МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1982

УДК 539.3

ОСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МАТРИЧНЫХ КОМПОЗИТОВ

ГАНДЕЛЬСМАН М. И.

Применению метода самосогласования для изучения упругих свойств поликристаллов и матричных композитов посвящено достаточно много работ [1–3]. Как правило, в них вычисляется эффективный тензор модулей упругости для неограниченной композитной среды. При этом подразумевается, что найденные таким образом характеристики применимы и при решении краевых задач для ограниченных областей композитного материала. Однако такое предположение несамоочевидно.

В данной работе в рамках метода самосогласованного поля дан последовательный вывод осредненных уравнений для ограниченных областей матричного композита. Показано, что описание упругих свойств композита с помощью эффективных модулей соответствует учету взаимодействия включений в дипольном приближении. В этом приближении рассматриваемая теория с математической точки зрения аналогична традиционной электростатике диэлектриков [4]. Учет мультипольных членов старших порядков приводит к появлению в осредненных уравнениях упругого равновесия дополнительных членов со старшими производными от осредненного тензора $\varepsilon(\mathbf{x})$. Дополнительные члены появляются также в уравнениях, задающих граничные условия. Таким образом, учет взаимодействия включений в мультипольных приближениях старших порядков приводит к осредненным уравнениям упругого равновесия, которые можно рассматривать как вариант мультиполярной теории упругости. При этом описание упругих свойств композита не исчерпывается введением тензора эффективных модулей.

Величина дополнительных членов с производными старших порядков определяется, однако, не только концентрацией включений, но и неоднородностью осредненного поля деформации $\varepsilon(\mathbf{x})$. В частности, если деформация $\varepsilon(\mathbf{x})\equiv\varepsilon$ однородна, то мультипольные приближения любого порядка в композитах со стохастической структурой сводятся к дипольному и осредненные деформация и напряжение связаны между собой через эффективный тензор модулей упругости обычным линейным соотношением.

1. Рассмотрим бесконечную упругую матрицу, содержащую включения. Пусть внешние силы таковы, что в отсутствие включений они создавали бы поле деформации $\varepsilon_0(\mathbf{x})$. Поле деформации внутри включений обозначим $\varepsilon_+(\mathbf{x})$. Пусть v_n — область, занимаемая n-м включением, $\mathbf{x}_n$ — положение его центра масс, $\boldsymbol{\omega}_n$ — совокупность эйлеровых углов, определяющих его ориентацию относительно выбранной системы координат и $\boldsymbol{\xi}_n$ — вектор, соединяющий центр масс с произвольной точкой n-го включения. Через C и C_1 обозначим тензоры модулей упругости матрицы и включений соответственно, $[C]=C_1-C$. Поле деформации в упругой среде удовлетворяет следующему интегральному уравнению [5]:

$$\varepsilon(\mathbf{x})=\varepsilon_0(\mathbf{x})+\sum_{n=1}^{N}\int_{v_n} G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n):[C]:\varepsilon_+(\mathbf{x}_n+\boldsymbol{\xi}_n)\,d\boldsymbol{\xi} \tag{1.1}$$

$$G(\mathbf{x})=(G_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{x}))=(U_{\alpha\gamma,\beta\delta}(\mathbf{x}))_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)} \tag{1.2}$$

где N — количество включений, $U_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ — тензор Грина уравнения Ламе для матрицы. Функция $G(r)$ имеет неинтегрируемую особенность при $r=0$, и интегралы в (1.1) понимаются так, как в [3] при канонической их регуляризации.

Пусть F — эллипсоидальная область, $\mathbf{x}\in F$. Обозначим [6]:

$$P(F)=-\int_{F} G(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\mathbf{y} \tag{1.3}$$

причем интеграл в (1.3) понимается в указанном выше смысле и не зависит от положения точки $\mathbf{x}$ внутри F. Пусть s и t — тензоры рангов m и n соответственно, $s\otimes t$ — их тензорное произведение, в частности $s^k=s\otimes s\otimes\ldots\otimes s$ (k раз). Через st обозначим свертку по всем n индексам тензора t и, соответственно, по n последним индексам тензора s ($m\geqslant n$). Например, $s\equiv(s_{\alpha\beta\gamma\delta})$, $t\equiv(t_{\mu\nu})$, $(st)_{\alpha\beta}=s_{\alpha\beta\gamma\delta}t_{\gamma\delta}$. Пусть $\Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ — тензорная функция от разности векторных аргументов, $\nabla_\alpha\equiv\partial/\partial\mathbf{x}_\alpha$, $\nabla_{y\alpha}\equiv\partial/\partial\mathbf{y}_\alpha$. Очевидно, $\nabla\otimes\Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y})=-\nabla_{\mathbf{y}}\otimes\Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y})$, $\Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y})\otimes\nabla=-\Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y})\otimes\nabla_{\mathbf{y}}$ (здесь $(\Phi\otimes\nabla)_{ij}\equiv\nabla_j\Phi_i$).

