

УДК 531.53

ОПТИМАЛЬНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ МАЯТНИКА ПРИ ФАЗОВОМ ОГРАНИЧЕНИИ НА СКОРОСТЬ ТОЧКИ ПОДВЕСА

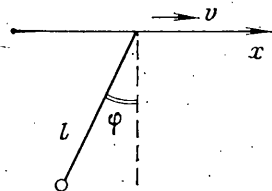
ЗАРЕМБА А. Т.

Рассматривается задача об оптимальном по быстродействию перемещении маятника из состояния покоя на заданное расстояние с гашением колебаний в конце процесса. Предполагается, что ускорение точки подвеса маятника по абсолютной величине не превышает некоторого максимально допустимого, а также что скорость точки подвеса ограничена и это приводит к задаче управления с фазовым ограничением. Рассматриваемые ограничения отражают основные закономерности работы электропривода грузоподъемных машин, который обеспечивает плавный, т. е. примерно с постоянным ускорением, разгон (торможение) системы при ограниченной максимальной скорости перемещения.

Ранее задачи управления механическими системами типа маятника, моделирующими основные операции кранов и подобных им перегружателей, исследовались в работах [1–5]. В работе [1] рассматривалась задача оптимального по быстродействию перемещения маятника, управляемого по скорости. В работах [2–4] решалась задача о наискорейшем разгоне маятника с гашением колебаний относительно точки подвеса при различных ограничениях на ускорение точки подвеса и фазовом ограничении на скорость точки подвеса. Задача о перемещении за минимальное время маятника, управляемого по силе, без ограничения на скорость точки подвеса исследовалась в [5], где было показано, что оптимальное управление является релейной функцией с тремя точками переключения. Аналогичная по постановке задача при ограниченной скорости перемещения маятника рассматривалась в [6], где был предложен ряд режимов управления, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности для задач с фазовым ограничением.

В данной работе получены оптимальные и квазиоптимальные законы управления и найдены области значений параметров, для которых построенные режимы реализуются.

1. Рассмотрим маятник, точка подвеса которого может перемещаться с ограниченным ускорением вдоль горизонтальной направляющей (фиг. 1). Предполагается также, что скорость перемещения точки подвеса маятника ограничена. Уравнения движения системы в случае малых углов колебаний φ с точностью до членов второго порядка имеют вид



Фиг. 1

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = w, \quad l\ddot{\varphi} + g\varphi = w \quad (1.1)$$

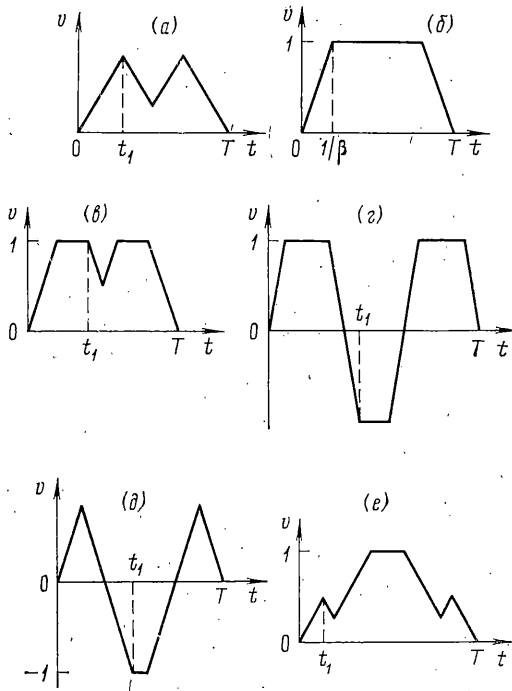
где x — координата точки подвеса, отсчитываемая от некоторого начального положения, φ — угол отклонения маятника от вертикали, g — ускорение силы тяжести, l — длина маятника. На скорость точки подвеса маятника $v(t)$ и ее ускорение $w(t)$ наложены ограничения

$$-v_0 \leq v(t) \leq v_0, \quad -w_0 \leq w(t) \leq w_0 \quad (1.2)$$

Ускорение точки подвеса маятника $w(t)$ рассматривается как управляющее воздействие. Требуется определить закон изменения $w(t)$ и соответствующей ему скорости $v(t)$ из (1.2), позволяющей переместить за минимальное время T систему (1.1) из состояния покоя в начальный момент времени на заданное расстояние $A > 0$ и погасить колебания в конце процесса. Граничные условия и функционал поставленной задачи имеют вид

$$x(0) = v(0) = \varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = v(T) = \varphi(T) = \dot{\varphi}(T) = 0, \quad x(T) = A, \quad (1.3)$$

$$T \rightarrow \min$$



Фиг. 2

Перейдем в соотношениях (1.1) — (1.3) к безразмерным (обозначенным штрихами) переменным при помощи замены: $x = v_0 T_0 x'$, $v = v_0 v'$, $w = v_0 T_0^{-1} w'$, $\varphi = v_0 T_0^{-1} g^{-1} \varphi'$, $t = T_0 t'$, $T_0 = (l/g)^{1/2}$.

