

УДК 531.8

ЗАДАЧА ОБ УДАРЕ ДВУЗВЕННОГО МЕХАНИЗМА

РУБАНОВИЧ Е. М., ФОРМАЛЬСКИЙ А. М.

Рассматривается плоский механизм, состоящий из двух шарнирно-соединенных звеньев. Конец одного из звеньев находится на непроницаемой поверхности, т. е. на систему наложена неустойчивающая связь. В некоторый момент времени конец другого звена с абсолютно неупругим ударом касается поверхности. Изучается движение системы после удара. В отличие от работы [1] здесь рассматривается случай произвольного направления (перед ударом) вектора скорости конца ударяющегося звена, когда возникают новые эффекты.

Публикуемые результаты — непосредственное продолжение работы [1] — представляют интерес для задач динамики двуногой ходьбы [2–6].

1. Рассмотрим плоский двузвенный механизм BOD , состоящий из двух одинаковых однородных стержней (ног) OB и OD длины l и массы m , соединенных в точке O плоским шарниром, ось которого перпендикулярна плоскости BOD (фиг. 1). Движение тела будем рассматривать в вертикальной плоскости.

Допустим, что при $t < 0$ двузвенник двигался так, что точка B была неподвижной, т. е. нога OB стояла на горизонтальной прямой AX (фиг. 1). Пусть в момент $t = 0$ конец D ноги OD касается этой прямой (фиг. 2). Ось AU системы координат XAY направим вертикально вверх, положение начала отсчета A конкретизировать не будем. Если касание происходит с ненулевой скоростью, то возникает удар, который будем считать абсолютно неупругим, т. е. скорость точки D после удара становится равной нулю

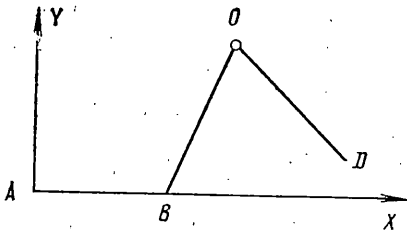
$$x_1^*(+0) = y_1^*(+0) = 0 \quad (x_1 = x_D, y_1 = y_D) \quad (1.1)$$

Предположим, что к телу BOD в момент удара прикладываются силы реакций связи и веса.

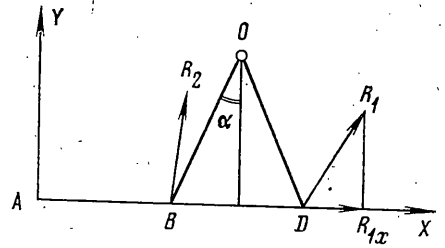
Определим движение точки B сразу после удара. Поставим задачу так: найти условия, при которых точка B останется на поверхности (на связи), а также условия, при которых она уйдет с поверхности вверх (другого движения быть не может, так как поверхность является непроницаемой).

Для составления уравнений удара необходимо рассмотреть движение свободной (в отсутствие каких-либо связей) системы с четырьмя степенями свободы. Для последующего анализа уравнений удара удобно [4] в качестве обобщенных координат выбрать декартовы координаты x_1, y_1 конца D ноги OD и x_2, y_2 конца B ноги OB . Дело в том, что в момент удара на двузвенник не действуют никакие импульсные силы, кроме сил реакции, прикладываемых к концам ног. Горизонтальные и вертикальные составляющие этих сил являются обобщенными силами, отвечающими координатам x_1, y_1, x_2, y_2 .

Выражение для кинетической энергии свободного двузвенника имеет вид: $T = \frac{1}{2} z^* G(z) z^*$, где $z^* = \|x_1, y_1, x_2, y_2\|$ (звездочка означает транспони-