Рассмотрим одиночное включение произвольной формы с ориентацией ω, занимающее область $v(\omega)$ с центром масс в точке $\mathbf{x}$ в однородном поле деформации ε_0. Имеем

$$\varepsilon_+{}^0(\omega)\equiv\frac{1}{v}\int_{v(\omega)}\varepsilon_+(\mathbf{x}+\xi)\,d\xi=A(\omega)\,\varepsilon_0,\qquad \langle\varepsilon_+{}^0\rangle=\langle A\rangle\,\varepsilon_0 \tag{1.4}$$

где $A(\omega)$ — тензор четвертого ранга, зависящий от формы и ориентации включения, v — объем включения, градус над символом означает осреднение по объему, а угловые скобки — осреднение по ориентациям включений с заданной функцией распределения $f(\omega)$. Пусть теперь $\varepsilon_0(\mathbf{x})$ — многочлен k-го порядка

$$\varepsilon_0(\mathbf{x}+\rho)=d^{(k)}\rho^k \tag{1.5}$$

где ρ — произвольный вектор, $d^{(k)}$ — тензор $(k+2)$-го ранга. Если включение — эллипсоид, то $\varepsilon_+(\mathbf{x}+\xi)$ — также многочлен k-го порядка [5]:

$$\varepsilon_+(\mathbf{x}+\xi)=q^{(k)}\xi^k,\qquad d^{(k)}=A_k(\omega)\,q^{(k)} \tag{1.6}$$

где $q^{(k)}$ — тензор $(k+2)$-го ранга, $A_k(\omega)$ — тензор $(2k+4)$-го ранга, $A_0\equiv A$.

Удобно пользоваться следующим обозначением: $A_k(\omega)\equiv A_k(\omega,[C])$, напоминающим, что $A_k(\omega)$ зависит также от модулей упругости матрицы и включений. Для включений сферической формы $A_k(\omega,[C])\equiv A_k^{(s)}([C])$. Из (1.1) при $N=1$ и из (1.5), (1.6) следует тождество

$$q^{(k)}\rho^k=(A_k(\omega,[C])\,q^{(k)})\,\rho^k+\int_{v(\omega)}G(\rho-\xi):[C]\,(q^{(k)}\xi^{(k)})\,d\xi \tag{1.7}$$

Пусть теперь имеется большое количество N одинаковых включений произвольной формы, распределенных с концентрацией $z=N/V$ в области V бесконечной матрицы с кусочно-гладкой границей S. Предполагается, что структура композита может быть описана функцией распределения по ориентациям $f(\omega)$ и центрально-симметричной бинарной корреляционной функцией $g(|\mathbf{r}|)$, где $\mathbf{r}=\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_j$ — вектор, соединяющий центры масс пары включений. Функция $g(|r|)=g(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)=0$ внутри шара $H(\mathbf{x})$ с центром в точке $\mathbf{x}$.

Перепишем уравнение (1.1) в мультипольном приближении $(p+2)$-го порядка, что соответствует подстановке в (1.1) следующего разложения:

$$G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n-\xi)\approx\sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^k}{k!}(G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)\otimes\nabla^k)\,\xi^k \tag{1.8}$$

Заменяя деформации во включениях их математическими ожиданиями, взятыми по всевозможным расположениям всех остальных включений, и переходя к непрерывному распределению включений по положениям и ориентациям, перепишем (1.1) в приближении (1.9) следующим образом:

$$\varepsilon(\mathbf{x})=\varepsilon_0(\mathbf{x})+\varphi\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\int\limits_V(G(\mathbf{x}-\mathbf{y})\otimes\nabla^k)([C]:M^{(k)}(\mathbf{y}))\,d\mathbf{y}\tag{1.9}$$

$$\varphi=vz,\qquad M^{(k)}=\frac{1}{vk!}\left\langle\int\limits_{v(\omega)}\varepsilon_+(\mathbf{x}+\xi)\otimes\xi^k\,d\xi\right\rangle$$

где $M^{(k)}$ — тензор $(k+2)$-го ранга, представляющий собой момент k-го порядка от самосогласованного поля деформации $\varepsilon_+(\mathbf{x}+\xi)$ во включении с центром масс в точке $\mathbf{x}$, осредненного также по ориентациям данного включения. В частности, $M^\circ(\mathbf{x})\equiv\langle\varepsilon_+{}^\circ(\mathbf{x})\rangle$.

