

УДК 531.8

**УПРАВЛЕНИЕ ШАГАЮЩИМ АППАРАТОМ  
С ПОЧТИ НЕВЕСОМЫМИ НОГАМИ.  
НЕПРЕРЫВНЫЙ ВАРИАНТ. I**

**ЛАРИН В. Б., НАУМЕНКО К. И.**

Излагается процедура синтеза системы оптимальной стабилизации шагающего аппарата с весомыми ногами, базирующаяся на асимптотических методах построения алгоритмов управления сингулярно возмущенными объектами [1-3]. Предположение о малой инерционности переносимых ног позволяет ввести в математической модели аппарата с весомыми ногами малый параметр, т. е. рассмотреть математическую модель аппарата с почти невесомыми ногами, из которой в результате предельного перехода получается стратегия управления для модели с невесомыми ногами. Для математической модели аппарата с почти невесомыми ногами задача синтеза системы стабилизации сводится к исследованию периодической сингулярно возмущенной задачи оптимального управления, что позволяет построить первое приближение решения полной задачи, используя периодическое решение укороченной (модель аппарата с невесомыми ногами). В отличие от [4] в рассматриваемой задаче присутствует «погранслой» в асимптотическом разложении. Для иллюстрации применения предложенного алгоритма строится первое приближение периодического решения уравнения Риккати, определяющее закон управления в модели двуногого шагающего аппарата.

Вследствие изменения накладываемых связей (чередование опорных ног) движение шагающего аппарата на разных фазах описывается либо дифференциальными уравнениями, либо конечно-разностными соотношениями, отражающими скачкообразное изменение обобщенных координат при освобождении от старых и наложении новых связей [5]. Задача синтеза системы стабилизации таких объектов достаточно сложна и может быть эффективно решена лишь в линейном приближении путем использования оптимальных методов синтеза управления с обратной связью, т. е. после линеаризации дифференциальных и разностных уравнений в окрестности программной траектории задача формулируется и решается в рамках линейной квадратичной проблемы. Однако даже в такой постановке оказывается существенным влияние размерности задачи (количество степеней свободы аппарата, которые принимаются во внимание) на трудоемкость получения решения. Снижения размерности можно достигнуть, пренебрегая инерционностью ног аппарата, но такая идеализация не всегда приемлема. Поэтому представляет интерес отыскание алгоритма построения системы стабилизации аппарата с весомыми ногами, использующего более простое решение укороченной задачи (модель с невесомыми ногами).

1. Так как предполагается исследовать связь между задачами синтеза систем стабилизации шагающего аппарата с весомыми и невесомыми ногами, то кроме этих двух моделей целесообразно рассмотреть математическую модель аппарата с почти невесомыми ногами. Итак, рассмотрим три модели шагающего аппарата: с весомыми, почти невесомыми и невесомыми ногами. Опишем в рамках этих моделей аппарат как объект управления.

При решении задачи стабилизации математическая модель шагающего аппарата с весомыми ногами [5], который совершает одноопорную регулярную походку (смена опорных ног происходит через интервал времени  $\tau$ ), получается в результате линеаризации уравнений движения в окрестности программной траектории (время шага не варьируется). В этой модели изменение фазового вектора аппарата как объекта управления в связи с изменением накладываемых связей в момент смены опорной ноги

$$(t=i\tau, \tau=1, 2, \dots) \text{ описывается разностным соотношением} \\ \mathbf{x}(i\tau_+) = N\mathbf{x}(i\tau_-), \quad i\tau_+ = i\tau + 0, \quad i\tau_- = i\tau - 0 \quad (1.1)$$

В остальные моменты времени ( $t \neq i\tau$ ) изменение вектора  $\mathbf{x}$  происходит в соответствии с дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad (1.2)$$

В уравнениях (1.1) и (1.2)  $A$  и  $B$  — периодические (с периодом  $\tau$ ) матрицы,  $N$  — постоянная матрица,  $\mathbf{u}$  — вектор управляющих воздействий. Так как эти уравнения являются результатом линеаризации исходных уравнений движения аппарата в окрестности программного движения, то, строго говоря,  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{u}$  являются не фазовым вектором и вектором управляющих воздействий, а вариациями этих векторов относительно программных значений. Однако, поскольку далее рассматриваются только задачи стабилизации, это не должно приводить к путанице.

Математическая модель аппарата с почти невесомыми ногами строится следующим образом. Представим фазовый вектор аппарата и вектор управляющих воздействий в виде

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix}$$

где вектор  $\mathbf{q}$  содержит фазовые координаты, соответствующие «весомому» корпусу шагающего аппарата, а вектор  $\mathbf{v}$  описывает динамику «легких» ног аппарата. Аналогичным образом производится разбиение вектора  $\mathbf{u}$  на две компоненты. Тогда уравнения (1.2) и (1.1) перепишем в виде

$$\dot{\mathbf{q}} = A_1\mathbf{q} + A_2\mathbf{v} + B_1\mathbf{u}_1 + B_2\mathbf{u}_2, \quad \dot{\mathbf{v}} = A_3\mathbf{q} + A_4\mathbf{v} + B_3\mathbf{u}_1 + B_4\mathbf{u}_2 \quad (1.3)$$

$$\mathbf{q}(i\tau_+) = N_1\mathbf{q}(i\tau_-) + N_2\mathbf{v}(i\tau_-), \quad \mathbf{v}(i\tau_+) = N_3\mathbf{q}(i\tau_-) + N_4\mathbf{v}(i\tau_-) \quad (1.4)$$

В этих уравнениях матрицы  $A_j, B_j, N_j$  ( $j=1, 2, 3, 4$ ) являются результатом разбиения на блоки матриц, входящих в уравнения (1.1) и (1.2).

