторного поля $a_i(x)$, скалярного поля $b(x)$ и числа π_1. Эта линейная однородная задача всегда имеет тривиальное решение $a_i(x) = b(x) = \pi_1 = 0$. Однако, чтобы удовлетворить условию (2.1) требуется найти нетривиальное решение этой задачи. Значения π_2, при которых также нетривиальные решения существуют, назовем спектральными. В частности, следующее утверждение показывает, что не все значения π_2 являются спектральными.

Спектральные значения π_2 вещественны.

Доказательство. Пусть π_2 принадлежит спектру, а функции $a_i(x)$, $b(x)$, π_1 — соответствующее нетривиальное решение линейной однородной задачи. Уравнение (2.3) свернем с $\bar{a}_i(x)$ и проинтегрируем по объему (чертой сверху обозначается комплексное сопряжение)

$$\int_\omega d\omega\,(me^{ijkl}a_{k|l})_{|j}\bar{a}_i=-\int_\omega d\omega\,[(me_\eta{}^{ij}b)_{|j}+\pi_2 a^i]\bar{a}_i \qquad (2.6)$$

Интегрируя по частям и используя граничное условие (1.10), получаем

$$\int_\omega d\omega\,(me^{ijkl}a_{k|l})_{|j}\bar{a}_i=\int_{\sigma-\sigma_1} d\sigma me^{ijkl}a_{k|l}\bar{a}_i n_j-\int_\omega d\omega me^{ijkl}\bar{a}_{i|j}a_{k|l} \qquad (2.7)$$

$$\int_\omega d\omega\,[(me_\eta{}^{ij}b)_{|j}+\pi_2 a^i]\bar{a}_i=\int_{\sigma-\sigma_1} d\sigma me_\eta{}^{ij}b\bar{a}_i n_j-\int_\omega d\omega me_\eta{}^{ij}\bar{a}_{i|j}b+\pi_2\int_\omega d\omega a^i\bar{a}_i$$

От уравнения (2.4) перейдем к комплексно-сопряженному. Учитывая вещественность параметров среды, будем иметь

$$me_\eta{}^{ij}\bar{a}_{i|j}+m\pi_1+(me_{\eta\eta}-\bar{\pi}_2\varkappa^2)\bar{b}=0 \qquad (2.8)$$

Умножим уравнение (2.8) на b и проинтегрируем по объему. Используя второе соотношение в (1.10), находим

$$\int_\omega d\omega m(e_\eta{}^{ij}\bar{a}_{i|j}b+e_{\eta\eta}b\bar{b})-\pi_2\varkappa^2\int_\omega d\omega b\bar{b}=0 \qquad (2.9)$$

Подставляя соотношения (2.7), (2.9) в (2.6) и используя (2.5), получаем

$$\int_\omega d\omega me^{ijkl}\bar{a}_{i|j}a_{k|l}=\pi_2\int_\omega d\omega a^i\bar{a}_i-\bar{\pi}_2\varkappa^2\int_\omega d\omega b\bar{b}+\int_\omega d\omega me_{\eta\eta}b\bar{b} \qquad (2.10)$$

Умножим теперь уравнение (2.4) на $\bar{b}$, уравнение, комплексно-сопряженное к (2.3), свернем с a_i и полученные уравнения проинтегрируем по объему. После вычислений, аналогичных приведенным, приходим к соотношению

$$\int_\omega d\omega me^{ijkl}a_{i|j}\bar{a}_{k|l}=\bar{\pi}_2\int_\omega d\omega a^i\bar{a}_i-\pi_2\varkappa^2\int_\omega d\omega b\bar{b}+\int_\omega d\omega me_{\eta\eta}b\bar{b} \qquad (2.11)$$

Вычитая почленно уравнения (2.10), (2.11) и учитывая симметрию тензора e^{ijkl} относительно перестановки первой и второй пары индексов, будем иметь

$$(\pi_2-\bar{\pi}_2)\int_\omega d\omega\,(a^i\bar{a}_i+\varkappa^2 b\bar{b})=0 \qquad (2.12)$$

Поскольку речь идет о нетривиальном решении, входящий в (2.12) интеграл не равен нулю (в противном случае $a_i=b=0$, и в силу (2.4) π_1 также обратилось бы в нуль). Из (2.12) немедленно вытекает вещественность спектральных значений $\pi_2=\bar{\pi}_2$.