Фиг. 1



Фиг. 2

рование). Матрица $G(z)$ для рассматриваемой системы имеет вид [1]:

$$G(z) = G = \frac{m}{2} \begin{pmatrix} \frac{3 \cos^2 \alpha + 1}{3 \cos^2 \alpha} & -\frac{1}{\sin 2\alpha} & \frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{3 \cos^2 \alpha} & \operatorname{ctg} 2\alpha \\ -\frac{1}{\sin 2\alpha} & \frac{3 \sin^2 \alpha + 1}{3 \sin^2 \alpha} & -\operatorname{ctg} 2\alpha & \frac{3 \sin^2 \alpha - 1}{3 \sin^2 \alpha} \\ \frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{3 \cos^2 \alpha} & -\operatorname{ctg} 2\alpha & \frac{3 \cos^2 \alpha + 1}{3 \cos^2 \alpha} & \frac{1}{\sin 2\alpha} \\ \operatorname{ctg} 2\alpha & \frac{3 \sin^2 \alpha - 1}{3 \sin^2 \alpha} & \frac{1}{\sin 2\alpha} & \frac{3 \sin^2 \alpha + 1}{3 \sin^2 \alpha} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Матрица G выписана для момента удара, когда звенья OB и OD , расположенные по разные стороны от вертикали, образуют с ней один и тот же угол α .

Реакции связи $R_1(R_{1x}, R_{1y})$ и $R_2(R_{2x}, R_{2y})$, приложенные к точкам D и B соответственно в момент удара ($t=0$), являются импульсными воздействиями $R_{ix} = E_{ix} \delta(t)$, $R_{iy} = E_{iy} \delta(t)$ ($i=1, 2$), где $\delta(t)$ — обобщенная дельта-функция, E_{ix} , E_{iy} — импульсы сил реакции.

Уравнения удара имеют следующий вид [1, 7]:

$$G[z^*] = E, \quad [z^*] = z^*(+0) - z^*(-0) \quad (1.3)$$

$$z^* = \begin{pmatrix} z_1^* \\ z_2^* \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}, \quad z_i^* = \begin{pmatrix} x_i^* \\ y_i^* \end{pmatrix}, \quad E_i = \begin{pmatrix} E_{ix} \\ E_{iy} \end{pmatrix} \quad (i=1, 2)$$

2. В работе [1] рассматривался случай, когда $x_1^*(-0) = 0$, т. е. когда скорость точки D перед ударом перпендикулярна опорной поверхности. Далее рассмотрим общий случай, когда вектор скорости $z_1^*(-0)$ в точке D перед ударом имеет произвольное направление. Будем считать, что

$$y_1^*(-0) < 0 \quad (2.1)$$

В соответствии с постановкой задачи

$$z_2^*(-0) = 0, \quad z_1^*(+0) = 0 \quad (2.2)$$

Если после удара точка B остается на месте, то $z_2^*(+0) = 0$. При этом из уравнений (1.3) получаем

$$E_{1y} = -(g_{21}x_1^*(-0) + g_{22}y_1^*(-0)) \quad (2.3)$$

$$E_{2y} = -(g_{41}x_1^*(-0) + g_{42}y_1^*(-0)) \quad (2.4)$$

Примем допущение о том, что если точка B покидает поверхность, то это происходит без удара в ноге OB , т. е. при $E_2 = 0$. При этом допущении из уравнений (1.3) имеем

$$E_{1y} = -\frac{1}{\det G_{22}} \left\{ \begin{vmatrix} g_{21} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix} x_1^*(-0) + \begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix} y_1^*(-0) \right\} \quad (2.5)$$

$$y_2^*(+0) = \frac{1}{\det G_{22}} \{ (g_{33}g_{41} - g_{31}g_{43}) x_1^*(-0) + (g_{33}g_{42} - g_{32}g_{43}) y_1^*(-0) \} \quad (2.6)$$

где g_{ij} ($i, j=1, \dots, 4$) — элементы матрицы G .

Так как связи, накладываемые на систему в точках B и D , считаются односторонними, то решение системы (1.3) должно удовлетворять условиям

$$E_{1y} \geq 0, E_{2y} \geq 0, y_2^*(+0) \geq 0 \quad (2.7)$$

Составляющие $x_1^*(-0)$, $y_1^*(-0)$ вектора скорости $z_1^*(-0)$ входят в выражения (2.3)–(2.6) линейно, поэтому решение неравенств (2.7) зависит только от направления вектора $z_1^*(-0)$ и не зависит от его абсолютной величины. Однако если считать, что конец B до удара находится на опорной поверхности, то вертикальная составляющая реакции в точке B до удара должна быть неотрицательной. Для этого абсолютная величина скорости $|z_1^*(-0)|$ не должна быть слишком большой.