Вводя малый параметр  $\varepsilon$ , определяющий соотношение масс ног и корпуса, получим математическую модель аппарата с почти невесомыми ногами. Будем предполагать, что в уравнениях (1.1) и (1.2) матрицы  $A, B$  и  $N$  с точностью до членов порядка  $\varepsilon$  имеют структуру

$$A = \begin{Bmatrix} A_{10} & 0 \\ A_{30} & A_{40} \end{Bmatrix} + \varepsilon \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{31} & A_{41} \end{Bmatrix}, \quad N = \begin{Bmatrix} N_{10} & N_{20} \\ N_{30} & N_{40} \end{Bmatrix} + \varepsilon \begin{Bmatrix} N_{11} & N_{21} \\ N_{31} & N_{41} \end{Bmatrix} \\ B = \frac{1}{\varepsilon} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{4\varepsilon} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_{10} & B_{20} \\ B_{30} & B_{40} \end{Bmatrix} + \varepsilon \begin{Bmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{31} & B_{41} \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

Следующее предположение касается структуры матриц  $A_{40}, B_{4\varepsilon}$  и  $N_{20}$  и является существенным при решении задачи стабилизации аппарата с почти невесомыми ногами. Записывая уравнения движения аппарата в форме Лагранжа и полагая, что размерность вектора  $\mathbf{u}_2$  равна размерности вектора обобщенных координат, описывающих динамику ног аппарата, естественно считать, что матрицы  $A_{40}$  и  $B_{4\varepsilon}$  имеют вид

$$A_{40} = \begin{Bmatrix} 0 & E \\ F_1 & F_2 \end{Bmatrix}, \quad B_{4\varepsilon} = \begin{Bmatrix} 0 \\ B_0 \end{Bmatrix}$$

где  $E$  — единичная матрица,  $B_0$  — невырожденная матрица («полная» управляемость по обобщенным скоростям ног аппарата). Отметим также, что множитель  $\varepsilon^{-1}$  перед матрицей  $B_0$  отражает тот факт, что с уменьшением веса ног ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) эффективность управления соответственными фазовыми координатами неограниченно возрастает. Скачки фазового вектора в момент смены опорных ног связаны с изменением обобщенных координат, которое обусловлено освобождением от старых связей и наложением

новых импульсных сохраняющихся связей [6], причем предположение малости масс ног обуславливает слабую взаимосвязь в разностном соотношении (1.4) между вектором координат корпуса (вектором  $\mathbf{q}$ ) и обобщенными скоростями ног, т. е.  $N_{20} = \|M \ 0\|$ .

Пренебрегая влиянием динамики ног на движение корпуса аппарата, получим математическую модель аппарата с невесомыми ногами. В [5] этому предельному случаю соответствует укороченный вариант уравнений (1.3) и (1.4) (процесс предельного перехода  $\varepsilon \rightarrow 0$  не рассматривается)

$$\dot{\mathbf{q}} = A_{10}\mathbf{q} + B_{10}\mathbf{u}_1, \quad t \neq i\tau \quad (1.6)$$

$$\mathbf{q}(i\tau_+) = N_{10}\mathbf{q}(i\tau_-) + N_{20}\mathbf{v}(i\tau_-) \quad (1.7)$$

т. е. в модели с невесомыми ногами предполагается, что движение аппарата может быть описано системой уравнений (1.6) и (1.7), размерность которой меньше размерности системы (1.1) и (1.2).

Рассмотрев модель шагающего аппарата как объект управления, обратим внимание на отличие функционалов, в соответствии с которыми решается задача синтеза системы стабилизации аппарата с весомыми и невесомыми ногами. Так, для модели с невесомыми ногами, т. е. для объекта, движение которого описывается уравнениями (1.6) и (1.7), в [5] синтезируется система стабилизации в соответствии с критерием качества

$$I_1(0) = \int_0^{\infty} (\mathbf{q}' Q_1 \mathbf{q} + \mathbf{u}_1' R_1 \mathbf{u}_1) dt + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{v}_1'(i) C_1 \mathbf{v}_1(i) \quad (1.8)$$

В этом функционале штрих означает операцию транспонирования, матрицы  $Q_1 = Q_1' \geq 0$ ,  $R_1 = R_1' > 0$  периодичны по  $t$  с периодом  $\tau$ , матрица  $C_1 = C_1' > 0$  — постоянная, вектор  $\mathbf{v}_1(i)$  включает те компоненты вектора  $\mathbf{v}(i\tau_-)$ , которые соответствуют обобщенным координатам ног аппарата, т. е. предполагается представление

$$\mathbf{v}(i\tau_-) = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_1(i) \\ \mathbf{v}_2(i) \end{Bmatrix}$$

в которое кроме упомянутого  $\mathbf{v}_1(i)$  входит вектор  $\mathbf{v}_2(i)$ , составляющие которого соответствуют обобщенным скоростям ног аппарата. Заметим, что при невесомых ногах изменение вектора  $\mathbf{q}$  в момент смены опорных ног ( $t = i\tau$ ) обусловлено только изменением системы координат, т. е. только компонентами вектора  $\mathbf{v}_1(i)$  [5].

Синтезируя в соответствии с критерием (1.8) систему стабилизации аппарата, получим кроме уравнений непрерывного регулятора  $\dot{\mathbf{u}}_1 = -R_1^{-1} B_{10}' S \mathbf{q}$  еще уравнение, так называемого импульсного регулятора

$$\mathbf{v}_1(i) = -[C_1 + M'S(i\tau_+)M]^{-1} M'S(i\tau_+) N_{10} \mathbf{q}(i\tau_-) \quad (1.9)$$

В этих уравнениях симметрическая и периодическая по  $t$  с периодом  $\tau$  матрица  $S$  удовлетворяет при  $t \neq i\tau$  следующему уравнению Риккати:

$$S' = -SA_{10} - A_{10}'S + SB_{10}R_1^{-1}B_{10}'S - Q_1 \quad (1.10)$$

Скачки этой матрицы при  $t = i\tau$  определяются соотношением

$$S(i\tau_-) = N_{10}' \{ S(i\tau_+) - S(i\tau_+) M [C_1 + M'S(i\tau_+) M]^{-1} M'S(i\tau_+) \} N_{10} \quad (1.11)$$

краевое условие  $S(i\tau_+)$  определяется из решения соответствующего алгебраического уравнения Риккати [5, формула (3.3.35)] так, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Таким образом, в модели аппарата с невесомыми ногами внимание уделяется только процессу изменения вектора  $\mathbf{q}$ , а процесс изменения второй компоненты вектора  $x$  (вектора  $\mathbf{v}$ ) вообще не принимается во внимание. Единственное

условие, которому должен удовлетворять вектор  $\mathbf{v}$  в момент  $t=i\tau_-$ , — это соотношение (1.9).