Рассмотрим некоторое спектральное значение π_2 и относящиеся к нему вещественные собственные функции $a_i(x)$, $b(x)$, π_1, удовлетворяющие линейной однородной системе и условию нормировки (2.1). Если для этих функций вычислить функционал $\delta^2 J$, то получим $\delta^2 J=\pi_2$.

Для доказательства достаточно уравнение (2.3) свернуть с a_i, уравнение (2.4) умножить на b, полученные уравнения сложить и проинтегрировать по объему. Последующее интегрирование по частям с использованием граничных условий приводит к требуемому соотношению.

Сопоставление соотношений $\delta^2 J<0$ и $\delta^2 J=\pi_2$ приводит к следующему определению: упругая система неустойчива по Гиббсу в состоянии $u^{\circ i}(x)$, $\eta^\circ(x)$, если соответствующая ей система линейных однородных уравнений из (1.10), (2.3), (2.4) при граничных условиях (1.10), (2.5) имеет хотя бы одно отрицательное спектральное значение π_2.

В случае, противоположном неустойчивости, условимся говорить об устойчивости упругой системы по Гиббсу (хотя предыдущие рассуждения построены таким образом, что можно говорить лишь о необходимых условиях устойчивости). Таким образом, в случае устойчивости все спектральные значения π_2 удовлетворяют условию $\pi_2 \geqslant 0$.

3. Предположим, что материал однороден как в начальной, так и в равновесной конфигурациях. В этом случае величины m, e^{ijkl}, e_η^{ij}, $e_{\eta\eta}$ не зависят от x^i, хотя, конечно, меняются при переходе от одной равновесной конфигурации к другой. В этом случае систему уравнений (2.3), (2.4) можно привести к следующему виду (здесь и в дальнейшем система координат предполагается аффинной):

$$me^{ijkl}a_{k|lj}+me_\eta^{ij}b_{|j}+\pi_2 a^i=0 \tag{3.1}$$

$$me_\eta^{kl}a_{k|lj}+(me_{\eta\eta}-\pi_2\varkappa^2)\,b_{|j}=0 \tag{3.2}$$

Исключив из системы (3.1), (3.2) функцию b, получаем

$$[m(me_{\eta\eta}-\pi_2\varkappa^2)\,e^{ijkl}-m^2 e_\eta^{ij}e_\eta^{kl}]\,a_{k|lj}+\pi_2(me_{\eta\eta}-\pi_2\varkappa^2)\,a^i=0 \tag{3.3}$$

Рассмотрим ограниченные во всем пространстве решения линейной однородной системы (3.3), которые имеют следующий вид:

$$a_k(x)=h_k e^{i(p_j x^j)} \tag{3.4}$$

где h_k — постоянный вектор, а p_j — постоянный ненулевой вещественный вектор, i — мнимая единица.

Значения π_2, при которых найдется хотя бы одно ненулевое решение системы (3.3) вида (3.4), назовем спектральными. Сохраняется следующее свойство доказанного выше утверждения: все спектральные значения системы (3.3) вещественны.