При этом соотношения (1.1) — (1.3) примут вид (штрихи опускаем)

$$x' = v, \quad v' = w, \quad \varphi'' + \varphi = w \quad (1.4)$$

$$-1 \leq v(t) \leq 1, \quad -\beta \leq w(t) \leq \beta \quad (1.5)$$

$$x(0) = v(0) = \varphi(0) = \varphi'(0) = v(T) = \varphi(T) = \varphi'(T) = 0, \\ x(T) = \alpha, \quad T \rightarrow \min \quad (1.6)$$

где $\beta = w_0 v_0^{-1} T_0$ — безразмерное ограничение на управление, а $\alpha = v_0^{-1} T_0^{-1} A$ — безразмерный путь, на который требуется переместить маятник. Поставленная задача оптимального быстродействия (1.4) — (1.6) содержит ограничение (1.5) на фазовую координату v . Рассмотрим вначале задачу (1.4) — (1.6) без фазового ограничения (задача 1) и определим те значения параметров α и β , для которых фазовое ограничение не нарушается. Решение задачи 1, для которого не нарушается фазовое ограничение (1.5), будет также и решением задачи с фазовым ограничением. Задача 1 для $\beta = 1$ была решена в [5]. Для случая произвольного $\beta > 0$ решение получается простым изменением масштаба. Оптимальное управление при этом является релейным, с тремя точками переключения

$$w(t) = \begin{cases} \beta & \text{при } t \in [0, t_1) \cup (t_2, t_3) \\ -\beta & \text{при } t \in (t_1, t_2) \cup (t_3, T] \end{cases} \quad (1.7)$$

$$t_1 = T/2 - \tau, \quad t_2 = T/2, \quad t_3 = T/2 + \tau, \quad \tau = \arccos(\cos^2 T/4)$$

Время быстродействия T является корнем уравнения

$$\alpha/\beta = T^2/4 - 2\tau^2 \quad (1.8)$$

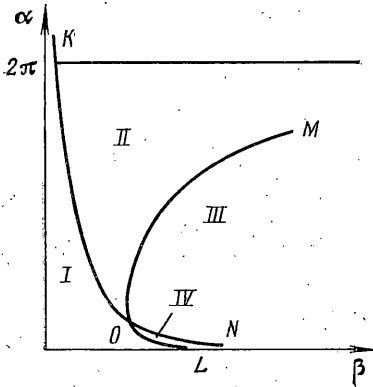
причем уравнение (1.8) имеет единственное решение при заданных α и β . График оптимальной скорости, соответствующей управлению (1.7), приведен на фиг. 2, а. Максимум скорости достигается в точках t_1 и t_3 . Поэтому условие первого выхода оптимальной скорости на верхнее фазовое ограничение $v \leq 1$ имеет вид

$$\beta(T/2 - \tau) = 1 \quad (1.9)$$

Условие выхода оптимальной скорости на нижнее фазовое ограничение $v \geq -1$ записывается как

$$\beta(T/2 - 2\tau) = -1 \quad (1.10)$$

Соотношения (1.9), (1.10) совместно с (1.8) определяют в плоскости α, β разделяющую кривую KOL (фиг. 3). Под кривой KOL (область I) фазовое ограничение не нарушается и решение задачи (1.4) — (1.6) определяется соотношениями (1.7) и (1.8). Отметим, что при прохождении из области I через участок KO разделяющей кривой у оптимальной скорости (фиг. 2, а) нарушается верхнее фазовое ограничение и соответственно при прохождении через участок OL нарушается нижнее фазовое ограничение. Точка O имеет координаты: $\alpha = 0,5236$, $\beta = 1,9099$ и в ней оптимальная скорость (фиг. 2, а) выходит на верхнее и на нижнее фазовые ограничения. Разделяющая кривая KO при $\beta \rightarrow 0$ имеет асимптотику $\alpha \sim 1/\beta$. При $\beta \rightarrow \infty$ кривая OL приближенно представляется $\alpha \sim 1,4454\beta^{-3}$.