В модели с весомыми ногами (система уравнений (1.1) и (1.2)) оптимизация производится в соответствии с критерием качества

$$I_2(0) = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}' Q \mathbf{x} + \mathbf{u}' R \mathbf{u}) dt \quad (1.12)$$

Как показано в [5], в этом случае

$$\mathbf{u} = -R^{-1} B' K \mathbf{x} \quad (1.13)$$

где симметрическая и периодическая по  $t$  с периодом  $\tau$  матрица  $K$  удовлетворяет уравнениям

$$K' = -KA - A'K + KBR^{-1}B'K - Q, \quad t \neq i\tau \quad (1.14)$$

$$K(i\tau_-) = N'K(i\tau_+)N \quad (1.15)$$

краевые условия для которых определяются из решения соответствующего алгебраического уравнения Риккати таким образом, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

Приступим к построению оптимизирующего функционала в модели с почти невесомыми ногами. Для исследования процедуры предельного перехода от модели с почти невесомыми ногами к модели с невесомыми ногами ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) необходимо кроме уже сделанного предположения о зависимости элементов матриц  $A$ ,  $B$  и  $N$  от  $\varepsilon$  учесть в функционале (1.12) члены, ограничивающие значения компонент вектора  $\mathbf{v}$  в моменты  $t=i\tau_-$ , предшествующие смене опорной ноги (аналог последнего слагаемого в функционале (1.8)). Поэтому для системы с почти невесомыми ногами критерий качества следует выбирать в виде

$$I(0) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \int_{(i-1)\tau}^{i\tau} (\mathbf{x}' Q \mathbf{x} + \mathbf{u}' R \mathbf{u}) dt + \mathbf{x}'(i\tau_-) C \mathbf{x}(i\tau_-) \right] \quad (1.16)$$

В этом функционале, как и в функционале (1.12), матрицы  $Q=Q' \geq 0$  и  $R=R' > 0$  периодичны по  $t$  с периодом  $\tau$ , матрица  $C=C' \geq 0$  постоянна и, поскольку соответствующая квадратичная форма вводится только для ограничения значений вектора  $\mathbf{v}(i\tau_-)$ , полагаем, что матрица  $C$  имеет следующую блочно-диагональную структуру:  $C = \text{diag} \{0, C_*\} = \text{diag} \{0, C_1, C_2\}$ , где первый блок соответствует размерности вектора  $\mathbf{q}$ , а симметрические матрицы  $C_1$  и  $C_2$  — компонентам  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  вектора  $\mathbf{v}$ . Так как в модели с невесомыми ногами существенными являются значения вектора  $\mathbf{v}$  только в моменты  $t=i\tau_-$ , то структура матрицы  $Q$  должна отражать слабые ограничения, накладываемые на вектор  $\mathbf{v}$  в другие (отличные от  $t=i\tau_-$ ) моменты времени, т. е. для системы с почти невесомыми ногами

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & \varepsilon Q_2 \\ \varepsilon Q_2' & \varepsilon Q_3 \end{bmatrix}$$

В дополнение к этому сделаем следующее предположение о структуре матрицы  $R$ . Далее будем считать, что  $R = \text{diag} \{R_1, \varepsilon^{-1}R_2\}$ .

Введение множителя  $\varepsilon^{-1}$  перед матрицей  $R_2$  объясняется тем, что в связи с большой эффективностью управления  $\mathbf{u}_2$  (в (1.5) матрица  $B_{i2} \neq 0$ ) конечное значение вектора  $\mathbf{u}_2$  может приводить к конечным изменениям вектора  $\mathbf{v}$  за малый (порядка  $\varepsilon$ ) промежуток времени. Поэтому при конечных значениях  $\mathbf{u}_2$  целесообразно потребовать конечности интеграла от соответствующей квадратичной формы на промежутке времени порядка  $\varepsilon$ , т. е. в критерии качества следует принимать весовую матрицу при управлении  $\mathbf{u}_2$  в виде  $\varepsilon^{-1}R_2$ .

2. Рассмотрим задачу синтеза системы стабилизации аппарата с почти невесомыми ногами. Считаем, что движение объекта описывается уравнениями (1.3) и (1.4), в которых соответствующие матрицы имеют структуру (1.5), а критерий качества принимается в виде (1.16). Используем обычную для задач линейной квадратичной проблемы процедуру отыскания минимума функционала (1.16). В этом случае минимальное значение функционала в момент времени  $t$  разыскивается в виде квадратичной формы  $x'(t)K(t)x(t)$ , а уравнение регулятора имеет вид (1.13). Однако в связи с отличием критериев (1.12) и (1.16) преобразование матрицы  $K(t)$  в моменты  $t=i\tau$  уже не будет описываться соотношением (1.15). Действительно

$$x'(\tau_-)K(\tau_-)x(\tau_-) = I(\tau_-) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \int_{i\tau}^{(i+1)\tau} (x'Qx + u'Ru) dt + x'(i\tau_-)Cx(i\tau_-) \right]$$

$$x'(\tau_+)K(\tau_+)x(\tau_+) = I(\tau_+) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{i\tau}^{(i+1)\tau} (x'Qx + u'Ru) dt + \sum_{i=2}^{\infty} x'(i\tau_-)Cx(i\tau_-)$$

и, воспользовавшись соотношением (1.1), имеем для произвольного вектора  $x(\tau_-)$ :

$$x'(\tau_-)K(\tau_-)x(\tau_-) = x'(\tau_-) [N'K(\tau_+)N + C] x(\tau_-)$$

Следовательно  $K(\tau_-) = N'K(\tau_+)N + C$ .

