

УДК 534.014.4

**ОБ АМОРТИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЙ
ПУТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ЖЕСТКОСТЬЮ**

ЛООЗЕ Х., ХАЙМАНН Б.

Исследуется механическая система, состоящая из колеблющейся массы и линейно-упругого элемента с управляемой жесткостью (амортизатор), который соединяет массу с неподвижным фундаментом. Решается задача оптимального гашения колебаний, возникающих после импульсных ударов, при управлении жесткостью амортизатора, когда на систему действует постоянная сила. В [2] была рассмотрена задача, близкая к этой.

Рассматриваются свободные колебания полученной системы (точное и приближенное решение). Строится асимптотическое приближение к периодическим установившимся вынужденным колебаниям системы под действием гармонической нагрузки с постоянной и зависящей от частоты амплитудой.

1. Рассматривается механическая система, состоящая из колеблющейся массы M и линейно-упругого элемента с управляемой жесткостью $c(t)$, который соединяет массу M с неподвижным фундаментом. На массу M действует постоянная сила G (например, собственный вес) и некоторое внешнее возмущение $F(t)$ (фиг. 1).

Эта механическая система удовлетворяет уравнению движения

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + c(t)x = G + F(t) \quad (1.1)$$

Пусть жесткость $c(t)$ амортизатора управляема в пределах

$$c_0 - s \leq c(t) \leq c_0 + s, \quad \varepsilon = s/c_0 \ll 1 \quad (1.2)$$

При помощи соотношений

$$\tau = \omega_0 t = \sqrt{\frac{c_0}{M}} t, \quad x = y + w, \quad w = \frac{G}{c_0},$$

$$\frac{c(t) - c_0}{s} = u(\tau), \quad F_1 = \frac{F}{c_0}$$

преобразуем уравнение (1.1) к виду

$$d^2y/d\tau^2 + y = -\varepsilon u(y+w) + F_1(\tau), \quad |u(\tau)| \leq 1 \quad (1.3)$$

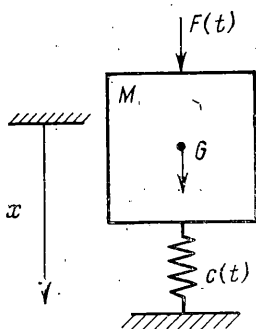
($y(\tau)$ — отклонение массы M от среднего положения равновесия w невозмущенной системы, τ — безразмерное время).

2. Пусть покоящейся системе (1.3) сообщен импульс с интенсивностью σ в момент времени $\tau = \tau_0$, т. е. $F_1(\tau) = \sigma \delta(\tau - \tau_0)$. Тогда она удовлетворяет уравнению (штрих означает дифференцирование по τ)

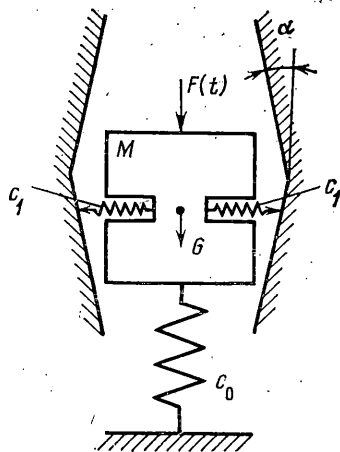
$$y'' + y = -\varepsilon u(\tau)(y+w) \quad (2.1)$$

и начальным условиям

$$y(\tau_0) = 0, \quad y'(\tau_0) = \sigma = y_0' \quad (2.2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Задача оптимального гашения колебаний состоит в нахождении такого управления $u(\tau)$, чтобы за заданный промежуток времени T энергия механических колебаний максимально уменьшилась

$$E(u^\circ, T) = \min_{|u| \leq 1} E(u, T) = \min_{|u| \leq 1} \frac{1}{2} [y(T)^2 + y'(T)^2] \quad (2.3)$$

и будет решена приближенным методом локальной оптимальности для слабо управляемых систем [4].