В [7, 8] показано, что если деформация ε_0 однородна внутри V, то осредненные деформации $\langle\varepsilon_+{}^\circ\rangle$ одинаковы во всех включениях

$$\langle\varepsilon_+{}^\circ\rangle=R_1\varepsilon_0\tag{1.10}$$

$$R_1=(I-\varphi\langle A\rangle:Q:[C])^{-1}:\langle A\rangle$$

$$Q=P(H)-P(V),\qquad I\equiv(I_{\alpha\beta\gamma\delta})=\delta_{\alpha(\gamma}\delta_{\delta)\beta}\tag{1.11}$$

Осредненная деформация в области V:

$$\varepsilon^\circ=(I-\varphi P(V):[C]:R_1)\varepsilon_0\tag{1.12}$$

и осредненное напряжение

$$\sigma^\circ=C_*\varepsilon^\circ,\qquad C_*=C+\varphi[C]:(\langle A\rangle^{-1}-\varphi P(H):[C])^{-1}\tag{1.13}$$

где C_* — тензор эффективных модулей упругости матричного композита.

2. Пусть теперь деформация $\varepsilon_0(\mathbf{x})$, вообще говоря, неоднородна. Естественно ввести непрерывную плотность силового дипольного момента $D^{(2)}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$, описывающего совокупное действие включений в дипольном приближении. Тогда [9]:

$$\varepsilon(\mathbf{x})=\varepsilon_0(\mathbf{x})-\int\limits_V G(\mathbf{x}-\mathbf{y})D^{(2)}(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\tag{2.1}$$

Из сравнения (2.1) и (1.9) при $p=0$ следует, что

$$D^{(2)}(\mathbf{x})=-\varphi[C]\langle\varepsilon_+{}^\circ(\mathbf{x})\rangle\tag{2.2}$$

Пусть $n(\mathbf{y})$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S в точке $\mathbf{y}\in S$. Интегрируя по частям и применяя формулу Грина, преобразуем (2.1) следующим образом (для наглядности выписываются координатные индексы):

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{x})=\varepsilon_{0\alpha\beta}(\mathbf{x})-\int\limits_V U_{\alpha)(\gamma,\delta)(\beta}(\mathbf{x}-\mathbf{y})D^{(2)}_{\gamma\delta}(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}=\varepsilon_{0\alpha\beta}(\mathbf{x})+$$

$$+\oint\limits_S U_{\alpha)\delta,(\beta}(\mathbf{x}-\mathbf{y})n_\gamma(\mathbf{y})D^{(2)}_{\gamma\delta}(\mathbf{y})\,dS_y-\int\limits_V U_{\alpha)\delta,(\beta}(\mathbf{x}-\mathbf{y})D_{\gamma\delta,\delta}(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\tag{2.3}$$

Таким образом, действие распределенных в матрице силовых диполей эквивалентно действию системы объемных сил с плотностью $(-\nabla\cdot D^{(2)}(\mathbf{x}))$ и поверхностных сил с поверхностной плотностью $n(y)\cdot D^{(2)}(\mathbf{y})$ $(\mathbf{y}\in S)$. Поэтому дифференциальные уравнения упругого равновесия приобретают следующий вид:

$$\nabla\cdot C\varepsilon(\mathbf{x})=\nabla\cdot D^{(2)}(\mathbf{x})\tag{2.4}$$

с граничными условиями

$$f(\mathbf{y})=n(\mathbf{y})\cdot(C\varepsilon(\mathbf{y})-D^{(2)}(\mathbf{y})),\qquad f(\mathbf{y})=n(\mathbf{y})\cdot\sigma_e(\mathbf{y}) \tag{2.5}$$

где $\sigma_e(\mathbf{y})$ — предельное извне напряжение в точке $\mathbf{y}\in S$.

Уравнения (2.4), (2.5) аналогичны уравнениям электростатики диэлектриков [4], причем аналогом электростатического поля является поле деформации $\varepsilon(\mathbf{x})$, а аналогом поляризации — плотность дипольного момента $D^{(2)}(\mathbf{x})$. Для получения полной системы уравнений необходимо ввести линейную связь между тензорами $D^{(2)}(\mathbf{x})$ и $\varepsilon(\mathbf{x})$. Если деформация $\varepsilon(\mathbf{x})\equiv\varepsilon$ однородна, то из (1.12), (2.2) и (1.10) следует

$$D^{(2)}=J\varepsilon \tag{2.6}$$

$$J=-\varphi[C]:(\langle A\rangle^{-1}-\varphi P(H):[C]) \tag{2.7}$$

Можно предположить, что соотношение (2.6) в некоторм приближении выполняется и в том случае, когда поле $\varepsilon(x)$ неоднородно, но меняется достаточно медленно. Тем самым