Очевидно, что подобное соотношение будет иметь место и в моменты времени  $t=i\tau$  ( $i=2, 3, \dots$ ). Поэтому в рассматриваемом случае соотношение (1.15) нужно заменить следующим:

$$K(i\tau_-) = N'K(i\tau_+)N + C \quad (2.1)$$

При  $t \neq i\tau$  матрица  $K$  удовлетворяет уравнению Риккати (1.14), которое после разбиения (в соответствии с представлением вектора  $x$  в виде двух компонент  $q$  и  $v$ ) этой матрицы на блоки

$$K = \begin{Bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_2' & K_3 \end{Bmatrix}$$

запишем в виде

$$\begin{aligned} K_1^* &= -K_1A_1 - K_2A_3 - A_1'K_1 - A_3'K_2' + K_1D_1K_1 + K_2D_2'K_1 + \\ &\quad + K_1D_2K_2' + K_2D_3K_2' - Q_1 \\ K_2^* &= -K_1A_2 - K_2A_4 - A_1'K_2 - A_3'K_3 + K_1D_1K_2 + K_2D_2'K_2 + K_1D_2K_3 + \\ &\quad + K_2D_3K_3 - \varepsilon Q_2 \\ K_3^* &= -K_2'A_2 - K_3A_4 - A_2'K_2 - A_4'K_3 + K_2'D_1K_2 + K_3D_2'K_2 + K_2'D_2K_3 + \\ &\quad + K_3D_3K_3 - \varepsilon Q_3 \end{aligned} \quad (2.2)$$

где с точностью до членов порядка  $\varepsilon$  (см. представление матрицы  $B$  в форме (1.5)):

$$D_{11} = D_{10} + \varepsilon D_{11}, \quad D_{21} = D_{20} + \varepsilon D_{21}, \quad D_{31} = \varepsilon^{-1}D_{3\varepsilon} + D_{30} + \varepsilon D_{31}$$

причем, как следует из структуры матрицы  $B_{1\varepsilon}$ , для матрицы  $D_{3\varepsilon}$  имеем  $D_{3\varepsilon} = \text{diag} \{0, D_0\}$ ;  $D_0 = B_0R_2^{-1}B_0'$ .

Следовательно, задача синтеза регулятора сводится к построению периодического решения  $K(t)$  системы уравнений (2.1) и (2.2). Если предположить (условия, при которых справедливо это предположение, будут приведены ниже), что порождающая это периодическое решение матрица  $K(0_+)$  имеет вид  $K(0_+) = \text{diag} \{S(0_+), 0\} + O(\varepsilon)$ , где  $S(0_+)$  определяется

уравнениями (1.10) и (1.11) из решения задачи стабилизации аппарата с невесомыми ногами, то в первом приближении задача построения асимптотического представления периодического решения сводится к построению асимптотического разложения решения в сингулярно возмущенной задаче, в которой не фигурируют условия периодичности.

Принимая во внимание, как и в случае задачи с весомыми ногами, периодичность матрицы  $K(t)$ , пренебрегая членами порядка  $\varepsilon$  и учитывая структуру матрицы  $C$ , из соотношения (2.1) получим следующие краевые условия для системы дифференциальных уравнений (2.2):

$$K_1(\tau_-) = N_{10}' S(0_+) N_{10}, \quad K_2(\tau_-) = N_{10}' S(0_+) N_{20}, \quad K_3(\tau_-) = N_{20}' S(0_+) N_{20} + C_* \quad (2.3)$$

Таким образом, сформулированная задача стабилизации аппарата с почти невесомыми ногами в первом приближении сводится к задаче синтеза закона управления (1.13) динамической системой (1.3), минимизирующего на траекториях этой системы функционал

$$I_0(0) = x'(\tau_-) K_\tau x(\tau_-) + \int_0^\tau (x' Q x + u' R u) dt$$

$$K_\tau = \begin{bmatrix} N_{10}' S(0_+) N_{10} & N_{10}' S(0_+) N_{20} \\ N_{20}' S(0_+) N_{10} & N_{20}' S(0_+) N_{20} + C_* \end{bmatrix}$$

т. е. к решению на интервале  $0 \leq t < \tau$  уравнений (2.2) с краевым условием  $K(\tau_-) = K_\tau$ .

3. Рассмотрим процедуру построения первого приближения решения сингулярно возмущенной задачи. С целью исключения из первых двух уравнений системы (2.2) нелинейных членов, содержащих матрицу  $D_3$  (множитель  $\varepsilon^{-1}$ ), введем медленно меняющиеся матрицы  $H_1$  и  $H_2$  следующим образом:

$$K_1 = H_1 + H_2 K_2', \quad K_2 = H_2 K_3, \quad \text{т. е. } H_1 = K_1 - K_2 K_3^{-1} K_2', \quad H_2 = K_2 K_3^{-1} \quad (3.1)$$

Изменение этих матриц описывается дифференциальными уравнениями (уже не содержащими члены порядка  $\varepsilon^{-1}$ )

$$\begin{aligned} H_1' &= -H_1(A_1 - A_2 H_2') - (A_1' - H_2 A_2') H_1 + H_1 D_1 H_1 - Q_1 + \\ &\quad + \varepsilon(H_2 Q_2' + Q_2 H_2' - H_2 Q_3 H_2') \\ H_2' &= H_2(A_4' + \varepsilon Q_3 K_3^{-1}) - (A_1' - H_1 D_1) H_2 + H_2 A_2' H_2 + \\ &\quad + H_1(D_2 - A_2 K_3^{-1}) - A_3' - \varepsilon Q_2 K_3^{-1} \end{aligned} \quad (3.2)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} H_1(\tau_-) &= N_{10}' \{S(0_+) - S(0_+) M [C_1 + M' S(0_+) M]^{-1} M' S(0_+)\} N_{10} \\ H_2(\tau_-) &= N_{10}' S(0_+) M [C_1 + M' S(0_+) M]^{-1} \|E \ 0\| \end{aligned} \quad (3.3)$$

которые следуют из соотношений (2.3). Эти краевые условия и последнее из соотношений (2.3) совместно с системой дифференциальных уравнений (3.2) и уравнением

$$K_3' = -K_3(A_4 + H_2' A_2) - (A_4' + A_2' H_2) K_3 + K_3(H_2' D_1 H_2 + D_2' H_2 + H_2' D_2 + D_3) K_3 - \varepsilon Q_3 \quad (3.4)$$

могут быть использованы для построения первого приближения решения систем уравнений (2.2). Удерживая в каждом слагаемом правой части уравнения (3.4) только главные члены (пренебрегая в суммах конечными величинами по сравнению с членами порядка  $\varepsilon^{-1}$  и соответственно членами порядка  $\varepsilon$  при наличии конечных величин), перепишем уравнение (3.4) в виде  $K_3' = -K_3 A_{40} - A_{40}' K_3 + \varepsilon^{-1} K_3 D_{3\varepsilon} K_3 - \varepsilon Q_3$ .