Обозначим через γ угол между вектором $z_1^*(-0)$ и осью $AХ$. Угол γ будем считать положительным, если он отсчитывается от оси $AХ$ против часовой стрелки. Исходя из сделанного выше замечания, будем решение неравенств (2.7) представлять графически на плоскости переменных α , γ

$$0 < \alpha < 1/2\pi, \quad -\pi < \gamma < 0 \quad (2.8)$$

(здесь учтено неравенство (2.1)).

Так как $G > 0$, из соотношения (2.6), справедливого при отрыве звена OB от поверхности, получаем

$$(g_{33}g_{41} - g_{31}g_{43}) x_1^*(-0) + (g_{33}g_{42} - g_{32}g_{43}) y_1^*(-0) \geq 0 \quad (2.9)$$

Переходя к переменным α , γ и учитывая (1.2), можно найти решение неравенства (2.9) (заштрихованная область на фиг. 3; α и γ даны в градусах). Уравнение границ γ_1 этой области имеет вид

$$\gamma = \gamma_1(\alpha) = \begin{cases} -\pi + \text{arctg } k & (k \geq 0) \\ \text{arctg } k & (k < 0) \end{cases}$$

$$k = 6 \sin 2\alpha (1 - 3 \sin^2 \alpha) / (9 \cos^2 2\alpha + 3 \cos 2\alpha - 5)$$

Из соотношения (2.5), справедливого при отрыве точки B от поверхности, следует, что первое условие (2.7) выполняется, если

$$\gamma_2(\alpha) \leq \gamma < 0$$

$$\gamma_2(\alpha) = -\pi + \text{arctg} \frac{15 \sin 2\alpha}{25 + 12 \cos 2\alpha - 9 \cos^2 2\alpha} \quad (2.10)$$

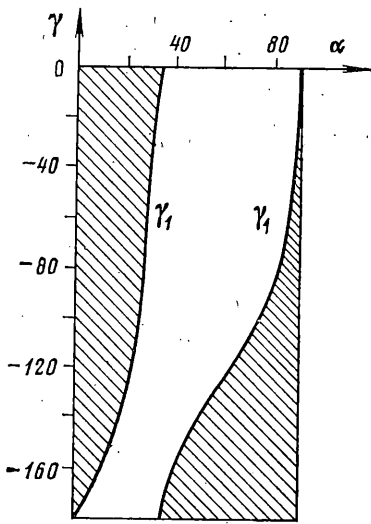
На кривой $\gamma = \gamma_2(\alpha)$ величина $E_{1y} = 0$. Из выражения (2.4), справедливого, когда конец B остается на поверхности, следует, что второе условие (2.7) выполняется, если

$$g_{41} x_1^*(-0) + g_{42} y_1^*(-0) \leq 0 \quad (2.11)$$

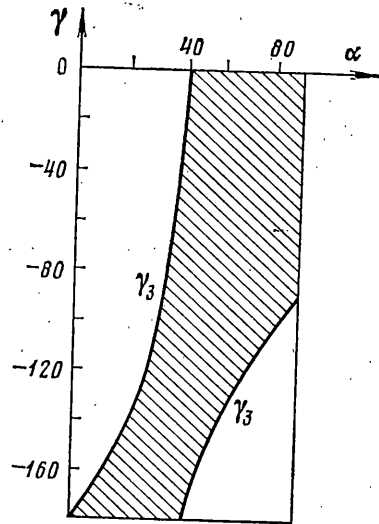
Переходя к переменным α , γ , получаем решение неравенства (2.11) — фиг. 4. Уравнение границы γ_3 заштрихованной области имеет вид

$$\gamma = \gamma_3(\alpha) = \begin{cases} -\pi + \text{arctg } k & (k \geq 0) \\ \text{arctg } k & (k < 0) \end{cases}$$

$$k = (3 \text{tg } \alpha \cos 2\alpha) / [2(1 - 3 \sin^2 \alpha)]$$



Фиг. 3



Фиг. 4

На кривой $\gamma = \gamma_3(\alpha)$ величина $E_{2y} = 0$. Из соотношения (2.3), справедливого, если точка B остается на поверхности, следует, что условие $E_{1y} \geq 0$ выполняется, когда

$$\gamma_4(\alpha) \leq \gamma < 0; \quad \gamma_4(\alpha) = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \alpha}{2(1+3 \sin^2 \alpha)} \quad (2.12)$$