Доказательство достаточно провести для случая $\pi_2\varkappa^2 \neq me_{\eta\eta}$ (для противоположного случая утверждение тривиально). Подставляя (3.4) в систему (3.3), получаем следующую линейно однородную алгебраическую систему для определения ненулевого вектора h_k:

$$\left[\left(me^{ijkl}-\frac{m^2}{me_{\eta\eta}-\pi_2\varkappa^2}\,e_\eta^{ij}e_\eta^{kl}\right)p_j p_l-\pi_2 x^{ik}\right]h_k=0 \tag{3.5}$$

Введем величину β соотношением

$$me_\eta^{kl}p_l h_k-(me_{\eta\eta}-\pi_2\varkappa^2)\,i\beta=0 \tag{3.6}$$

Используя (3.6), запишем систему (3.5) в виде

$$(me^{ijkl}p_j p_l-\pi_2 x^{ik})\,h_k-ip_j me_\eta^{ij}\beta=0 \tag{3.7}$$

Переходя в уравнениях (3.6), (3.7) к комплексно-сопряженным значениям, получаем

$$me_\eta^{kl}p_l\bar h_k+(me_{\eta\eta}-\bar\pi_2\varkappa^2)\,i\bar\beta=0 \tag{3.8}$$

$$(me^{ijkl}p_j p_l-\bar\pi_2 x^{ik})\,\bar h_k+ip_j me_\eta^{ij}\bar\beta=0 \tag{3.9}$$

Комбинируя соотношения (3.6)—(3.9), находим

$$e^{ijkl}p_j p_l h_k\bar h_i=\pi_2 x^{ik}\bar h_i h_k+ip_j me_\eta^{ij}\beta\bar h_i=\pi_2\bar h^k h_k+ \\ +(me_{\eta\eta}-\bar\pi_2\varkappa^2)\,\beta\bar\beta \tag{3.10}$$

$$e^{ijkl}p_j p_l\bar h_k h_i=\bar\pi_2 x^{ik}h_i\bar h_k-ip_j me_\eta^{ij}\bar\beta h_i=\bar\pi_2\bar h^k h_k+ \\ +(me_{\eta\eta}-\pi_2\varkappa^2)\,\beta\bar\beta=0 \tag{3.11}$$

Вычитая почленно соотношения (3.10), (3.11) и учитывая симметрию тензора e^{ijkl} относительно перестановки первой и второй пары индексов, будем иметь

$$(\pi_2-\bar{\pi}_2)(h^k\bar{h}_k+\varkappa^2\beta\bar{\beta})=0 \qquad (3.12)$$

Поскольку вектор h^k ненулевой, из соотношения (3.12) следует вещественность спектральных значений: $\pi_2=\bar{\pi}_2$.

По аналогии с определением неустойчивости по Гиббсу упругой системы определим неустойчивость материала.

Упругий материал неустойчив по Гиббсу в однородной конфигурации u_i, η, если соответствующая этой конфигурации система линейных однородных уравнений (3.3) имеет хотя бы одно отрицательное спектральное значение π_2.

В противном случае при выполнении соотношения $\pi_2\geqslant 0$ для всех спектральных значений условимся называть материал в этой конфигурации устойчивым. Материал, устойчивый во всех конфигурациях, естественно называть просто устойчивым по Гиббсу.

Для устойчивости материала по Гиббсу в некоторой конфигурации необходимо, чтобы в этой конфигурации для любых вещественных векторов n_i, e_i выполнялось соотношение

$$e^{ijkl}n_jn_le_ie_k\geqslant 0 \qquad (3.13)$$

Это известное в теории распространения волн условие отражает тот факт, что для любого направления распространения акустический тензор имеет три неотрицательных собственных значения [1, 8] (если, конечно, материал упруг при динамическом деформировании). Соотношение (3.13) проливает также свет на связь между корректностью постановки задачи Коши для динамических уравнений теории упругости и принципом Гиббса (а следовательно, и со вторым началом термодинамики) — такая связь обсуждалась ранее, например, в [8].