Фиг. 3

2. Перейдем теперь к рассмотрению задачи (1.5) — (1.6) с учетом фазового ограничения. Воспользуемся результатами работы [7] и выясним структуру решения задачи, если на некоторых интервалах времени скорость выходит на фазовое ограничение. Согласно [7], преобразуем фазовое ограничение к виду $g(v) = v^2 - 1 \leq 0$. Выпишем функцию Гамильтона системы (1.4)

$$H = p_x v + p_v w + p_\varphi \omega + p_\omega (-\varphi + w) \quad (2.1)$$

Пусть на некотором интервале времени (t_i, t_{i+1}) выполнено $g(v) < 0$. Тогда сопряженные переменные на интервале (t_i, t_{i+1}) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$p_x^* = 0, \quad p_v^* = -p_x, \quad p_\varphi^* = p_\omega, \quad p_\omega^* = -p_\varphi \quad (2.2)$$

Так как система (1.4) автономна, а фазовое ограничение не зависит явно от времени t и фазовых переменных φ, ω, x , то сопряженные переменные p_x, p_φ, p_ω и гамильтониан H непрерывны на всем интервале времени от 0 до T . Интегрируя систему (2.2), находим значения сопряженных переменных p_x, p_φ, p_ω на интервале от 0 до T :

$$p_x = C, \quad p_\varphi = -B \cos(t + \theta), \quad p_\omega = B \sin(t + \theta) \quad (2.3)$$

Если на некотором интервале (t_j^*, t_{j+1}^*) выполнено $g(v) = 0$, то $v = \text{const}$ и $w = v^* = 0$. Выпишем уравнения [7], которым удовлетворяет сопряженная переменная p_v на интервале (t_j^*, t_{j+1}^*) :

$$p_v^* = -p_x + 2\lambda w = -C + 2\lambda w, \quad p_\omega + p_v = 2v\lambda \quad (2.4)$$

Так как $w = 0$, то из (2.4) следует, что $p_v = -Ct + D_j$, где D_j — некоторая постоянная интегрирования, $(d\lambda/dt) \text{ grad } g(v) = (0, 0, 0, p_\omega^* - C)^T$. Для экстремальности требуется [7], чтобы для каждого t отрезка $t_j^* \leq t \leq t_{j+1}^*$ век-

тор $(d\lambda/dt) \text{ grad } g(v)$ был направлен внутрь области $G\{g(v) \leq 0\}$ или обращался в нуль. Следовательно, должно быть выполнено

$$p_0^* - C \leq 0 \text{ при } v=1, \quad p_0^* - C \geq 0 \text{ при } v=-1 \quad (2.5)$$

Запишем условие непрерывности Гамильтониана в точках стыка t_j^* и t_{j+1}^* , т. е. в точках выхода траектории на фазовое ограничение и схода с него

$$H(t_j^*-0) - H(t_j^*+0) = w(p_0 + p_v) |_{t^*=0} = 0 \quad (2.6)$$

Аналогичное условие выполнено и в момент t_{j+1}^* схода с ограничения. Кроме того, для p_0 в точках стыка t_j^* , t_{j+1}^* должно выполняться условие скачка [7]:

$$p_v(t_s^*-0) - p_v(t_s^*+0) = \mu_s \quad (s=j, j+1) \quad (2.7)$$

Согласно [7], оптимальное управление в задаче с фазовым ограничением

$$w = \beta \text{ sign}(p_v + p_0) \text{ при } g(v) < 0, \quad w = 0 \text{ при } g(v) = 0 \quad (2.8)$$

Используя выражение для оптимального управления (2.8), а также необходимые условия оптимальности (2.5)–(2.7), исследуем задачу с фазовым ограничением (1.4)–(1.6). Рассмотрим вначале управления

$$\begin{aligned} w &= \beta \text{ при } t \in [0, 1/\beta], \quad w = 0 \text{ при } t \in [1/\beta, T - 1/\beta], \\ w &= -\beta \text{ при } t \in (T - 1/\beta, T] \end{aligned} \quad (2.9)$$

с одним выходом скорости на верхнее фазовое ограничение (фиг. 2, б) и определим значения параметров α и β для которых данный режим управления является оптимальным. Интегрируя систему (1.4) с управлением (2.9) и удовлетворяя краевым условиям (1.6), находим, что управление (2.9) является оптимальным, если $\alpha = 2\pi k$, $k=1, 2, 3, \dots$ или $1/\beta = 2\pi k$, $k=1, 2, 3, \dots$. При этом должно выполняться неравенство $\alpha \geq (1/\beta)$, а оптимальное время быстрогодействия $T = \alpha + 1/\beta$.