На кривой $\gamma = \gamma_4(\alpha)$ величина $E_{1y} = 0$. На интервале

$$\frac{1}{4}\pi < \alpha < \alpha' \quad \left(\alpha' = \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 54,7^\circ \right) \quad (2.13)$$

кривые γ_2 и γ_4 совпадают. Обозначим через γ_5 кривую, уравнение которой имеет вид

$$\gamma = \gamma_5(\alpha) = \gamma_4(\alpha) \quad (0 < \alpha < \alpha'); \quad \gamma = \gamma_5(\alpha) = \gamma_2(\alpha) \quad (\alpha' \leq \alpha < \frac{1}{2}\pi). \quad (2.14)$$

Кривая $\gamma = \gamma_5(\alpha)$ показана пунктиром (фиг. 5). Над кривой γ_5 имеет место неравенство $E_{1y} > 0$, а под ней — противоположное неравенство.

3. Прямоугольник (2.8) разбит на различные области (фиг. 5). В правой части фигуры показано взаимное расположение векторов $z_2^*(+0)$ и E_2 для каждой области. Из общих свойств системы (1.3) вытекает, что эти векторы всегда образуют тупой угол [4].

В области I (левой) имеют место неравенства

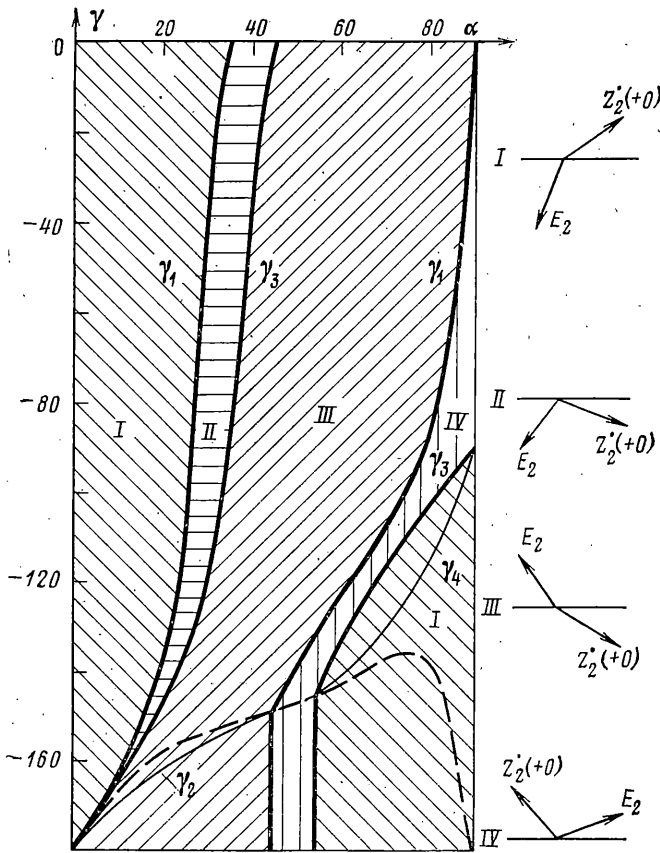
$$E_{2y} < 0, \quad y_2^*(+0) > 0 \quad (3.1)$$

т. е. вектор $z_2^*(+0)$ направлен вверх от опорной поверхности, а вектор E_2 — вниз. Следовательно, точка B после удара уходит с поверхности вверх.