Наметим доказательство условия (3.13). Действительно, при больших значениях $|\pi_2|$ уравнение (3.5) переходит в следующее:

$$me^{ijkl}p_jp_lh_k=\pi_2h^i \qquad (3.14)$$

Поэтому естественно полагать, что при больших значениях $|\pi_2|$ вблизи каждого из спектральных значений линейной однородной системы (3.14) найдется спектральное значение линейной системы (3.5). Но спектр системы (3.14) обладает тем свойством, что при наличии одного положительного (отрицательного) спектрального значения все положительные (отрицательные) значения π_2 также будут спектральными. Действительно, из (3.14) следует, что если π_2 — спектральное значение, связанное с направляющим вектором p_j и собственным вектором h_k, то $\alpha^2\pi_2$ (где α — любое, не равное нулю вещественное число) также будет спектральным с направляющим вектором p_j/α и тем же собственным вектором h_k. Остается показать, что из существования ненулевых векторов n_i, e_i, для которых выполняется условие

$$e^{ijkl}n_jn_le_ie_k<0 \qquad (3.15)$$

вытекает существование какого-либо отрицательного спектрального значения системы (3.14), ибо, согласно сказанному, тогда у системы (3.5) найдется достаточно большое по модулю отрицательное спектральное значение, что противоречит устойчивости материала по Гиббсу.

Для доказательства последнего утверждения, без ограничения общности, можно считать, что входящие в (3.15) векторы n_i, e_i нормированы. Рассмотрим минимум величины $e^{ijkl}n_jn_le_ie_k$ при фиксированном векторе n_i на единичной сфере $x^{ik}e_ie_k=1$. Этот минимум, очевидно, существует и в силу (3.15) отрицателен. Пусть он равен λ и достигается на векторе r_i.

Разыскивая этот условный минимум методом множителя Лагранжа, можно убедиться, что величины λ и r_i удовлетворяют системе

$$e^{ijkl}n_j n_l r_k=\lambda r^i \tag{3.16}$$

Умножая (3.16) на положительную константу m, убеждаемся, что при выполнении условия (3.15) система (3.14) имеет отрицательное спектральное значение.

4. Рассмотрим некоторые случаи, когда спектральные значения, а с ними и термодинамические неравенства могут быть найдены явно.

Рассмотрим модель идеальной жидкости. Исследуемую однородную конфигурацию примем в качестве начальной. В рассматриваемом случае функция $e(u_{i|j}, \eta)$ имеет специальный вид (ср. [9]):

$$e(u_{i|j}, \eta)=\varepsilon(v, \eta), \qquad v=v_0({}^1/_6 x^{ijk}x^{pqr}X_{ip}X_{jq}X_{kr})^{-1/2} \tag{4.1}$$
$$X_{ip}=x_{ip}+u_{i|p}+u_{p|i}+u^m_{\cdot|p}\, u_{m|i}$$

Здесь v и v_0 – удельные объемы жидкости в актуальной и начальной конфигурациях; X_{ip} – метрический тензор актуальной конфигурации; x^{ijk} – кососимметричный тензор с главной компонентой $x^{123}=|x_{ij}|^{-1/2}$.

Прямым вычислением с помощью (4.1) получаем следующие выражения для начальных значений тензоров e^{ijkl}, $e_\eta{}^{ij}$, $e_{\eta\eta}$:

$$me^{ijkl}=-\varepsilon_v(x^{ij}x^{kl}-x^{il}x^{jk})+v\varepsilon_{vv}x^{ij}x^{kl}, \qquad me_\eta{}^{ij}=\varepsilon_{v\eta}x^{ij}, \qquad e_{\eta\eta}=\varepsilon_{\eta\eta} \tag{4.2}$$
$$\varepsilon_v(v, \eta)=\partial\varepsilon(v, \eta)/\partial v, \quad \varepsilon_{v\eta}(v, \eta)=\partial^2\varepsilon(v, \eta)/\partial v\partial\eta, \quad \varepsilon_{vv}(v, \eta)=\partial^2\varepsilon(v, \eta)/\partial v^2$$

Подставляя выражения (4.2) в систему (3.5), будем иметь

$$\left[\left(\frac{\varepsilon_{v\eta}{}^2}{v^{-1}\varepsilon_{\eta\eta}-\pi_2\varkappa^2}-v\varepsilon_{vv}\right)p_ip_k+\pi_2x_{ik}\right]h^k=0 \tag{4.3}$$