Как было показано ранее, режим управления (1.7) без выхода на фазовое ограничение оптимален в области I (фиг. 3). При прохождении из области I через участок разделяющей кривой KO нарушается верхнее фазовое ограничение. Рассмотрим режим управления

$$\begin{aligned} w &= \beta \quad \text{при } t \in [0, 1/\beta] \cup (t_2, t_3) \\ w &= -\beta \quad \text{при } t \in (t_1, t_2) \cup (T - 1/\beta, T] \\ w &= 0 \quad \text{при } t \in [1/\beta, t_1] \cup [t_3, T - 1/\beta] \end{aligned} \quad (2.10)$$

с двумя выходами скорости на верхнее фазовое ограничение (фиг. 2, в).

Легко показать, что режим управления (2.10) удовлетворяет необходимым условиям оптимальности (2.5)–(2.7) для задачи с фазовым ограничением. Проинтегрируем систему (1.4) с управлением (2.10) и выполним краевые условия (1.6). В результате получаем систему трансцендентных уравнений относительно точек переключения управления t_1, t_2, t_3 и времени быстрогодействия T . Разрешая ее, находим

$$t_1 = T/2 - \tau_1, \quad t_2 = T/2, \quad t_3 = T/2 + \tau_1 \quad (2.11)$$

$$\tau_1 = \arccos \{1 - 2 \sin [T/2 - 1/(2\beta)] \sin 1/(2\beta)\}$$

где время быстрогодействия T является корнем уравнения

$$\alpha = T - 1/\beta - \beta \tau_1^2 \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) имеет единственное решение в области G_0 , ограниченной прямой $\alpha = 2\pi$ и кривой KOL , а также в областях G_k , границей которых являются прямые $\alpha = 2\pi(k+1)$, $1/\beta = 2\pi k$, $k=1, 2, 3, \dots$ и разделяющая кривая KOL . Исследуем случай $\alpha \leq 2\pi$. Условие первого выхода скорости

(фиг. 2, *в*) на нижнее фазовое ограничение $v \leq -1$ имеет вид $\beta t_1 = 2$. Разрешая это условие совместно с (2.11) и (2.12), получаем в плоскости α, β кривую OM (фиг. 3). Таким образом, режим управления (2.10)–(2.12) при $\alpha \leq 2\pi$ существует в области II, ограниченной прямой $\alpha = 2\pi$ и кривыми KO и OM . Докажем, что режим управления (2.10) оптимален в области II.

Рассмотрим отрезок времени $[0, \zeta_0]$, где ζ_0 — момент первого выхода скорости на верхнее фазовое ограничение. Покажем, что на $[0, \zeta_0]$ скорость монотонно возрастает. Предположим, что это не так и обозначим через ξ_1 и ξ_2 точки, где ускорение на отрезке $[0, \zeta_0]$ меняет значение с β на $-\beta$ и с $-\beta$ на β соответственно. Тогда в точках ξ_1, ξ_2 и ζ_0 функция $p_v + p_\omega$ обращается согласно (2.6), (2.8) в нуль, т. е. линия $p_\omega = -Ct + D_1$ пересекает синусоиду $p_\omega = \sin(t + \theta)$ в трех точках. В момент t_1 схода с верхнего фазового ограничения, в момент t_2 — переключения управления и в момент t_3 — выхода на верхнее фазовое ограничение опять выполнено $p_v + p_\omega = 0$, т. е. линия $p_v = -Ct + D_2$, где D_2 — некоторая новая постоянная, пересекает синусоиду p_ω в трех точках t_1, t_2 и t_3 . Отсюда следует, что время быстрогодействия $T > 2\pi + 1/\beta$, что превышает максимально возможное время быстрогодействия, определяемое из уравнения (2.12) при $\alpha \leq 2\pi$ и $1/\beta \leq 2\pi$. Следовательно, на $[0, \zeta_0]$ скорость строго монотонна. Аналогично доказывается монотонность скорости на отрезках $[T - 1/\beta, T]$, $[t_1, t_2]$ и $[t_2, t_3]$.