Сделав замену переменных

$$y(\tau) = A(\tau) \sin(\tau + \varphi(\tau)), \quad y'(\tau) = A(\tau) \cos(\tau + \varphi(\tau)) \quad (2.4)$$

получим

$$A' = -\varepsilon u [w + A \sin(\tau + \varphi)] \cos(\tau + \varphi) \quad (2.5)$$

$$\varphi' = \varepsilon u A^{-1} [w + A \sin(\tau + \varphi)] \sin(\tau + \varphi)$$

с начальными условиями $A(\tau_0) = y_0'$, $\varphi(\tau_0) = -\tau_0$. Энергия механических колебаний принимает вид $E(u, \tau) = \frac{1}{2} A^2(\tau)$. Управление $u^\circ(\tau)$ будет оптимальным в первом приближении, если

$$\frac{dE(u^\circ, \tau)}{d\tau} = \min_{|u| \leq 1} \frac{dE(u, \tau)}{d\tau} = \min_{|u| \leq 1} \{-\varepsilon u [w + A \sin(\tau + \varphi)] A \cos(\tau + \varphi)\},$$

$$\forall \tau \in [\tau_0, T]$$

Отсюда получим $u^\circ(\tau)$ в виде

$$u^\circ(\tau) = \text{sign} \{ [w + A \sin(\tau + \varphi)] A \cos(\tau + \varphi) \}$$

или в силу (2.4) в виде

$$u^\circ(\tau) = \text{sign} [(y + w) y'] \quad (2.6)$$

Отметим, что управление $u^\circ(\tau)$ обеспечивает максимальное убывание амплитуды A в каждый момент времени τ . Подставляя (2.6) в уравнение (1.3), получаем

$$y'' + \varepsilon |y + w| \text{sign } y' + y = F_1(\tau) \quad (2.7)$$

или

$$x'' + \varepsilon |x| \text{sign } x' + x = w + F_1(\tau) \quad (2.8)$$

Последние два уравнения указывают на то, что амортизатор с переменной жесткостью равносителен амортизатору, состоящему из упругого

элемента с постоянной жесткостью и некоторого демпфера типа сухого трения с зависящим от отклонения коэффициентом трения.

Этот результат был получен в [2] методом усреднения на основе принципа максимума. Там же показано, что амортизатор с характеристикой (точка здесь и в дальнейшем обозначает производную по t)

$$R(y, y') = s|y+w| \operatorname{sign} y' + c_0 y \quad (2.9)$$

может быть реализован механическими элементами по принципу, показанному на фиг. 2, где $c_1 = s/(2\mu \operatorname{tg} \alpha)$, $c_0 \gg c_1 \operatorname{tg}^2 \alpha$, $\mu \gg \operatorname{tg} \alpha$; μ — коэффициент сухого трения.

Отметим, что управление коэффициентом жесткости $c(t)$ активным способом было бы чрезвычайно трудно, потому что при этом необходимо четырехкратное переключение жесткости при $A > w$ или двухкратное при $A \leq w$ во время одного периода колебаний при точном наблюдении фазового пространства.

Амортизатор с характеристикой (2.9) может быть трактован как амортизатор под действием постоянной силы G , с характеристикой

$$R(x, x') = s|x| \operatorname{sign} x' + c_0 x \quad (2.10)$$

Амортизатор с характеристикой (2.10) впервые был предложен в [3]. Этот кусочно-линейный амортизатор исследуется в [4–6], где рассматриваются свободные и вынужденные колебания под действием гармонической нагрузки, вопросы существования и устойчивости периодических колебаний под действием периодической нагрузки. В дальнейшем будет проведен анализ амортизатора с характеристикой (2.9).

3. Оценим потери энергии за период колебания. Пусть $w > 0$. Если система совершает колебания вида $y(t) = A \cos(\Omega t + \varphi)$, $A, \varphi = \text{const}$, то потери энергии за период колебания равны

$$\Delta E = \int_t^{t+2\pi/\Omega} R(y, y') y' dt = \int_{\psi}^{\psi+2\pi} A \left\{ s|w+A \cos(\psi+\varphi)| \sin(\psi+\varphi) - \frac{c_0}{2} A \sin 2(\psi+\varphi) \right\} d\psi = \begin{cases} 4wsA & \text{при } A \leq w \\ 2A^2s \left(1 + \frac{w^2}{A^2}\right) & \text{при } A > w \end{cases} \quad (3.1)$$

Это означает, что потери энергии за период колебания зависят от амплитуды A линейно при $A \leq w$ (как при сухом трении) и квадратично при $A > w$ (как при вязком трении), но не зависят от частоты колебаний.

Свободные колебания системы (1.3) удовлетворяют уравнению

$$y'' + \varepsilon |y+w| \operatorname{sign} y' + y = 0 \quad (3.2)$$

с начальными условиями

$$y(\tau_0) = y^0, \quad y'(\tau_0) = y^{0'} \quad (3.3)$$

Без ограничения общности предположим, что $y^0 > 0$; $y^{0'} = 0$. Уравнение (3.2) эквивалентно двум линейным уравнениям

$$y'' + (1+\varepsilon)y = -\varepsilon w, \quad \tau \in (\tau_+, \tau_-) \quad \text{при } y > -w, y' > 0; \quad y < -w, y' < 0 \quad (3.4)$$

$$y'' + (1-\varepsilon)y = \varepsilon w, \quad \tau \in (\tau_-, \tau_+) \quad \text{при } y < -w, y' > 0; \quad y > -w, y' < 0$$

где τ_+, τ_- — моменты переключения.