Полагая, что соответствующим выбором матрицы  $C_*$  в равенстве (3.2) обеспечено существование  $K_3^{-1}(\tau_-)$ , для матрицы  $L=K_3^{-1}$  имеем уравнение

$$L' = A_{40}L + LA_{40}' + \varepsilon LQ_3L - \varepsilon^{-1}D_{3\varepsilon} \quad (3.5)$$

решение которого, следуя [7], может быть представлено следующим образом:

$$L = \Phi [K_3(\tau_-) - \varepsilon V]^{-1} \Phi' + \varepsilon^{-1}W \quad (3.6)$$

где матрицы  $W$ ,  $\Phi$  и  $V$  определяются из решения системы дифференциальных уравнений

$$W' = A_{40}W + WA_{40}' + WQ_3W - D_{3\varepsilon} \quad (3.7)$$

$$\Phi' = (A_{40} + WQ_3)\Phi, \quad V' = \Phi'Q_3\Phi$$

с краевыми условиями  $W(\tau_-) = 0$ ,  $\Phi(\tau_-) = E$  и  $V(\tau_-) = 0$ .

В связи с наличием множителя  $\varepsilon^{-1}$  в решении (3.6) дифференциального уравнения (3.5) асимптотическое представление этого решения определяется характером изменения матрицы  $W$ , являющейся решением дифференциального уравнения Риккати (3.7) с нулевым краевым условием. В соответствии с уравнением (3.7) матрицы  $W$  и  $W^{-1}$  в пограничном слое ( $\tau > t \geq \tau - \xi$ ,  $\xi > 0$  и мало) с точностью до величины более высокого порядка относительно  $\sigma = \tau - t$  имеют вид

$$W = \begin{vmatrix} 1/3 \sigma^3 D_0 & -1/2 \sigma^2 D_0 \\ -1/2 \sigma^2 D_0 & \sigma D_0 \end{vmatrix}, \quad W^{-1} = 6 \begin{vmatrix} 2\sigma^{-3} D_0^{-1} & \sigma^{-2} D_0^{-1} \\ \sigma^{-2} D_0^{-1} & \sigma^{-1} D_0^{-1} \end{vmatrix} \quad (3.8)$$

Ограничившись рассмотрением объектов с такими матрицами  $A_{40}$ ,  $D_{3\varepsilon}$  и  $Q_3$ , что и далее (до момента  $t=0$ ) матрицы  $W$  и  $W^{-1}$  будут ограничены, получим

$$K_3^{-1}(0) = \Phi(0) [K_3(\tau_-) - \varepsilon V(0)]^{-1} \Phi'(0) + \varepsilon^{-1}W(0)$$

т. е. для  $K_3(0)$  справедливо представление

$$K_3(0) = \varepsilon W^{-1}(0) \quad (3.9)$$

Учитывая представление матрицы  $K_3^{-1} = L$  в виде (3.6) и пренебрегая в уравнениях (3.2) членами порядка  $\varepsilon$ , запишем следующие «укороченные» уравнения для матриц  $H_1$  и  $H_2$ :

$$H_1' = -H_1 A_{10} - A_{10}' H_1 + H_1 D_{10} H_1 - Q_1 \quad (3.10)$$

$H_2' = H_2 (A_{40}' + Q_3 W) - (A_{10}' - H_1 D_{10}) H_2 + H_1 (D_{20} - A_{21} W) - A_{30}' - Q_2 W$  (3.11) которые вместе с краевыми условиями (3.3) и соотношениями (3.6) и (3.1) полностью определяют первое приближение решения рассматриваемой сингулярно возмущенной задачи.

Остановимся на обосновании принятой ранее гипотезы о структуре матрицы  $K(0_+)$ . Из представления (3.9) следует, что  $K_3(0_+) = O(\varepsilon)$ .

Заметим, что  $H_1$  в первом приближении удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению и тем же краевым условиям, что и матрица  $S$  (уравнения (1.10), (1.11) и (3.10), (3.3)), т. е. в первом приближении можно принять  $H_1(t) = S(t) + O(\varepsilon)$ .

Из решения дифференциального уравнения (3.11) с краевым условием (3.3) следует конечность матрицы  $H_2(t)$ . Согласно равенствам (3.1) и (3.9):  $K_2(0_+) = H_2(0_+) K_3(0_+) = O(\varepsilon)$ ,  $K_1(0_+) = H_1(0_+) - H_2(0_+) K_2'(0_+) = S(0_+) + O(\varepsilon)$ . Приведенные соотношения для матриц  $K_1(0_+)$ ,  $K_2(0_+)$  и  $K_3(0_+)$  подтверждают справедливость принятой ранее гипотезы о структуре матрицы  $K(0_+)$ .