$$D^{(2)}(\mathbf{x})=J\varepsilon(\mathbf{x}) \tag{2.8}$$

Отметим, что область V можно «вынуть» из окружающей матрицы, заменив действие матрицы эквивалентным действием системы сил, распределенных по поверхности S с поверхностной плотностью $f(\mathbf{y})=n(\mathbf{y})\cdot\sigma_e(\mathbf{y})$. Поэтому уравнение (2.5) может рассматриваться как граничное условие в краевой задаче для ограниченной области V. Подставив (2.8) в (2.4) и (2.5), получим

$$\nabla\cdot(C-J)\varepsilon(\mathbf{x})=0,\quad n(\mathbf{y})\cdot(C-J)\varepsilon(\mathbf{y})=f(\mathbf{y}) \tag{2.9}$$

Сопоставляя (2.7) и (1.13), найдем $C-J=C_*$. Таким образом, уравнения (2.9) представляют собой уравнения упругого равновесия и граничные условия для области V однородной среды с тензором модулей упругости C_*, т. е. в рамках дипольного приближения упругие свойства композита полностью описываются эффективным тензором модулей упругости.

3. Рассмотрим несколько более общий вывод соотношения (2.8), когда деформация $\varepsilon(\mathbf{x})$ меняется достаточно медленно. Предположим, что деформацию $\varepsilon(\mathbf{x})$ можно считать однородной в пределах любого шара $H(\mathbf{x})$, не пересекающегося с S. Предположим далее, что то же утверждение справедливо и для поля $D^{(2)}(\mathbf{x})$ (это предположение подтверждается конечным результатом (2.8)).

Выберем включение с центром масс в точке $\mathbf{x}$ и ориентацией $\boldsymbol{\omega}$. Пусть $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\xi}$ — векторы, соединяющие точку $\mathbf{x}$ с произвольными точками шара $H(\mathbf{x})$. Имеем

$$\varepsilon(\mathbf{x}+\boldsymbol{\rho})=\varepsilon_-(\mathbf{x}+\boldsymbol{\rho})-\int\limits_{H(\mathbf{x})}G(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\xi})D^{(2)}(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi} \tag{3.1}$$

$$\varepsilon_-(\mathbf{x}+\boldsymbol{\rho})=\varepsilon_0(\mathbf{x}+\boldsymbol{\rho})-\int\limits_{V\setminus H(\mathbf{x})}G(\mathbf{x}+\boldsymbol{\rho}-\mathbf{y})D^{(2)}(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} \tag{3.2}$$

где $\varepsilon_-(\mathbf{x}+\boldsymbol{\rho})$ — деформация, создаваемая внешними силами и остальными включениями в окрестности рассматриваемого включения. Подставим в (3.1) $\varepsilon(\mathbf{x}+\boldsymbol{\rho})\approx\varepsilon(\mathbf{x})$, $D^{(2)}(\mathbf{x}+\boldsymbol{\rho})\approx D^{(2)}(\mathbf{x})$. Тогда будем иметь

$$\varepsilon_-(\mathbf{x}+\boldsymbol{\rho})=\varepsilon_-(\mathbf{x})=\varepsilon(\mathbf{x})-P(H)D^{(2)}(\mathbf{x}) \tag{3.3}$$

Из (1.4) следует

$$\langle\varepsilon_+^{\circ}(\mathbf{x})\rangle=\langle A\rangle\varepsilon_-(\mathbf{x})=\langle A\rangle(\varepsilon(\mathbf{x})-P(H)D^{(2)}(\mathbf{x})) \tag{3.4}$$

и согласно (2.2)

$$D^{(2)}(\mathbf{x})=-\varphi[C]:\langle A\rangle(\varepsilon(\mathbf{x})-P(H)D^{(2)}(\mathbf{x})) \tag{3.5}$$

Разрешая (3.5) относительно $D^{(2)}(\mathbf{x})$, получим (2.8), где J определяется из (2.7).

Предложенный вывод фактически повторяет вывод формулы Клаузиуса — Мосотти в электростатике диэлектриков [4], причем J — аналог тензора диэлектрической восприимчивости, а $A(\omega)$ — аналог тензора поляризуемости отдельной молекулы.