Рассмотрим режим управления с одним выходом скорости на верхнее фазовое ограничение фиг. 2, *е*. Покажем, что режим управления фиг. 2, *е* не является оптимальным при $\alpha \leq 2\pi$. Для этого проинтегрируем уравнения движения (1.4) с управлением фиг. 2, *е* и удовлетворим краевые условия (1.6). В результате получаем три уравнения относительно неизвестных точек переключения управления t_1, t_2, t_3, t_4 и времени быстрогодействия T' . При помощи подстановок $t_3 = T' - t_2$ и $t_4 = T' - t_1$ система уравнений приводится к двум уравнениям относительно неизвестных t_1, t_2 и T' . Разрешая уравнения численно при условии минимума времени процесса T' , находим неизвестные t_1, t_2 и T' . Численные расчеты показали, что для значений параметров α и β , для которых система имеет решение, время быстрогодействия T' превышает время быстрогодействия T режима управления фиг. 2, *в*.

Предполагая единственность оптимального решения задачи (1.4)–(1.6), можно показать его симметричность, т. е. $v(t) = v(T - t)$. Для этого в соотношениях (1.4)–(1.6) перейдем к новым (обозначенным штрихами) переменным при помощи преобразования $t = T - t', x = \alpha - x', \varphi = -\varphi'$. При данном преобразовании уравнения движения (1.4), ограничение на управление и фазовое ограничение (1.5), а также краевые условия (1.6) не изменяются. Оптимальная скорость при этом удовлетворяет соотношению $v(t) = v'(t') = v'(T - t)$, причем v и v' являются решениями одной и той же задачи (1.4)–(1.6). Следовательно, если задача (1.4)–(1.6) имеет единственное решение, то на оптимальной траектории должно выполняться $v(t) = v(T - t)$. Рассмотрим различного вида несимметричные режимы управления с одним выходом скорости на верхнее фазовое ограничение. Непосредственными вычислениями можно показать, что несимметричные режимы управления в области II не реализуются.

Таким образом, в области II оптимален симметричный режим управления с двумя выходами скорости на верхнее фазовое ограничение, определяемый соотношениями (2.10)–(2.12). При переходе из области II через кривую OM (фиг. 3) у режима управления (фиг. 2, *в*) нарушается нижнее фазовое ограничение $v \geq -1$. Рассмотрим режим управления

$$\begin{aligned} w &= \beta & \text{при } t \in [0, 1/\beta] \cup (t_2, t_2 + 2/\beta) \\ w &= -\beta & \text{при } t \in (t_1 - 2/\beta, t_1) \cup (T - 1/\beta, T) \\ w &= 0 & \text{при } t \in [1/\beta, t_1 - 2/\beta] \cup [t_2 + 2/\beta, T - 1/\beta] \end{aligned} \quad (2.13)$$

с тремя выходами скорости на фазовое ограничение (фиг. 2, *з*).

Интегрируя уравнения движения (1.4) с управлением (2.13) и выполняя краевые условия (1.6), получаем систему трех уравнений относительно неизвестных t_1 , t_2 и T . Разрешая ее, находим точки переключения управления t_1 , t_2

$$\begin{aligned} t_1 &= T/2 - \tau_2 + 1/\beta, & t_2 &= T - t_1 \\ \tau_2 &= \arcsin \left\{ \frac{\sin[T/2 - 1/(2\beta)]}{2 \cos[1/(2\beta)]} \right\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

где время быстрогодействия T является корнем уравнения

$$\alpha = T - 1/\beta - 4\tau_2 \quad (2.15)$$

Условие перехода режима управления фиг. 2, *з* в режим управления фиг. 2, *д* имеет вид $t_1 = 3/\beta$. Разрешая последнее равенство совместно с (2.14), (2.15), получаем кривую ON (фиг. 3). Кривые OM и ON определяют в плоскости α, β область III. Уравнение (2.15), определяющее время быстрогодействия T , имеет в области III единственное решение. Аналогично предыдущему доказываем, что режим управления (2.13)–(2.15) оптимален в области III. Отметим, что при $\beta \rightarrow \infty$ режим управления (2.13)–(2.15) переходит в соответствующий режим управления точкой подвеса по скорости [1], а область III при $\beta \rightarrow \infty$ занимает всю полосу $0 < \alpha < 2\pi$.