Покажем, как при  $\varepsilon \rightarrow 0$  рассматриваемая задача синтеза системы стабилизации аппарата с почти невесомыми ногами вырождается в соответствующую задачу для аппарата с невесомыми ногами. Для этого до-

статочно показать, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  вектор  $\mathbf{v}_1(\tau_-)$  (стратегия импульсного управления) определяется соотношением (1.9), поскольку ясно, что всюду, кроме момента  $t = \tau$ , матрица  $K(t)$  стремится к матрице  $K(t) = = \text{diag} \{S(t), 0\}$ , причем периодическая (с периодом  $\tau$ ) матрица  $S(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.10), а скачки этой матрицы при  $t = i\tau$  подчиняются конечно-разностному соотношению (1.11). Соотношение (1.9) получается в результате предельного перехода ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) в окрестности  $t = \tau$  в дифференциальном уравнении, определяющем изменение вектора  $\mathbf{v}$ . Действительно, это дифференциальное уравнение может быть представлено в виде  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{w} - D_3 K_3 (H_2' \mathbf{q} + \mathbf{v})$ , в котором вектор  $\mathbf{w}$  отражает конечные (которые не содержат величин порядка  $\varepsilon^{-1}$ ) составляющие в правой части уравнений (1.3) при законе управления (1.13), а вторая группа слагаемых ( $-D_3 K_3 (H_2' \mathbf{q} + \mathbf{v})$ ) отражает сингулярную составляющую правой части уравнений (1.3). Непосредственным дифференцированием вектора  $\eta = K_3 (H_2' \mathbf{q} + \mathbf{v})$  легко убедиться, что в выражении для  $\eta$  отсутствуют члены порядка  $\varepsilon^{-1}$ . Из равенств (3.6) и (3.8) следует, что при  $\sigma = \tau - t = O(\varepsilon^{1/4})$   $K_3(\sigma) = O(\varepsilon^{1/4})$ . Поэтому можно утверждать, что при конечных векторах  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{v}$  в момент  $t = \tau_-$  имеем

$$\eta(\tau_-) = \eta(\sigma) + \sigma \dot{\eta}(\sigma) = O(\varepsilon^{1/4}), \quad \sigma < \sigma_* < \tau_-$$

а так как  $K_3^{-1}(\tau_-)$  существует, то  $\mathbf{v}(\tau_-) = -H_2'(\tau_-)\mathbf{q}(\tau_-) + O(\varepsilon^{1/4})$ , откуда следует с учетом соотношения (3.3) уравнение импульсного регулятора (1.9).

Отметим, что полученное первое приближение решения дифференциального уравнения Риккати (2.2) приводит к положительно (неотрицательно) определенной матрице  $K$ , если в порождающей задаче синтеза закона управления аппарата с невесомыми ногами матрица  $S$  является положительно (неотрицательно) определенной. Действительно, матрица  $K$  на основании равенств (3.4) представима в виде

$$\begin{vmatrix} K_1 & K_2 \\ K_2' & K_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & H_2 \\ 0 & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & K_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E & 0 \\ H_2' & E \end{vmatrix}$$

из которого с учетом равенства  $H_1 = S$  следует, что матрица  $K$  является положительно (неотрицательно) определенной, так как сигнатуры матриц  $K$  и  $\text{diag} \{H_1, K_3\}$  совпадают [8].

4. В качестве примера рассмотрим одну из простейших моделей двуногого шагающего аппарата с весомыми ногами. Корпус аппарата идеализируется в виде «тяжелой» точечной массы, расположенной в точке подвеса ног. Управление движением аппарата осуществляется с помощью усилия  $f$ , направленного вдоль опорной ноги, момента  $\mu_1$ , действующего в шарнире, соединяющем стопу и конец опорной ноги, и момента  $\mu_2$ , действующего между опорной и переносимой ногами.

Пусть  $m$  — «тяжелая» масса корпуса аппарата,  $m_0$  — «легкая» масса каждой из ног, центр тяжести каждой ноги расположен на расстоянии  $r$  от точки подвеса, центральный момент инерции ноги  $J = m_0 \rho^2$  ( $\rho$  — радиус инерции). Предположим, что аппарат совершает плоское движение, опираясь на одну или другую ногу с интервалом времени  $\tau$ . Будем задавать положение элементов аппарата с помощью углов  $\varphi_1$  (угол между опорной ногой и направлением вертикали) и  $\varphi_2$  (угол между опорной и переносимой ногами), а также расстоянием  $l$  от точки опоры до точки подвеса ног (фиг. 1).

Уравнения движения шагающего аппарата в течение фазы опирания на одну ногу запишем в форме Лагранжа

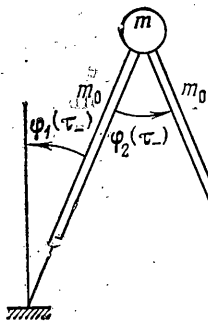
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}'} - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \mathbf{p}'} = \mathbf{n} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{p}' = \|\varphi_1, \varphi_2, l\|, \quad \mathbf{n}' = \|\mu_1, \mu_2, f\|, \quad T = 1/2 \mathbf{p}'^* \theta \mathbf{p}'$$

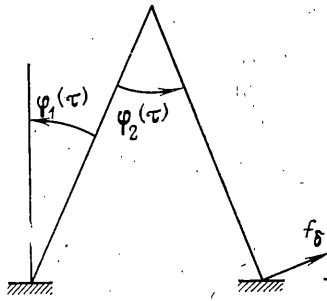
$$\theta = \begin{vmatrix} ml^2 + 2m_0(l^2 + r^2 + \rho^2 - 2lr \cos^2 1/2 \varphi_2) & -m_0(r^2 + \rho^2 - lr \cos \varphi_2) & -m_0 r \sin \varphi_2 \\ -m_0(r^2 + \rho^2 - lr \cos \varphi_2) & m_0(r^2 + \rho^2) & m_0 r \sin \varphi_2 \\ -m_0 r \sin \varphi_2 & m_0 r \sin \varphi_2 & m + 2m_0 \end{vmatrix}$$

$$\Pi = mgl \cos \varphi_1 + m_0 g [(2l - r) \cos \varphi_1 - r \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]$$

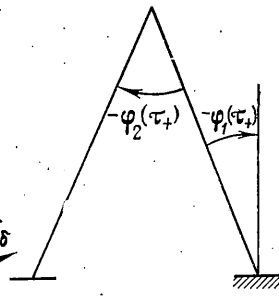




Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Рассмотрим задачу сохранения позы аппарата (программное движение:  $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_1^* = \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_2^* = 0$ ,  $l = h$ ). Линеаризовав уравнения движения (4.1) в окрестности программного движения, получим уравнение

$$A_0 \mathbf{p}'' = B_0 \mathbf{p} + \mathbf{n} \quad (4.2)$$

$$A_0 = \begin{vmatrix} mh^2 + 2m_0[(h-r)^2 + \rho^2] & m_0[(h-r)r - \rho^2] & 0 \\ m_0[(h-r)r - \rho^2] & m_0(r^2 + \rho^2) & 0 \\ 0 & 0 & m + 2m_0 \end{vmatrix}$$

$$B_0 = g \begin{vmatrix} mh + 2m_0(h-r) & m_0 r & 0 \\ m_0 r & -m_0 r & 0 \\ 0 & 0 & m + 2m_0 \end{vmatrix}$$