Общие решения уравнений (3.4) имеют вид

$$y_+(\tau) = -\frac{\varepsilon w}{1+\varepsilon} + a_1 \cos \sqrt{1+\varepsilon}(\tau-\tau_+) + a_2 \sin \sqrt{1+\varepsilon}(\tau-\tau_+); \quad \tau \in (\tau_+, \tau_-) \quad (3.5)$$

$$y_-(\tau) = \frac{\varepsilon w}{1-\varepsilon} + a_3 \cos \sqrt{1-\varepsilon}(\tau-\tau_-) + a_4 \sin \sqrt{1-\varepsilon}(\tau-\tau_-); \quad \tau \in (\tau_-, \tau_+)$$

где постоянные a_1, a_2, a_3, a_4 выражаются через значения фазовых координат точек переключения в моменты τ_+, τ_- . Координаты точек переключения определим методом, изложенным в [7], моменты переключения — из (3.5). Из уравнений (3.4), записанных в виде $y'' + w_{\pm}(y) = 0$, $w_{\pm}(y) = \pm \varepsilon(y+w) + y$, решая равенства $w_{\pm}(y) = 0$, получим стационарные точки фазового пространства $(y_s, 0)$, где

$$y_s \in \left[-\frac{\varepsilon w}{1+\varepsilon}, \frac{\varepsilon w}{1-\varepsilon} \right] = Y_s$$

и соответствующие условия блокировки амортизатора

$$-\frac{\varepsilon w}{1+\varepsilon} \leq y_s \leq \frac{\varepsilon w}{1-\varepsilon}, \quad y_s' = 0 \quad (3.6)$$

Введем следующие обозначения: $E_0(y) = E(y, 0)$ — энергия в точке переключения $y' = 0$, $E_w(y') = E(-w, y')$ — энергия в точке переключения $y = -w$, $E_{\pm}(y, y')$ — энергия консервативных систем, соответствующих уравнениям (3.4):

$$E_{\pm}(y, y') = \frac{1}{2}y'^2 + \frac{1}{2}y^2(1 \pm \varepsilon) \pm \varepsilon wy \quad (3.7)$$

Координаты точек переключения определим из закона постоянства полной механической энергии для консервативных систем:

$$E_+(y, y') = \text{const}, \quad \tau \in (\tau_+, \tau_-), \quad E_-(y, y') = \text{const}, \quad \tau \in (\tau_-, \tau_+) \quad (3.8)$$

Рассмотрим сначала период колебания с четырехкратным переключением. Пусть начальная точка этого периода имеет вид $y(\tau_-^0) = y^0 > 0$; $y'(\tau_-^0) = 0$, тогда из (3.8) следует

$$E_-(y^k, 0) = E_-(w, v^k), \quad E_+(-w, v^k) = E_+(y^{k+1}, 0) \quad (k=0, 1, \dots) \quad (3.9)$$

где $\tau_+^0, \tau_-^1, \dots$ — последующие после τ_-^0 моменты переключения и $y^k = y(\tau_-^k)$; $v^k = y'(\tau_+^k)$.

Из (3.9), (3.5), (3.7) получим

$$E_w(v^k) = E_0(y^k) - \frac{1}{2}\varepsilon(y^k+w)^2 \quad (3.10)$$

$$E_0(y^{k+1}) = E_w(v^k) - \frac{1}{2}\varepsilon(y^{k+1}+w)^2$$

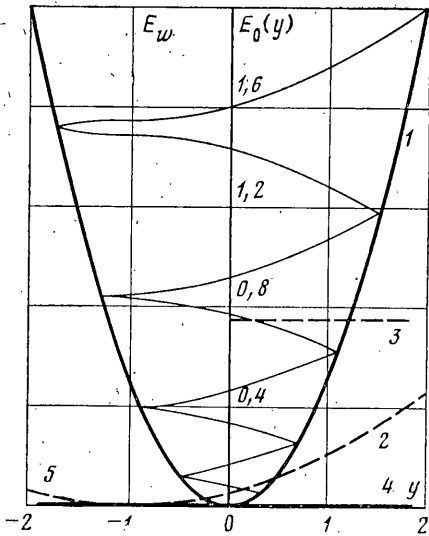
$$v^k = -(-1)^k \sqrt{(y^k+w) [(1-\varepsilon)(y^k-w) - 2\varepsilon w]} \quad (3.11)$$

$$y^{k+1} = -\frac{1}{1+\varepsilon} [\varepsilon w + (-1)^k \sqrt{w^2 + (v^k)^2(1+\varepsilon)}]$$