4. Рассмотрим далее мультипольное приближение третьего порядка. Будем считать для упрощения, что включения, распределенные в области V бесконечной матрицы, имеют эллипсоидальную форму. Обозначим плотность мультиполей третьего порядка, соответствующую совокупному действию включений, через $D^{(3)}(\mathbf{x})\equiv(D^{(3)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{x}))$. Их вклад в $\varepsilon(\mathbf{x})$

$$\varepsilon^{(3)}(\mathbf{x})=\int_V(G(\mathbf{x}-\mathbf{y})\otimes\nabla)D^{(3)}(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}=$$

$$=-\int_V(G(\mathbf{x}-\mathbf{y}):D^{(3)}(\mathbf{y}))\nabla_{\mathbf{y}}\,d\mathbf{y}+\int_V G(\mathbf{x}-\mathbf{y})(D^{(3)}(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}})\,d\mathbf{y} \tag{4.1}$$

Первый интеграл в (4.1) по формуле Грина преобразуется в интеграл по поверхности S, и, так как $G(\mathbf{r})\sim|\mathbf{r}|^{-3}$, этот интеграл стремится к нулю при удалении границы S от точки $\mathbf{x}$. Будем считать его равным нулю, что соответствует пренебрежению масштабным эффектом. Второй интеграл в (4.1) согласно (2.1) соответствует действию распределенной плотности дипольного момента $(-D^{(3)}(\mathbf{x})\nabla)$. Поэтому можно сразу записать уравнения аналогичные (2.4), (2.5) с учетом плотности $D^{(3)}(\mathbf{x})$ (для наглядности выписываются координатные индексы)

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\gamma\delta,\alpha}(\mathbf{x})=D^{(2)}_{\alpha\beta,\alpha}(\mathbf{x})-D^{(3)}_{\alpha\beta\gamma,\alpha\gamma}(\mathbf{x}) \tag{4.2}$$

$$n_\alpha(\mathbf{y})C_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\gamma\delta}(\mathbf{y})=f_\beta(\mathbf{y})+n_\alpha(\mathbf{y})(D^{(2)}_{\alpha\beta}(\mathbf{y})-D^{(3)}_{\alpha\beta\gamma,\gamma}(\mathbf{y})) \tag{4.3}$$

$$\mathbf{y}\in S,\qquad f(\mathbf{y})=n(\mathbf{y})\cdot\sigma_e(\mathbf{y})$$

Из сопоставления (4.1) и (1.10) при $p=1$ следует

$$D^{(3)}(\mathbf{x})=-\varphi[C]:M^{(1)}(\mathbf{x}) \tag{4.4}$$

Таким же образом можно ввести распределенную плотность $D^{(k)}(\mathbf{x})$ мультипольного момента k-го порядка ($k=4$, 5 и т. д.) и записать уравнения, аналогичные (4.2) — (4.4)

$$\nabla\cdot C\varepsilon(\mathbf{x})=\nabla\cdot\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k D^{(k)}(\mathbf{x})\nabla^{k-2} \tag{4.5}$$

$$n(\mathbf{y})\cdot C\varepsilon(\mathbf{y})=f(\mathbf{y})+n(\mathbf{y})\cdot\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k D^{(k)}(\mathbf{y})\nabla^{k-2}(\mathbf{y}\in S) \tag{4.6}$$

$$D^{(k)}(\mathbf{x})=-\varphi[C]:M^{(k-2)}(\mathbf{x}) \tag{4.7}$$

Линейная связь между $D^{(k)}(\mathbf{x})$ и $\varepsilon(\mathbf{x})$ может быть записана в следующем виде:

$$D^{(k)}(\mathbf{x})=\sum_{m=0}^{\infty}J^{(k)}_m(\varepsilon(\mathbf{x})\otimes\nabla^m) \tag{4.8}$$

где $J^{(k)}_m$ — тензор ранга $(k+m+2)$. В частности, $J^{(2)}_0\equiv J$.

Подставляя (4.8) в (4.5) и (4.6) и перегруппируя члены, получим

$$\nabla \cdot C\varepsilon(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \sum_{l=0}^{\infty} L_l(\varepsilon(\mathbf{x}) \otimes \nabla^l) \tag{4.9}$$

$$n(\mathbf{y}) \cdot C\varepsilon(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) + n(\mathbf{y}) \cdot \sum_{l=0}^{\infty} L_l(\varepsilon(\mathbf{y}) \otimes \nabla^l) \qquad (\mathbf{y} \in S) \tag{4.10}$$

$$L_l = \sum_{k=2}^{l+2} (-1)^k J_{l+2-k}^{(k)\prime} \tag{4.11}$$

При преобразовании $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$ левая часть соотношения (4.9) меняет знак. Поэтому правая часть (4.9) должна обладать тем же свойством. Отсюда $L_l=0$ при нечетных l. В частности, $L_1 = J_1^{(2)} - J_0^{(3)} = 0$.

Из соображений размерности можно предположить наличие малого масштаба длины a, такого, что $L_l \sim a^l$. Ниже будет показано, что a имеет порядок характерного размера включения.