При всяком вещественном векторе p_i система (4.3) имеет собственный вектор $h_k\perp p_k$ со спектральным значением π_2, равным нулю. Кроме того, имеется собственный вектор $h_k=Lp_k$. Соответствующее ему спектральное значение находится из уравнения

$$\left(\frac{\varepsilon_{v\eta}{}^2}{v^{-1}\varepsilon_{\eta\eta}-\pi_2\varkappa^2}-v\varepsilon_{vv}\right)p^kp_k+\pi_2=0 \tag{4.4}$$

Поскольку величина p^kp_k положительна, определяемые соотношением (4.4) спектральные значения удовлетворяют неравенству

$$(\varepsilon_{v\eta}{}^2-\varepsilon_{vv}\varepsilon_{\eta\eta}+\pi_2\varkappa^2\varepsilon_{vv}v)(v^{-1}\varepsilon_{\eta\eta}-\pi_2\varkappa^2)\pi_2\leqslant 0 \tag{4.5}$$

Выражение в левой части неравенства (4.5) обращается в нуль в трех, вообще говоря, различных точках. Для того чтобы неравенство (4.5) не имело отрицательных решений и материал был устойчив по Гиббсу, необходимо, чтобы корни многочлена третьей степени были неотрицательны, а коэффициент при $\pi_2{}^3$ – неположителен. Эти условия выражаются следующими неравенствами: $\varepsilon_{vv}\geqslant 0$, $\varepsilon_{\eta\eta}\geqslant 0$, $\varepsilon_{vv}\varepsilon_{\eta\eta}-\varepsilon_{v\eta}{}^2\geqslant 0$.

Собственные функции $a_k(x)$, определяемые соотношением (3.4), для рассматриваемых спектральных значений можно представить в виде

$$a_k(x)=n_ke^{i\nu(n_jx^j)} \tag{4.6}$$

Здесь n_k – произвольный вещественный единичный вектор, ν – ненулевое вещественное число. На фигуре изображена дисперсионная кривая $\pi_2(\nu)$ для устойчивой по Гиббсу жидкости ($A=\varepsilon_{\eta\eta}(v\varkappa^2)^{-1}$, $B=(\varepsilon_{vv}\varepsilon_{\eta\eta}-\varepsilon_{v\eta}{}^2)(v\varepsilon_{vv}\varkappa^2)^{-1}$).

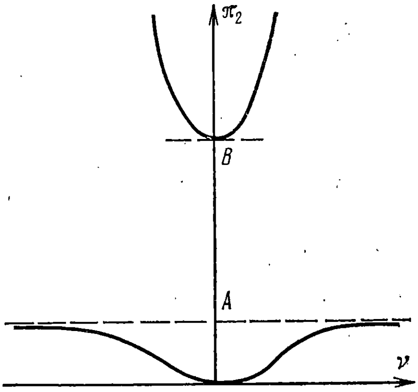
Две ненулевые ветви дисперсионной кривой описываются соотношениями

$$\pi_2{}^{\pm}(\nu)=\frac{1}{2}\left[\nu^2v\varepsilon_{vv}+\frac{1}{v\varkappa^2}\varepsilon_{\eta\eta}\mp\sqrt{D(\nu)}\right]$$
$$D(\nu)=\left(\nu^2v\varepsilon_{vv}-\frac{1}{v\varkappa^2}\varepsilon_{\eta\eta}\right)^2+\frac{4\nu^2}{\varkappa^2}\varepsilon_{v\eta}{}^2 \tag{4.7}$$