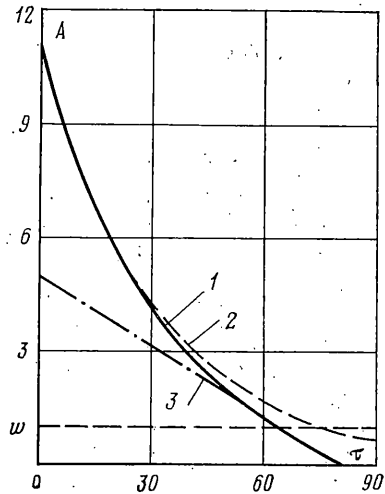
$$\tau_+^k = \tau_-^k + \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \arccos \left[-\frac{w}{(1-\varepsilon)y^k - \varepsilon w} \right] \quad (3.12)$$

$$\tau_-^{k+1} = \tau_+^k + \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \arctg \left[-\frac{v^k \sqrt{1+\varepsilon}}{w} \right]$$

Из условия положительности подкоренного выражения первого уравнения (3.11) следует, что y^{2l} — начальная точка периода с четырехкратным переключением, если $y^{2l} > (1+\varepsilon)w/(1-\varepsilon)$. Поэтому формулы (3.9) —



Фиг. 3



Фиг. 4

(3.12) имеют место для $k=0, \dots, 2N-1$, если

$$y^{2N-2} > (1+\varepsilon)w / (1-\varepsilon) \geq y^{2N} \quad (3.13)$$

Далее рассмотрим период колебания с двухкратным переключением. Пусть начальная точка этого периода $y(\tau_{-0}) = y_0 = y^{2N}$; $y'(\tau_{-0}) = 0$; $\tau_{-0} = -\tau_{-2N}$, тогда из (3.8) следует

$$E_-(y_{2k}, 0) = E_-(y_{2k+1}, 0), \quad E_+(y_{2k+1}, 0) = E_+(y_{2k+2}, 0) \quad (k=0, 1, \dots), \quad (3.14)$$

$$y_{2k} = y(\tau_{-k}), \quad y_{2k+1} = y(\tau_{+k})$$

где $\tau_{+0}, \tau_{-1}, \dots$ — последующие после τ_{-0} моменты переключения.

Из (3.14), (3.5), (3.7) получим

$$E_0(y_{l+1}) = E_0(y_l) - (-1)^l [(y_l + w)^2 - (y_{l+1} + w)^2] \quad (3.15)$$

$$y_{l+1} = -y_l - 2\varepsilon w / [1 - (-1)^l \varepsilon] \quad (3.16)$$

$$\tau_{l+1} = \tau_l + \pi / \sqrt{1 - (-1)^l \varepsilon} \quad (3.17)$$

$$\tau_{2k} = \tau_{-k}, \quad \tau_{2k+1} = \tau_{+k} \quad (3.18)$$

Формулы (3.15) — (3.18) имеют место для $l=0, \dots, n-1$, если $y_{n-1} \neq Y_s$, $y_n \in Y_s$.

На фиг. 3 проиллюстрированы полученные результаты для $\varepsilon=0, 1$, $w=1$, $y_0=2$ и показан графический метод нахождения координат точек переключения y^k , который основывается на формулах (3.10) и (3.15).

Построим теперь приближенное решение. Проведя замену переменных (2.4) в уравнении (3.2), получим систему уравнений

$$A' = -\varepsilon [w + A \sin(\tau + \varphi)] \cos(\tau + \varphi) \quad (3.19)$$

$$\varphi' = \frac{\varepsilon}{A} [w + A \sin(\tau + \varphi)] \sin(\tau + \varphi) \operatorname{sign}[\cos(\tau + \varphi)]$$

с начальными условиями

$$A(\tau_0) = A_0 = y_0, \quad \varphi(\tau_0) = \varphi_0 = \frac{1}{2}\pi - \tau_0 \quad (3.20)$$

Решим систему уравнений (3.19) с учетом (3.20) методом усреднения [8], считая $A(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ во время одного периода колебания приближенно