Ранее [10, 11] было доказано, что осреднение уравнения с частными производными второго порядка с быстро осциллирующими коэффициентами приводит к появлению дополнительных членов с производными старших порядков. В частности, при осреднении уравнений Ламе для сред с периодической структурой возникают уравнения вида (4.9), (4.10) [12]. Однако предлагаемая в [10, 11] процедура определения коэффициентов L_l громоздка и в случае матричных композитов трудно реализуема [12]. Тем более трудным представляется ее обобщение на композиты со стохастической структурой. Ниже с помощью метода самосогласованного поля проводится вычисление коэффициента L_2, соответствующего первому поправочному члену в (4.9), (4.10) ($L_0=J$, $L_1=0$). Аналогично могут быть найдены и старшие члены.

5. Будем считать, что поле деформации $\varepsilon(\mathbf{x})$ меняется не слишком быстро, а именно: внутри любого шара $H(\mathbf{x})$, не пересекающегося с S, оно может быть аппроксимировано многочленом не выше второго порядка

$$\varepsilon(\mathbf{x}+\rho) = \varepsilon(\mathbf{x}) + (\varepsilon(\mathbf{x}) \otimes \nabla)\rho + {}^1/_2(\varepsilon(\mathbf{x}) \otimes \nabla^2)\rho^2 \tag{5.1}$$

В рассматриваемом приближении уравнения (4.8) могут быть переписаны следующим образом:

$$\begin{gathered} D^{(2)}(\mathbf{x}) = J\varepsilon(\mathbf{x}) + J_1^{(2)}(\varepsilon(\mathbf{x}) \otimes \nabla) + J_2^{(2)}(\varepsilon(\mathbf{x}) \otimes \nabla^2) \\ D^{(3)}(\mathbf{x}) = J_0^{(3)}\varepsilon(\mathbf{x}) + J_1^{(3)}(\varepsilon(\mathbf{x}) \otimes \nabla) \\ D^{(4)}(\mathbf{x}) = J_0^{(4)}\varepsilon(\mathbf{x}), \quad D^{(k)}(\mathbf{x}) = 0 \quad (k>4) \end{gathered} \tag{5.2}$$

Учет старших членов в разложениях (5.2) привел бы согласно (4.5) к поправочным членам с $l>2$, которые не рассматриваются.

В [8] показано, что в однородном поле деформации $\varepsilon(\mathbf{x}) \equiv \varepsilon$ самосогласованное поле деформации внутри эллипсоидальных включений также оказывается однородным. В этом случае в силу (4.4) $D^{(3)}(\mathbf{x})=0$, поэтому согласно (5.2) $J_0^{(3)}=0$. Из условия $J_1^{(2)}=J_0^{(3)}$ следует, что и $J_1^{(2)}=0$. Поэтому (5.2) можно переписать следующим образом:

$$D^{(2)}(\mathbf{x}) = J\varepsilon(\mathbf{x}) + X(\varepsilon(\mathbf{x}) \otimes \nabla^2) \tag{5.3}$$

$$D^{(3)}(\mathbf{x}) = Y(\varepsilon(\mathbf{x}) \otimes \nabla), \quad D^{(4)}(\mathbf{x}) = Z\varepsilon(\mathbf{x}), \quad X=J_2^{(2)}, \quad Y=J_1^{(3)}, \quad Z=J_0^{(4)}$$

Тензор Z также может быть найден из анализа квазиоднородной деформации композитной среды $\varepsilon(\mathbf{x}) \equiv \varepsilon$. Так как в этом случае деформации $\varepsilon_+(\mathbf{x})$ однородны и одинаковы во всех включениях с ориентацией ω, то согласно определению $M^{(k)}$

$$M^{(2)}=\langle \varepsilon_+(\omega)\otimes T(\omega)\rangle, \qquad T(\omega)=(T_{\alpha\beta}(\omega))=\frac{1}{2v}\int\limits_{v(\omega)}\xi^2\,d\xi \tag{5.4}$$

В частности, для сферических включений радиуса a будем иметь $T(\omega)=a^2\delta/10$, где $\delta=(\delta_{\alpha\beta})$ — единичный тензор второго ранга. Согласно (1.4), (1.12) и (3.3), имеем

$$\varepsilon_+(\omega)=A(\omega)\varepsilon_-=A(\omega):(I-\varphi P(H):[C]:\langle A\rangle)^{-1}\varepsilon \tag{5.5}$$

Пусть $\Lambda\equiv(\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta\mu\nu})$ — произвольная матрица. Введем обозначение $(\Lambda_{(3\rightleftarrows 5)})_{\alpha\beta\gamma\delta\mu\nu}=\Lambda_{\alpha\beta\mu\delta\gamma\nu}$, $(\Lambda_{(34\rightleftarrows 56)})_{\alpha\beta\gamma\delta\mu\nu}=\Lambda_{\alpha\beta\mu\nu\gamma\delta}$.