Таким образом, в линейной постановке задача распадается на задачу управления вертикальным движением (координата  $l$ ) и задачу управления горизонтальным движением (координаты  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ ). Ниже не будут рассматриваться вопросы синтеза системы вертикальной стабилизации. Будем считать, что система вертикальной стабилизации достаточно эффективна и обеспечивает движение точки подвеса ног на высоте  $h$ . Полагая  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\dot{\varphi}_1^*$ ,  $\dot{\varphi}_2^*$  малыми первого порядка, заметим, что  $l = h / \cos \varphi_1$  отличается от  $h$  на величину второго порядка, в то время как  $l$  является величиной первого порядка малости.

Сосредоточим внимание только на системе горизонтальной стабилизации. Для получения соотношения (1.4), описывающего изменение фазового вектора аппарата при смене опорной ноги, будем считать, что в момент смены опорной ноги имеет место мгновенная двухопорность (фиг. 2). Предположим, что как только стопа переносимой ноги соприкоснулась с поверхностью, скорость конца ноги становится равной нулю (отсутствует проскальзывание). Такое наложение импульсных сохраняющихся связей вызывает мгновенное изменение скоростей. Поскольку направленная вдоль ноги сила конечна (она определяется системой вертикальной стабилизации), то вызванная новой связью сила  $f_\delta$ , обуславливающая мгновенное изменение угловых скоростей аппарата (т.е. пропорциональная  $\delta$ -функции Дирака), приложена к концу и направлена перпендикулярно вновь поставленной ноге (тангенциальная составляющая). Тогда изменение угловых скоростей звеньев аппарата в результате мгновенной двухопорности описывается соотношением

$$\begin{vmatrix} \dot{\varphi}_1^* \\ \dot{\varphi}_2^* \end{vmatrix} \Big|_{\tau_-}^{\tau_+} = f_\delta l \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} = \frac{f_\delta l}{m_0 \Delta} \begin{vmatrix} m_0[\rho^2 - (h-r)r] \\ mh^2 + 2m_0[(h-r)^2 + \rho^2] \end{vmatrix}$$

$$\Delta = mh^2(r^2 + \rho^2) + m_0[(h-r)^2 r^2 + 2(h^2 - hr + r^2)\rho^2 + \rho^4]$$

Следовательно

$$\dot{\varphi}_1^*(\tau) - \dot{\varphi}_1^*(\tau_-) = f_\delta l a_1, \quad \dot{\varphi}_2^*(\tau) - \dot{\varphi}_2^*(\tau_-) = f_\delta l a_2 \quad (4.3)$$

и, кроме того

$$\varphi_1(\tau) = \varphi_1(\tau_-), \quad \varphi_2(\tau) = \varphi_2(\tau_-) \quad (4.4)$$

При описании процесса мгновенной двухопорности система координат была связана с точкой опоры на предыдущем шаге. Так как в момент  $t = \tau_+$  аппарат будет опираться уже на другую ногу, то в системе координат, связанной с новой опорной ногой (фиг. 3), имеем

$$\varphi_1(\tau_+) = \varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau), \quad \varphi_2(\tau_+) = -\varphi_2(\tau) \quad (4.5)$$

Из этих соотношений следуют равенства  $\dot{\varphi}_1^*(\tau) = \dot{\varphi}_1^*(\tau_+) + \dot{\varphi}_2^*(\tau)$ ,  $\dot{\varphi}_2^*(\tau) = -\dot{\varphi}_2^*(\tau_+)$ , которые совместно с равенствами (4.3) описывают скачки угловых ско-

ростей в процессе смены опорной ноги

$$\begin{aligned}\varphi_1^*(\tau_+) - \varphi_2^*(\tau_+) &= \varphi_1^*(\tau_-) + f_\delta l a_1 \\ \varphi_2^*(\tau_+) &= -\varphi_2^*(\tau_-) - f_\delta l a_2\end{aligned}\quad (4.6)$$

Объединив равенства (4.4) и (4.5), имеем скачки координат при смене опорной ноги

$$\varphi_1(\tau_+) = \varphi_1(\tau_-) - \varphi_2(\tau_-), \quad \varphi_2(\tau_+) = -\varphi_2(\tau_-) \quad (4.7)$$

Для определения величины  $f_\delta$  используем принятую ранее гипотезу, что в момент времени  $t = \tau$  конец переносимой ноги имеет нулевую скорость. Так как  $l$  мало, то из равенства нулю производной от горизонтальной составляющей радиуса вектора  $r_c = l[\sin \varphi_1 + \sin(\varphi_2 - \varphi_1)]$  конца переносимой ноги  $r_c^* = l[\cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \times (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)] = 0$  имеем  $\varphi_2^*(\tau) = \varphi_2^*(\tau_+) = 0$ , т. е. из второго соотношения (4.6) получим равенство  $f_\delta l = -a_2^{-1} \varphi_2^*(\tau_-)$ , подстановка которого в (4.6) дает

$$\varphi_1^*(\tau_+) = \varphi_1^*(\tau_-) - (a_1/a_2) \varphi_2^*(\tau_-), \quad \varphi_2^*(\tau_+) = 0 \quad (4.8)$$

Введем вектор фазовых координат и вектор управляющих воздействий в виде

$$x = \begin{Bmatrix} q \\ v \end{Bmatrix}, \quad q = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_1^* \end{Bmatrix}, \quad v = \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_2^* \end{Bmatrix}, \quad u = \begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{Bmatrix}$$