Для изотропного нелинейно-упругого тела в неискаженной конфигурации, согласно вычислениям, которые аналогичны приведенным в [10], имеем

$$me_\eta{}^{ij}=-K_\eta\alpha_\eta x^{ij}, \qquad K_\eta=\lambda_\eta+{}^2/_3\mu_\eta \tag{4.8}$$
$$me^{ijkl}=p(x^{il}x^{jk}-x^{ij}x^{kl})+\lambda_\eta x^{ij}x^{kl}+\mu_\eta(x^{ij}x^{kl}+x^{il}x^{jk})$$

Здесь также исследуемая конфигурация принята в качестве начальной; λ_η, μ_η – изэнтропические модули Ламе; K_η – изэнтропический модуль объемного сжатия; величина α_η характеризует изменение напряженного состояния при изменении энтропии, но фиксированном деформированном состоянии; p – давление в начальной конфигурации.



Подставляя формулы (4.8) в равенство (3.5), приводим последнее к виду

$$\left(\left[\frac{K_\eta^2\alpha_\eta^2}{me_{\eta\eta}-\pi_2\varkappa^2}-\lambda_\eta-\mu_\eta\right)\times\right. \tag{4.9}$$

$$\left.\times\, p^ip^j+(\pi_2-\mu_\eta p^kp_k)\,x^{ij}\right]h_j=0$$

Из системы (4.9) вытекает существование собственных вектор-функций двух типов:

поперечные вектор функции $h^jp_j=0$ с дисперсионным соотношением $\pi_2=\mu_\eta\nu^2$;

продольные вектор-функции $h^j=Lp^j$, спектральные значения которых удовлетворяют уравнению

$$\left(\frac{K_\eta^2\alpha_\eta^2}{me_{\eta\eta}-\pi_2\varkappa^2}-\lambda_\eta-2\mu_\eta\right)p^kp_k+\pi_2=0$$

Из приведенных соотношений следует, что для термодинамической устойчивости по Гиббсу изотропного нелинейно-упругого материала в неискаженной конфигурации необходимо выполнение условий

$$\mu_\eta\geqslant 0,\quad \lambda_\eta+2\mu_\eta\geqslant 0,\quad e_{\eta\eta}\geqslant 0 \qquad (4.10)$$
$$me_{\eta\eta}(\lambda_\eta+2\mu_\eta)-K_\eta^2\alpha_\eta^2\geqslant 0$$

Очевидно, что в случае жидкости условия устойчивости (4.10) сводятся к выполнению классических неравенств, приведенных выше: $\varepsilon_{vv}\geqslant 0$, $\varepsilon_{\eta\eta}\geqslant 0$, $\varepsilon_{vv}\varepsilon_{\eta\eta}-\varepsilon_{v\eta}^2\geqslant 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
2. *Гиббс Дж. В.* Термодинамические работы. М.– Л.: Гостехтеориздат, 1950. 492 с.
3. *Мюнстер А.* Химическая термодинамика. М.: Мир, 1971. 295 с.
4. *Bowen R. M., Wieze J. C.* Diffusion in mixtures of elastic materials.– Internat. J. Engng. Sci., 1965, v. 7, No. 7, p. 689–722.
5. *Гринфельд М. А.* Фазовые переходы первого рода в нелинейно-упругих материалах.– Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 1, с. 99–109.
6. *Coleman B. D., Noll W.* On the thermostatics of continuous media.– Arch. Rat. Mech. Anal., 1959, v. 4, No. 2, p. 101–128.
7. *Лаврентьев М., Люстерник Л.* Основы вариационного исчисления. М.– Л.: Глав. ред. общетехн. лит-ры и номогр., 1935, т. 1, ч. 1. 148 с.; т. 1, ч. 2. 400 с.
8. *Годунов С. К.* Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 303 с.
9. *Гринфельд М. А.* Феноменологическая теория фазовых переходов второго рода в простых нелинейно-упругих материалах.– Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 5, с. 93–102.
10. *Гринфельд М. А., Мовчан А. А.* Фазовые переходы второго рода в изотропной упругой среде.– Изв. АН СССР. Физика Земли, 1979, № 12, с. 85–89.

Москва

Поступила в редакцию 22.II.1980