ПОСТОЯННЫМИ

$$A(\tau) = \begin{cases} [(A_0^2 + w^2) e^{-2\varepsilon(\tau - \tau_0)/\pi} - w^2]^{1/2}, & \tau \in [\tau_0, \tau_w) \\ w \left[1 + \ln \frac{A_0^2 + w^2}{2w^2} - \frac{2\varepsilon}{\pi} (\tau - \tau_0) \right], & \tau \geq \tau_w \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\varphi(\tau) = \varphi_0 \quad \text{для } A_0 > w, \quad \tau_w = \tau_0 + \frac{\pi}{2\varepsilon} \ln \frac{A_0^2 + w^2}{2w^2} \quad (3.22)$$

$$A(\tau) = A_0 - \frac{2\varepsilon w}{\pi} (\tau - \tau_0), \quad \tau \geq \tau_0, \quad \varphi(\tau) = \varphi_0 \quad \text{для } A_0 \leq w$$

Анализ полученных результатов показывает, что амортизатор с характеристикой (2.9) соединяет в себе преимущество вязкого демпфера при больших амплитудах (убывание амплитуды по экспоненциальному закону, пока оно быстрее линейного) и амортизатора типа сухого трения при малых амплитудах (убывание по линейному закону).

Для $A \gg w$ этот амортизатор эквивалентен линейному амортизатору с характеристикой

$$R(y, y') = \frac{2\varepsilon}{\pi} y' + y \quad (3.23)$$

для $A \ll w$ — амортизатору с характеристикой типа сухого трения

$$R(y, y') = \varepsilon w \operatorname{sign} y' + y \quad (3.24)$$

На фиг. 4 кривыми 1, 2, 3 показано убывание амплитуды свободных колебаний, соответственно для амортизаторов (2.9), (3.23), (3.24) при $\varepsilon = 0, 1, w = 1$. Эффективность амортизатора с характеристикой (2.9) особенно проявляется в том случае, когда нужно погасить большие начальные колебания, т. е. если интенсивность импульса σ велика ($\sigma/w \gg 1$). При этом быстрота убывания амплитуды не зависит от собственной частоты системы.

Рассмотрим вынужденные колебания системы (1.3) при гармоническом внешнем воздействии $F_1(\tau) = P(\Omega) \sin \Omega \tau$.

Они удовлетворяют уравнению

$$y'' + \varepsilon |y + w| \operatorname{sign} y' + y = P(\Omega) \sin \Omega \tau \quad (3.25)$$

В [4] доказано, что уравнение $x'' + \varepsilon |x| \operatorname{sign} x' + x = h(\tau)$ ($h(\tau)$ — периодическая непрерывная функция с периодом T) имеет периодическое решение с тем же периодом T . Отсюда следует, что уравнение (3.25) имеет периодическое решение с периодом $T = 2\pi/\Omega$, поскольку при помощи замены переменного $x = y + w$ уравнение приводится к виду $x'' + \varepsilon |x| \operatorname{sign} x' + x = h(\tau)$.

Найдем приближенные установившиеся вынужденные колебания системы (3.25) в предположении, что они будут приближенно гармоническими

$$y(\tau) = A \cos(\Omega \tau + \varphi), \quad 0 < A, \quad \varphi = \text{const} \quad (3.26)$$

Подставив (3.26) в (3.25) и проведя усреднение по периоду колебаний, получим

$$2 \frac{\varepsilon}{\pi} A \left(1 + \frac{w^2}{A^2} \right) = P(\Omega) \cos \varphi$$

$$A(1 - \Omega^2) = -P(\Omega) \sin \varphi \quad \text{для } A > w \quad (3.27)$$

$$4 \frac{\varepsilon}{\pi} w = P(\Omega) \cos \varphi$$

$$A(1 - \Omega^2) = -P(\Omega) \sin \varphi \quad \text{для } A \leq w \quad (3.28)$$

В случае $A \leq w$ необходимо учесть условия блокировки типа (3.6), которые при $\varepsilon \ll 1$ для вынужденных колебаний имеют вид

$$\varepsilon w \geq |A \cos(\Omega\tau + \varphi) - P(\Omega) \sin \Omega\tau| \quad (3.29)$$

или $\varepsilon w \geq \sqrt{(A \sin \varphi + P(\Omega))^2 + A^2 \cos^2 \varphi}$.

Введем обозначения $A_w = A/w$, $P_w = P/w$. Из (3.27) – (3.29) получим решение задачи для $P(\Omega) = \text{const}$.