В области II оба вектора $z_2^*(+0)$ и E_2 направлены под опорную поверхность. В этом случае точка B не может ни оторваться от поверхности, ни остаться на ней без движения (из-за односторонности связи), может только проскальзывать. Скорость проскальзывания вычисляется так же, как в [4], введением закона трения при ударе [8], аналогичного закону Кулона

$$|E_{2x}| \leq f E_{2y} \quad (3.2)$$

где f — коэффициент трения. Произведя почти те же выкладки [4], получим, что в области II точка B независимо от значения коэффициента



Фиг. 5

трения f будет скользить по поверхности со скоростью

$$x_2^*(+0) = (I + fF) / (g_{33} + fg_{43}) \quad (3.3)$$

$$I = g_{31}x_1^*(-0) + g_{32}y_1^*(-0), \quad F = g_{41}x_1^*(-0) + g_{42}y_1^*(-0)$$

4. Рассмотрим часть прямоугольника (2.8), лежащую правее области II. Она делится кривой (2.14) на две. Пусть сначала

$$\gamma > \gamma_5(\alpha) \quad (4.1)$$

В области II (при условии (4.1)) вектор $z_2^*(+0)$ направлен вниз, а вектор E_2 — вверх от опорной поверхности. Поэтому можно сделать вывод, что точка B остается на поверхности без движения. Если же, как и для области II, ввести трение в точке B при ударе (3.2), то получим, что при

$$0 \leq f < |I/F| \quad (4.2)$$

точка B скользит по поверхности. Скорость скольжения вычисляется по формуле (3.3), если $I > 0$, и по формуле $x_2^*(+0) = (I - fF) / (g_{33} - fg_{43})$, если $I < 0$. Если же $I = 0$ или, если

$$f \geq |I/F| \quad (4.3)$$

точка B остается неподвижной.

В области IV (при условии (4.1)) оба вектора $z_2^*(+0)$ и E_2 направлены вверх. В этом случае не исключается ни отрыв точки B от поверхности, ни сохранение ею неподвижности. Исследования при учете трения (3.2) показывают, что в случае (4.2) звено OB покидает поверхность. При усло-

вии (4.3) так же, как и в [1], не удается однозначно найти движение точки B после удара. Решение можно попытаться получить, изучая взаимодействие ноги OB с поверхностью при большей детализации «микроструктуры» поверхности в точке касания ее ногой OB [1].

В области I (правой) при условии (4.1) имеют место неравенства (3.1). Следовательно, движение точки B после удара в этой области будет таким же, как и в области I (левой): звено OB уходит с поверхности вверх.

5. Пусть теперь

$$\gamma < \gamma_5(\alpha) \quad (E_{1y} < 0) \quad (5.1)$$

Второе неравенство (в скобках) означает, что неудерживающую связь в точке D наложить нельзя. Поскольку для значений α и γ , лежащих в этой области, неудерживающая связь, обеспечивающая выполнение равенств (1.1), не может быть наложена, нужно отказаться от этих равенств. Откажемся от условия $y_1^*(+0) = 0$, а условие $x_1^*(+0) = 0$ сохраним. Таким образом, выражения (2.2) заменим на соотношения

$$z_2^*(-0) = 0, \quad x_1^*(+0) = 0, \quad E_{1y} = 0 \quad (5.2)$$

Соотношения (2.3)–(2.6) справедливы лишь при условии (2.2) При условии (5.2) их необходимо заменить на другие.

Если точка B после удара остается на поверхности, то из уравнений (1.3) и соотношений (5.2) получим

$$y_1^*(+0) = y_1^*(-0) + \frac{g_{21}}{g_{22}} x_1^*(-0) \quad (5.3)$$

$$E_{2y} = \frac{g_{21}g_{42} - g_{22}g_{41}}{g_{22}} x_1^*(-0) \quad (5.4)$$

Если точка B после удара покидает поверхность, то имеем

$$y_1^*(+0) = y_1^*(-0) + \frac{\begin{vmatrix} g_{21} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix}} x_1^*(-0) \quad (5.5)$$

$$y_2^*(+0) = \frac{\begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} & g_{21} \\ g_{32} & g_{33} & g_{31} \\ g_{42} & g_{43} & g_{41} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix}} x_1^*(-0) \quad (5.6)$$

Решение системы (1.3) при допущениях (5.2) должно удовлетворять второму и третьему условиям (2.7), а также условию

$$y_1^*(+0) \geq 0 \quad (5.7)$$

В области (5.1) имеем $x_1^*(-0) < 0$. Так как $G > 0$, то, как следует из соотношения (5.6), звено OB может покинуть поверхность только при условии

$$\begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} & g_{21} \\ g_{32} & g_{33} & g_{31} \\ g_{42} & g_{43} & g_{41} \end{vmatrix} \leq 0$$

Подставляя сюда элементы матрицы G (1.2), получим

$$^{1/4}\pi \leq \alpha < ^{1/2}\pi \quad (5.8)$$

Из соотношения (5.5) следует, что условие (5.7) выполняется при

$$-\pi < \gamma \leq \gamma_2(\alpha) \quad (5.9)$$

Неравенство (5.9) противоположно неравенству (2.10).