Тогда соотношения (4.7) и (4.8) описывают процесс преобразования фазового вектора шагающего аппарата при смене опорной ноги в форме уравнений (1.4), а первые два уравнения (4.2) записываются в форме уравнений (1.3). Полагая, что  $m \gg m_0$ , обозначим  $\varepsilon = m_0/m$ . Тогда матрицы, определяющие дифференциальные уравнения движения аппарата в фазе опирания на одну ногу и разностные соотношения в момент смены опорной ноги, записываются в виде (1.5), причем

$$\begin{aligned}A_{10} &= \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{Bmatrix}, \quad A_{21} = \frac{r\alpha^2}{h} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}, \quad A_{30} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ a^2 & 0 \end{Bmatrix}, \quad A_{40} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{Bmatrix} \\ B_{10} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ b_1 \end{Bmatrix}, \quad B_{20} = B_{30} = \begin{Bmatrix} 0 \\ b_1 - \frac{r}{h} b_2 \end{Bmatrix}, \quad B_{40} = \begin{Bmatrix} 0 \\ b_2 \end{Bmatrix} \\ N_{10} &= E, \quad N_{30} = 0, \quad N_{20} = N_{40} = \begin{Bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (4.9)$$

$$a^2 = g/h, \quad \alpha^2 = gr/(r^2 + \rho^2), \quad b_1 = 1/(mh^2), \quad b_2 = 1/[m(r^2 + \rho^2)]$$

Будем синтезировать систему стабилизации шагающего аппарата в соответствии с критерием качества (1.16), в котором  $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$ ,  $R = \text{diag}\{r_1, \varepsilon^{-1}r_2\}$ ,  $C_* = \text{diag}\{c_1, c_2\}$ , т. е. ограничения в критерии качества накладываются только на управляющие воздействия и на фазовые координаты, описывающие динамику переносимой ноги в момент постановки этой ноги на поверхность. Следовательно, для матриц, определяющих уравнения (2.2), кроме соотношений (4.9) имеем

$$\begin{aligned}D_{10} &= d_1 D_*, \quad D_{20} = d_2 D_*, \quad D_{30} = d_3 D_*, \quad D_* = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}, \quad d_1 = b_1^2/r_1 \\ d_2 &= \frac{1}{r_1} \left( b_1^2 - \frac{r}{h} b_1 b_2 \right) + \frac{1}{r_2} \left( b_1 b_2 - \frac{r}{h} b_2^2 \right), \quad d_3 = \frac{b_2^2}{r_2}\end{aligned}$$

Для нахождения первого приближения периодического решения дифференциальных уравнений (2.2), определяющих оптимальный закон управления (1.13), необходимо определить на интервале  $0 \leq t < \tau$  решение дифференциального уравнения (3.10) с краевым условием (3.3). Это решение в рассматриваемом примере имеет вид (см. в [5] решение задачи стабилизации аппарата с невесомыми ногами минимальными управляющими воздействиями)

$$\begin{aligned}H_1(t) &= K_1(t) = S(t) = x(t) \begin{Bmatrix} a^2 & -a \\ a & 1 \end{Bmatrix} \\ x(t) &= 2ac_1 \text{sh } a\tau / \{a^3 \exp [a(2t - \tau)] + c_1 d_1 \text{sh } a\tau\}\end{aligned}$$

Решением системы дифференциальных уравнений (3.7) будут матрицы

$$\Phi(t) = \begin{vmatrix} \cos \alpha \sigma & -\frac{1}{\alpha} \sin \alpha \sigma \\ \alpha \sin \alpha \sigma & \cos \alpha \sigma \end{vmatrix}, \quad V(t) = 0$$

$$W(t) = d_3 \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_3} \left( \frac{\alpha \sigma}{2} - \frac{\sin 2\alpha \sigma}{4} \right) & -\frac{1}{2\alpha^2} \sin^2 \alpha \sigma \\ -\frac{1}{2\alpha^2} \sin^2 \alpha \sigma & \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\alpha \sigma}{2} + \frac{\sin 2\alpha \sigma}{4} \right) \end{vmatrix}$$

$$\det W(t) = \frac{d_3^2}{4\alpha^4} (\alpha^2 \sigma^2 - \sin^2 \alpha \sigma), \quad \sigma = \tau - t$$

Из краевого условия (2.3) имеем  $K_3(\tau_-) = \text{diag} \{c_1 + a^2 \kappa(0), c_2\}$ , т. е.

$$K_3(t) = L^{-1}(t) = [\Phi(t)K_3^{-1}(\tau_-)\Phi'(t) + \varepsilon^{-1}W(t)]^{-1}$$

Для определения матрицы  $K_2(t) = H_2(t)K_3(t)$  необходимо проинтегрировать уравнение (3.11) с краевым условием (3.3), которое в рассматриваемом примере имеет вид

$$H_2(\tau_-) = -\frac{\kappa(0)}{c_1} \begin{vmatrix} a^2 & 0 \\ a & 0 \end{vmatrix}$$

Интегрирование этого уравнения может быть выполнено аналитически, однако в связи с громоздкостью конечный результат не приводится.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Васильева А. Б., Бугузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 273 с.
2. Kokotović P. V., Yackel R. A. Singular perturbation of linear regulators: basic theorems. — IEEE Trans. Automat. Contr., 1972, AC-17, N 1, p. 29-37.
3. O'Malley R. E. Jr. Singular perturbations and optimal control. — In: Lecture notes in mathematics, v. 680. Berlin: Springer-Verlag, 1978, p. 174-218.
4. Дмитриев М. Г. О сингулярных возмущениях в линейной периодической задаче оптимального управления с квадратичным функционалом. — In: Proc. 8th Int. conference on nonlinear oscillations. Prague, 1978, v. 2. Prague: Academia, 1979, p. 861-866.
5. Ларин В. Б. Управление шагающими аппаратами. Киев: Наукова думка, 1980. 168 с.
6. Попов Е. П., Верецагин А. Ф., Зенкевич С. Л. Манипуляционные роботы: динамика и алгоритмы. М.: Наука, 1978. 398 с.
7. Захар-Иткин М. Х. Матричное дифференциальное уравнение Риккати и полугруппа дробно-линейных преобразований. — Успехи матем. наук, 1973, т. 28, вып. 3 (171), с. 83-120.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.

Киев

Поступила в редакцию  
25.XII.1980