Аналогично могут быть записаны и другие перестановки индексов. Подставив (при $k=4$) (5.5) в (5.4) и (5.4) в (4.7), будем иметь

$$D^{(4)}=Z\varepsilon \tag{5.6}$$

$$Z=(-\varphi[C]:\langle A(\omega):(I-\varphi P(H):[C]:\langle A\rangle)^{-1}\otimes T(\omega)\rangle)_{(34\rightleftarrows 56)}.$$

Вычислим теперь матрицы X и Y. Рассмотрим включение с ориентацией ω, занимающее область $v(\omega)$ с центром масс в точке $\mathbf{x}$. С учетом (5.2) получим

$$\varepsilon(\mathbf{x}+\rho)=\varepsilon_-(\mathbf{x}+\rho)-\sum_{k=2}^{4}(-1)^k\int\limits_{H(\mathbf{x})}(G(\rho-\xi)\otimes\nabla^{k-2})D^{(k)}(\mathbf{x}+\xi)\,d\xi \tag{5.7}$$

Из (5.3) следует, что в рассматриваемом приближении

$$\begin{gathered}D^{(2)}(\mathbf{x}+\xi)=J(\varepsilon(\mathbf{x})+(\varepsilon(\mathbf{x})\otimes\nabla)+{}^1/_2(\varepsilon(\mathbf{x})\otimes\nabla^2)\xi^2)+X(\varepsilon(\mathbf{x})\otimes\nabla^2)\\ D^{(3)}(\mathbf{x}+\xi)=Y(\varepsilon(\mathbf{x})\otimes\nabla+(\varepsilon(\mathbf{x})\otimes\nabla^2)\xi)\\ D^{(4)}(\mathbf{x}+\xi)=Z(\varepsilon(\mathbf{x})+(\varepsilon(\mathbf{x})\otimes\nabla)\xi+{}^1/_2(\varepsilon(\mathbf{x})\otimes\nabla^2)\xi^2)\end{gathered} \tag{5.8}$$

Подставим соотношения (5.8) в (5.7). Возникающие при этом интегралы вида

$$\int\limits_{H(\mathbf{x})}(G(\rho-\xi)\otimes\nabla^k)\,d\xi \qquad (k=1,2)$$

могут быть преобразованы двукратным применением формулы Грина в интегралы того же вида по внешней области шара $H(\mathbf{x})$. Следовательно, они равны нулю в силу тождества [6]

$$\int\limits_{\Gamma(\mathbf{x})}(G(\mathbf{x}+\rho-\mathbf{y})\otimes\nabla^k)\,d\Gamma_y=0 \qquad (k\geqslant 1) \tag{5.9}$$

где $\Gamma(\mathbf{x})$ — произвольная сфера с центром в точке $\mathbf{x}$ и радиусом, большим $|\rho|$. Далее интегралы вида

$$\int\limits_{H(\mathbf{x})}(G(\rho-\xi)\otimes\nabla^k)\otimes\xi^k\,d\xi, \qquad \int\limits_{H(\mathbf{x})}(G(\rho-\xi)\otimes\nabla^k)\otimes\xi^{k-1}\,d\xi \qquad (k=1,2)$$

упрощаются интегрированием по частям и применением формулы Грина, а интегралы

$$\int\limits_{H(\mathbf{x})}G(\rho-\xi):J((\varepsilon(\mathbf{x})\otimes\nabla^k)\xi^k)\,d\xi=$$

$$=[A_k^{(s)}([C_*])(\varepsilon(\mathbf{x})\otimes\nabla^k)]\rho^k-(\varepsilon(\mathbf{x})\otimes\nabla^k)\rho^k \tag{5.10}$$

в силу тождества (1.7), в котором следует заменить $q^{(k)}$ на $\varepsilon(\mathbf{x})\otimes\nabla^k$ и $[C]$ на $[C_*]=C_*-C=-J$. После вычисления интегралов и подстановки

(5.1) в (5.7) получим

$$\varepsilon_-(\mathbf{x}+\rho)=(I-P(H):J)\,\varepsilon(\mathbf{x})+P(H):(Y_{(3\rightleftarrows5)}-X-$$

$$-Z_{(34\rightleftarrows56)})(\varepsilon(\mathbf{x})\otimes\nabla^2)+\sum_{k=1}^{2}(A_k^{(s)}([C*])(\varepsilon(\mathbf{x})\otimes\nabla^k))\rho^k \qquad (5.11)$$