При переходе из области I через кривую OL у режима управления фиг. 2, *а* нарушается нижнее фазовое ограничение и в области IV, ограниченной кривыми OL и ON (фиг. 3) оптимален режим управления с одним выходом на нижнее фазовое ограничение (фиг. 2, *д*). Точка переключения управления t_1 и время быстрогодействия T определяются как корни трансцендентной системы

$$\begin{aligned} 2 \cos(T/2 - t_1/2) + 1/(2\beta) + \cos(T/2 - t_1) - \cos(T/2) &= 0 \\ \alpha - t_1 + T + 1/(2\beta) - 1/2\beta t_1^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

а $t_2 = T - t_1$. Для нахождения корней системы (2.16) градиентным методом с дроблением шага минимизировалась сумма квадратов левых частей уравнений (2.16). В качестве начального приближения для времени быстрогодействия T выбиралось значение, рассчитанное для режима управления (1.7), (1.8) при заданных α и β из области IV, а t_1 полагалось равным $t_1 = T/2$. Режимы управления фиг. 2, *а–д* полностью определяют решение задачи (1.4)–(1.6) при $\alpha \leq 2\pi$.

При $\alpha > 2\pi$ в области I (под разделяющей кривой OK) оптимален режим управления без выхода на фазовое ограничение (фиг. 2, *а*). Для значений параметров $\alpha = 2\pi(k+1)$ или $1/\beta = 2\pi k$, $k = 1, 2, 3, \dots$ оптимален режим управления с одним выходом скорости на верхнее фазовое ограничение (фиг. 2, *б*). Режим управления с двумя выходами скорости на верхнее фазовое ограничение (фиг. 2, *в*) при $\alpha > 2\pi$ существует в областях G_k (границей области G_k являются прямые $\alpha = 2\pi(k+1)$, $1/\beta = 2\pi k$, $k = 1, 2, 3, \dots$ и разделяющая кривая OK). Аналогично предыдущему доказываем, что режим управления (фиг. 2, *в*) оптимален в каждой из областей G_k . Для остальных значений параметров α и β оптимальные режимы управления имеют более сложную структуру: увеличивается число точек переключения и число выходов скорости на фазовое ограничение. Построим простейшие квазиоптимальные режимы управления, обеспечивающие решение задачи (1.4)–(1.6) при $\alpha > 2\pi$. Для этого представим параметр α в виде $\alpha = 2\pi s + \alpha'$, $s = 1, 2, 3, \dots$, где α' удовлетворяет неравенству $0 \leq \alpha' < 2\pi$. Предположим, что точка (α', β) принадлежит области II или области III (фиг. 3), где у оптимальной скорости есть участок выхода на верхнее фазовое ограничение и определим соответствующие оптимальные режимы управления (фиг. 2, *в* или фиг. 2, *з*). Пусть $\xi_0 = 1/\beta$ – момент первого выхода скорости на верхнее фазовое ограничение, а ξ_1 – момент

первого схода скорости с верхнего фазового ограничения. Увеличим длительность интервала $[1/\beta, \zeta_1]$ на величину $2\pi s$, $s=1, 2, 3, \dots$. При этом пройденный путь будет равняться $\alpha=2\pi s+\alpha'$, $s=1, 2, 3, \dots$, а остальные граничные условия (1.6) по-прежнему остаются выполненными. Следовательно, для α' и β из области II или III квазиоптимальный режим управления получается из режимов управления (фиг. 2, *в* или фиг. 2, *г*) увеличением одного из интервалов выхода скорости на верхнее фазовое ограничение на величину $\delta=2\pi s$, где $s=[\alpha/(2\pi)]$. Для значений параметров α' и β , принадлежащих области I или IV, квазиоптимальный режим будет представлять собой комбинацию режимов управления фиг. 2, *б* и режимов управления фиг. 2, *а* или фиг. 2, *д*.

Автор благодарит Ф. Л. Черноушко за внимание к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноушко Ф. Л. Оптимальное перемещение маятника.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 5, с. 806—816.
2. Соколов Б. Н. Оптимальный разгон висящего груза при ограниченных скоростях и ускорении точки подвеса.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 6, с. 38—43.
3. Мамалыга В. М. Об оптимальном управлении одной колебательной системой.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 3, с. 8—17.
4. Заремба А. Т., Соколов Б. Н. Об оптимальном сочетании ускорения и торможений точки подвеса при разгоне висящего груза.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 2, с. 18—22.
5. Черноушко Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980, 383 с.
6. Hippe P. Zeitoptimale Steuerung einer Entladeanlage.— Z. angew. Math. und Mech., 1970, В. 50, Sonderh. 1—4, S. 12—13.
7. Гамкрелидзе Р. В. Оптимальные по быстродействию процессы при ограниченных фазовых координатах.— Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 3, с. 475—478.

Москва

Поступила в редакцию
29.IV.1980