Если частота внешнего воздействия Ω удовлетворяет соотношениям

$$\Omega_1^2 = 1 - \sqrt{P_w^2 - 16\varepsilon^2/\pi^2} < \Omega^2 \leq 1 \quad (3.30)$$

или $1 \leq \Omega^2 < 1 + \sqrt{P_w^2 - 16\varepsilon^2/\pi^2} = \Omega_2^2$

то

$$A_{w1}^2 = \left\{ P_w^2 - \frac{8\varepsilon^2}{\pi^2} + \left[\left(P_w^4 - \frac{16\varepsilon^2}{\pi^2} \right) (P_w^2 + (1 - \Omega^2)^2) \right]^{1/2} \right\} / \left\{ 2 \left[(1 - \Omega^2)^2 + \frac{4\varepsilon^2}{\pi^2} \right] \right\} \quad (3.31)$$

$$\varphi_1 = \text{arctg} \left\{ (\Omega^2 - 1) A_{w1}^2 \left[\frac{2\varepsilon}{\pi} (A_{w1}^2 + 1) \right]^{-1} \right\}$$

Если Ω удовлетворяет неравенствам

$$\Omega^2 \leq \Omega_1^2 \quad \text{или} \quad \Omega^2 \geq \Omega_2^2 \quad (3.32)$$

тогда

$$A_{w2}^2 = \frac{1}{(1 - \Omega^2)^2} \left(P_w^2 - \frac{16\varepsilon^2}{\pi^2} \right), \quad \varphi_2 = \arccos \frac{4\varepsilon}{P_w \pi} \quad (3.33)$$

Из (3.30) – (3.33) следует необходимое условие существования вынужденных гармонических колебаний типа (3.26):

$$P_w > 4\varepsilon/\pi \quad (3.34)$$

При этом условии неравенство (3.29) автоматически выполняется. Построим амплитудно-частотные характеристики вынужденных колебаний для $P_w = \text{const}$ из решений (3.30) – (3.33). Для

$$(4\varepsilon/\pi) < P_w \leq \sqrt{1 + 16\varepsilon^2/\pi^2} = P_{w1} \approx 1$$

амплитуда $A_w(\Omega)$ определяется равенствами

$$A_w(\Omega) = \begin{cases} A_{w2} & \text{при } 0 \leq \Omega \leq \Omega_1; \quad \Omega \geq \Omega_2 \\ A_{w1} & \text{при } \Omega_1 < \Omega < \Omega_2 \end{cases}$$

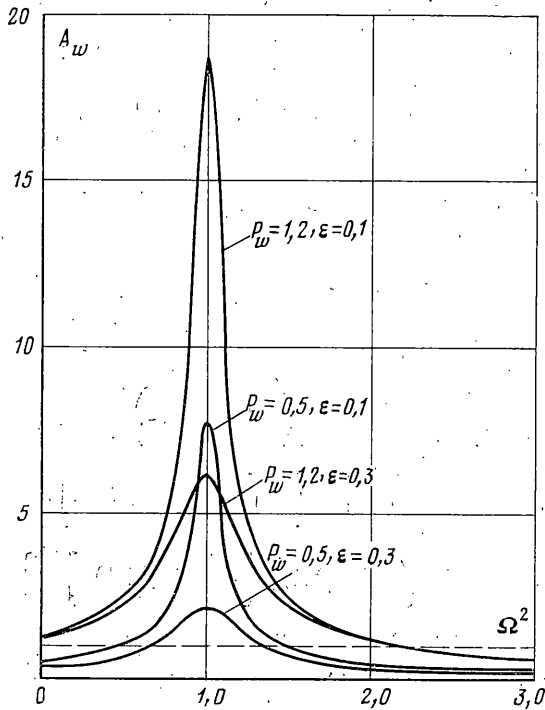
для $P_w > P_{w1}$

$$A_w(\Omega) = \begin{cases} A_{w1} & \text{при } 0 \leq \Omega < \Omega_2 \\ A_{w2} & \text{при } \Omega \geq \Omega_2 \end{cases}$$

Амплитудно-частотные характеристики $A_w(\Omega)$ имеют следующие асимптотики: при больших частотах амплитуда A_w стремится к нулю ($A_w^2(\Omega) \sim \Omega^{-4} [P_w^2 - 16\varepsilon^2/\pi^2]$, $\Omega \rightarrow \infty$), при малых частотах – к значениям $A_w^2(\Omega) \approx P_w^2(\Omega \rightarrow 0)$. При околорезонансных частотах амплитуда A_w ограничена

$$A_w^2(1) = \frac{\pi^2}{8\varepsilon^2} \left[P_w^2 - \frac{8\varepsilon^2}{\pi^2} + \sqrt{P_w^4 - \frac{16\varepsilon^2}{\pi^2} P_w^2} \right]$$

Амплитудно-частотные характеристики для $\varepsilon = 0,1; 0,3; P_w = 0,5; 1,2$ показаны на фиг. 5.