Таким образом, «действующее» поле деформации $\varepsilon_-(\mathbf{x}+\rho)$ в рассматриваемом приближении описывается многочленом второго порядка. Теперь по формуле (1.6) при $k=0$, 1, 2 можно найти деформацию внутри включения, затем моменты от этой деформации и по формуле (4.7) плотности мультиполей

$$D^{(2)}(\mathbf{x})=-\varphi[C]:\langle A\rangle:[(I-P(H)J)\,\varepsilon(\mathbf{x})+$$

$$+P(H):(Y_{(3\rightleftarrows5)}-X-Z_{(34\rightleftarrows56)})(\varepsilon(\mathbf{x})\otimes\nabla^2)]-\varphi[C]:B(\varepsilon(\mathbf{x})\otimes\nabla^2) \qquad (5.12)$$

$$B_{\alpha\beta\gamma\delta\mu\nu}=2\langle(A_2(\omega,[C]))^{-1}_{\alpha\beta\lambda\theta\eta\tau\rho\pi}T_{\lambda\theta}(\omega)\rangle(A_2^{(s)}([C*]))_{\eta\tau\rho\pi\gamma\delta\mu\nu} \qquad (5.13)$$

$$D^{(3)}(\mathbf{x})=-\varphi[C]:B^{(1)}(\varepsilon(\mathbf{x})\otimes\nabla) \qquad (5.14)$$

$$B^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta\mu\nu}=2\langle(A_1(\omega,[C]))^{-1}_{\alpha\beta\lambda\eta\tau\rho}T_{\lambda\gamma}(\omega)\rangle(A_2^{(s)}([C*]))_{\eta\tau\rho\delta\mu\nu} \qquad (5.15)$$

Сопоставляя (5.12) и (5.14) с (5.3), найдем

$$Y=-\varphi[C]:B^{(1)} \qquad (5.16)$$

$$X=-(I-\varphi[C]:\langle A\rangle:P(H))^{-1}:(\varphi[C]:B+\varphi[C]:\langle A\rangle:(Y_{(3\rightleftarrows5)}-Z_{(34\rightleftarrows56)}) \qquad (5.17)$$

Согласно (4.11) $L_2=X-Y+Z$. Таким образом, тензорный коэффициент L_2 выражается в конечном итоге через тензоры $A_k(\omega,\ [C])$ $(k=0,\ 1,\ 2)$, т. е. через параметры одночастичной задачи.

В рассмотренном приближении уравнения (4.9), (4.10) с учетом (1.13) приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot C_*\varepsilon(\mathbf{x})=\nabla\cdot L_2(\varepsilon(\mathbf{x})\otimes\nabla^2)\\ &n(\mathbf{y})\cdot(C_*\varepsilon(\mathbf{y})-L_2(\varepsilon(\mathbf{y})\otimes\nabla^2))=f(\mathbf{y})\quad(\mathbf{y}\in S)\end{aligned} \qquad (5.18)$$

причем, как уже отмечалось в п. 3, $f(\mathbf{y})$ должна рассматриваться как поверхностная плотность внешних сил, приложенных к свободной поверхности S области V. В частности, если $f(\mathbf{y})=n(\mathbf{y})\cdot\sigma_0$, где σ_0 — постоянный тензор напряжения, то уравнениям (5.18) удовлетворяет $\varepsilon(\mathbf{x})\equiv\varepsilon=C_*^{-1}\sigma_0$. В этом случае все члены со старшими производными равны нулю и с макроскопической точки зрения композит деформируется в точности так же, как однородный материал с эффективным тензором модулей упругости C_*.

Автор благодарит А. А. Вакуленко за интерес к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новожилов В. В.* О связи между напряжениями и упругими деформациями в поликристаллах.– В кн.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. М.: Наука, 1969, с. 365–376.
2. *Болотин В. В.* Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М.: Стройиздат, 1971. 255 с.
3. *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
4. *Фрелих Г.* Теория диэлектриков. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 251 с.
5. *Кунин И. А., Соснина Э. Г.* Эллипсоидальная неоднородность в упругой среде.– Докл. АН СССР, 1971, т. 199, № 3, с. 571–574.
6. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 247 с.

7. *Левин В. М.* К определению эффективных модулей композитных материалов.– Докл. АН СССР, 1975, т. 220, № 5, с. 1042–1045.
8. *Левин В. М.* О концентрации напряжения на включениях в композитных материалах.– ПММ, 1977, т. 41, вып. 4, с. 735–743.
9. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
10. *Бахвалов Н. С.* Осредненные характеристики тел с периодической структурой.– Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 5, с. 1046–1048.
11. *Бахвалов Н. С.* Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами.– Докл. АН СССР, 1975, т. 221, № 3, с. 516–519.
12. *Победря Б. Е., Горбачев В. И.* О статических задачах упругих композитов.– Вестн. МГУ. Сер. матем., механ. 1977, № 5, с. 101–110.

Ленинград

Поступила в редакцию 30.IX.1980