Из соотношения (5.4), справедливого, когда конец B остается на поверхности, следует, что $g_{21}g_{42} - g_{22}g_{41} \leq 0$. Подставляя сюда элементы матрицы G , получаем (α' определено в (2.13)):

$$0 < \alpha \leq \alpha' \quad (5.10)$$

Из соотношения (5.3) следует, что условие (5.7) выполняется, если

$$-\pi < \gamma \leq \gamma_4(\alpha) \quad (5.11)$$

Неравенство (5.11) противоположно неравенству (2.12).

Из неравенств (5.8), (5.10) следует, что на интервале

$$0 < \alpha < \alpha' / 4\pi \quad (5.12)$$

взаимное расположение векторов $z_2^*(+0)$ и E_2 такое же, как в области III над кривой γ_3 . Поэтому на фиг. 5 штриховка и цифровое обозначение этих двух областей одинаковы.

На правом конце интервала (5.12) $y_2^*(+0) = 0$. На интервале (2.13) взаимное расположение векторов $z_2^*(+0)$ и E_2 такое же, как в области IV над кривой γ_3 . Поэтому на фиг. 5 эти две области заштрихованы и занумерованы одинаково.

На правом конце интервала (2.13) $E_{2y} = 0$. На интервале

$$\alpha' < \alpha < \alpha' / 2\pi \quad (5.13)$$

взаимное расположение векторов $z_2^*(+0)$ и E_2 такое же, как в области I (правой) выше кривой γ_3 . Поэтому на фиг. 5 штриховка и цифровое обозначение этих двух областей также одинаковы.

При помощи рассуждений, аналогичных предыдущим, можно показать, что при условии (5.1) движение конца B после удара будет таким же, как и в соответствующих областях при условии (4.1). Единственное отличие в движении тела BOD после удара заключается в том, что при условии (4.1) точка D после удара остается на опорной поверхности, а при условии (5.1) — уходит с поверхности вверх.

Следует отметить, что в области (5.9), (5.13) обе ноги OB и OD после удара покидают опорную поверхность, т. е. тело BOD подскакивает вверх. Этот факт не является парадоксальным, как может показаться на первый взгляд, если учесть, что в указанной области вертикальная составляющая вектора количества движения системы перед ударом направлена вверх. Следует помнить, что предположение о $x_2^*(+0) = 0$, $E_{1y} = 0$ (см. выражения (5.2)) является гипотетическим.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рубанович Е. М., Формальский А. М. Некоторые вопросы динамики многозвенных систем, связанные с ударными явлениями. I, II. — Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 2, с. 166–174; № 3, с. 125–133.
2. Велерштейн Р. А., Формальский А. М. Передвижение антропоморфного механизма (со стопами) при импульсных воздействиях. Одноопорная фаза. I. — Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 5, с. 24–33.
3. Велерштейн Р. А., Формальский А. М. Передвижение антропоморфного механизма (со стопами) при импульсных воздействиях. Двухопорная фаза. II. — Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 1, с. 44–47.
4. Белецкий В. В. Динамика двуногой ходьбы. I, II. — Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3, с. 3–14; № 4, с. 3–13.
5. Ларин В. В. Управление шагающими аппаратами. Киев: Наукова думка, 1980. 168 с.
6. Golliday C. L., Nematl H. An approach to analyzing biped locomotion dynamic and designing robot locomotion controls. — IEEE Trans. Automat. Control., 1977, v. 22, No. 6, p. 963–972.
7. Аппель П. Теоретическая механика. М.: Физматгиз, 1960, т. 1. 515 с. т. 2. 487 с.
8. Пановко Я. Г. Введение в теорию механического удара. М.: Наука, 1977, 232 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.II.1981