Фиг. 5

Отметим, что при гармоническом воздействии на систему с амортизатором (2.9) при любых частотах колебания с неограниченно возрастающей амплитудой не возникают. Рассмотрим колебания системы (3.25), когда амплитуда внешних возмущений зависит от частоты Ω , как это типично для несбалансированных роторов ($P(\Omega) = p\Omega^2$). В зависимости от значения Ω решение системы уравнений (3.27), (3.28) при $\varepsilon^2 \ll 1$ определится следующими соотношениями ($p_w = P/w$).

Если частота внешнего воздействия Ω удовлетворяет неравенствам

$$\Omega_3^2 = \frac{1 - \sqrt{p_w^2 - 16\varepsilon^2/\pi^2}}{1 - p_w^2} < \Omega^2 < \frac{1 + \sqrt{p_w^2 - 16\varepsilon^2/\pi^2}}{1 - p_w^2} \quad \text{при} \quad 4\varepsilon/\pi \leq p_w < 1 \quad (3.35)$$

или $\Omega^2 > \Omega_3^2 \approx 1/(1 + p_w)$ при $p_w \geq 1$, то

$$A_{w1}^2 = \left\{ p_w^2 \Omega^4 - \frac{8\varepsilon^2}{\pi^2} + \sqrt{p_w^4 \Omega^8 - \frac{16\varepsilon^2}{\pi^2} [p_w^2 \Omega^4 + (1 - \Omega^2)^2]} \right\} \left\{ 2 \left[(1 - \Omega^2)^2 + \frac{4\varepsilon^2}{\pi^2} \right] \right\}^{-1} \quad (3.36)$$

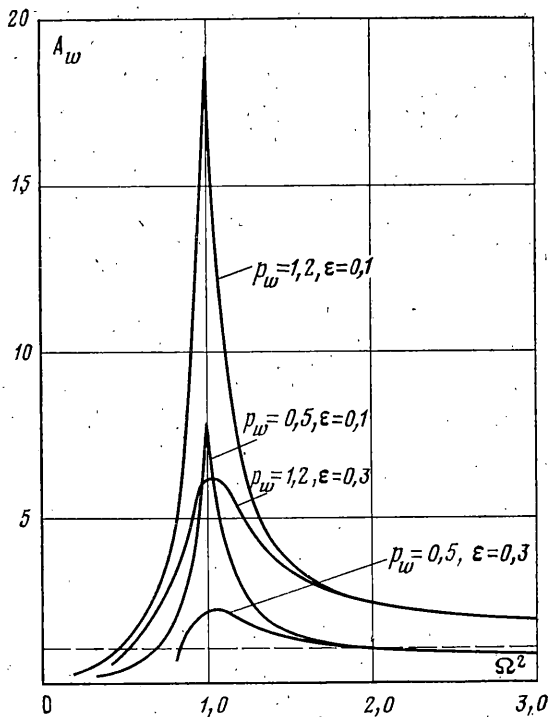
$$\varphi_1 = \arctg \left\{ (\Omega^2 - 1) A_{w1}^2 \left[\frac{2\varepsilon}{\pi} (A_{w1}^2 + 1) \right]^{-1} \right\}$$

Если $\Omega^2 \leq \Omega_3^2$ при $p_w < 4\varepsilon/\pi$, или $p_w \geq 1$, или $\Omega^2 \geq \Omega_4^2$ при $4\varepsilon/\pi \leq p_w < 1$ (3.37)

$$\frac{4\varepsilon}{\pi p_w} < \Omega^2, \quad p_w^4 \Omega^8 \geq \varepsilon^2 \left[(1 - \Omega^2)^2 + \frac{16\varepsilon^2}{\pi^2} (2\Omega^2 - 1) \right] \quad (3.38)$$

то

$$A_{w2}^2 = \frac{\Omega^4}{(1 - \Omega^2)^2} \left[p_w^2 - \frac{16\varepsilon^2}{\pi^2 \Omega^4} \right], \quad \varphi_2 = \arccos \frac{4\varepsilon}{p_w \pi \Omega^2} \quad (3.39)$$



Фиг. 6

Из (3.35)–(3.39) построим амплитудно-частотные характеристики в случае $P = p\Omega^2$:

для $p_w < 4\epsilon/\pi$ амплитуда равна

$$A_w(\Omega) = A_{w2} \text{ при } 4\epsilon/\pi p_w < \Omega^2$$

для $4\epsilon/\pi \leq p_w < 1$

$$A_w(\Omega) = \begin{cases} A_{w2} & \text{при } 4\epsilon/\pi p_w < \Omega^2 \leq \Omega_3^2; \quad \Omega_4^2 \leq \Omega^2 \\ A_{w1} & \text{при } \Omega_3^2 < \Omega^2 < \Omega_4^2 \end{cases}$$

для $p_w \geq 1$

$$A_w(\Omega) = \begin{cases} A_{w2} & \text{при } 4\epsilon/\pi p_w < \Omega^2 \leq \Omega_3^2 \\ A_{w1} & \text{при } \Omega_3^2 < \Omega^2 \end{cases}$$

Амплитудно-частотные характеристики $A_w(\Omega)$ имеют следующие асимптотики: A_w стремится к p_w при больших частотах ($A_w^2(\Omega) \rightarrow p_w^2$, $\Omega \rightarrow \infty$), при малых частотах амплитуда A_w стремится к нулю. При около-резонансных частотах амплитуда A_w ограничена

$$A_w^2(1) = \frac{\pi^2}{8\epsilon^2} \left[p_w^2 - \frac{8\epsilon^2}{\pi^2} + \sqrt{p_w^4 - \frac{16\epsilon^2}{\pi^2} p_w^2} \right]$$

Амплитудно-частотные характеристики для $\epsilon = 0,1; 0,3$; $p_w = 0,5; 1,2$ показаны на фиг. 6.

Заметим, что в случае гармонических возмущений с зависящей от частоты амплитудой не возникают колебания с неограниченно возрастающей амплитудой.

Кроме амплитуды вынужденных колебаний важной характеристикой амортизатора является динамическая нагрузка, действующая на фундамент $R(y, y') = \epsilon |y + w| \text{sign } y' + y$. Амплитуду динамической нагрузки $R_A(\Omega)$ оценим сверху величиной $r(\Omega) = (\epsilon + 1)A + \epsilon w$.

Не выписывая выражения для $r(\Omega)$, отметим некоторые его свойства: функция $r(\Omega)$ ограничена сверху при любых частотах для $P = \text{const}$ и $P =$

$\propto p\Omega^2$; при больших частотах амплитуда динамической нагрузки $r(\Omega)$ ограничена значениями $r(\Omega) = \varepsilon w$ для $P = \text{const}$, $r(\Omega) = (1 + \varepsilon)p_w + \varepsilon w$ для $P = p\Omega^2$.

Основные преимущества амортизатора с характеристикой $R(y, y') = -s|y+w|\text{sign } y' + c_0 y$ состоят в том, что в отличие от амортизатора типа сухого трения ни при каких значениях параметров P, p, w, ε не возникают колебания с неограниченно возрастающей амплитудой; в отличие от линейного амортизатора амплитуда динамической нагрузки остается ограниченной при больших частотах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноушко Ф. Л. Некоторые задачи оптимального управления с малым параметром.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 1, с. 15–26.
2. Akulenko L. D., Bolotnik N. N., Heimann B., Kaplanow A. A., Loose H., Ueckerdt R. Dynamik und optimale Schwingungstilgung in unwuchterregten Schwingssystemen. Rept Akad. Wiss. DDR, Zentralinst. Math. und Mech., 1980, Nr. R-03/80. 109 S.
3. Reid T. J. Free vibration and hysteretic damping.— J. Roy. Aeronaut. Soc., 1956, v. 60, No. 544, p. 283.
4. Caughey T. K., Vijayaraghavan A. Free and forced oscillations of a dynamic system with linear hysteretic damping. (Nonlinear theory).— Internat. J. Nonlinear Mech., 1970, v. 5, No. 3, p. 533–555.
5. Caughey T. K., Vijayaraghavan A. Stability analysis of the periodic solution of a piecewise-linear nonlinear dynamic system.— Internat. J. Nonlinear Mech., 1976, v. 11, No. 2, p. 127–134.
6. Caughey T. K., Vijayaraghavan A. Forced oscillations of a piecewise-linear nonlinear dynamic system with several degrees of freedom.— Internat. J. Nonlinear Mech., 1977, v. 12, No. 6, p. 339–353.
7. Kauderer H. Nichtlineare Mechanik. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer, 1958. 684 S.
8. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 410 с.

Берлин, ГДР

Поступила в редакцию
11.XI.1980