

УДК 531.55

## К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ВЕЛИЧИНОЙ ТЯГИ РАКЕТ В АТМОСФЕРЕ

КИФОРЕНКО Б. Н.

Рассматривается задача определения оптимального управления движением ракеты в атмосфере. В отличие от классической постановки задачи учитывается возможность работы двигателя с системой скачков уплотнения в сопле, что позволило построить регулировочную характеристику двигателя, справедливую во всем диапазоне изменения расхода рабочего тела. Показано, что оптимальное управление тягой — граничное, а участки движения с переменной тягой, оптимальность которых следует из классической постановки, реализуются как участки скользящего режима работы двигателя. Обсуждается дальнейшее уточнение математической модели ракеты, при котором оптимальным оказывается практически реализуемый режим с конечным числом переключений.

1. Величина тяги ракетного двигателя  $P$  при движении в атмосфере отличается от значения  $P_v$  тяги в вакууме

$$P = P_v - p_h \sigma \quad (1.1)$$

где  $p_h$  — давление в среде, в которой работает двигатель,  $\sigma$  — площадь выходного сечения сопла двигателя.

В работе [1] предложено величину противодействия  $-p_h \sigma$  объединять с аэродинамическим сопротивлением ракеты  $F$ . При этом выражение суммы сил тяги и сопротивления преобразуется так:

$$P e + F = P_v e + \Phi \quad (1.2)$$

где  $e$  — единичный вектор направления тяги. Удобство использования первой части выражения (1.2) при записи уравнений движения ракеты для анализа задач выбора управлений тягой очевидно. Первый член здесь содержит произведение основных управляющих функций  $P_v$  и  $e$ , на величину второго

$$\Phi = F - p_h \sigma e \quad (1.3)$$

управление  $e$  влияет незначительно, так как при скоростях полета, характерных для ракет, величина  $F$  существенно превосходит  $p_h \sigma$  ( $F = |F|$ ). Это позволяет в первом приближении считать величину  $\Phi$  не зависящей от управления и заменить упрощенной  $P_v = qV$  расходную характеристику двигателя

$$P = qV - p_h \sigma \quad (1.4)$$

где  $q$  — массовый расход рабочего тела,  $V$  — коэффициент, имеющий размерность скорости и не зависящий, по одномерной теории сопла Лавала, от  $q$ .

Именно такое представление о разделении действующих на ракету поверхностных сил на тягу и сопротивление лежит в основе дальнейших исследований оптимальных движений в атмосфере (см., например, библиографию [2, гл. IX]). Исследование этой упрощенной модели позволило получить основные результаты в механике оптимальных движений в атмо-

сфере и способствовало пониманию принципов управления тягой материальной точки переменной массы при полете в среде, оказывающей сопротивление движущемуся объекту.

2. Двигатели аппаратов с малым числом ступеней [3] должны работать и при высоком атмосферном давлении у поверхности Земли, и при почти полном разрежении на больших высотах. Естественно, что оптимальная степень расширения сопла двигателя будет при этом достаточно большой и влияние члена  $-p_h\sigma$  в формуле (1.4) перестанет быть пренебрежимо малым.

В работах [4, 5] анализ оптимального управления тягой проведен с использованием расходной характеристики (1.4). Однако авторы работы [4] не обратили внимания на то, что при нулевом расходе рабочего тела тяга  $P$ , вычисленная по формуле (1.4), в нуль не обращается. Это привело к неверной записи уравнений движения на пассивных ( $q=0$ ) участках. В работе [5] записаны различные системы уравнений движения для активных ( $q \neq 0$ ) и пассивных участков, однако этот факт не учитывается при проведении анализа оптимального управления. Таким образом, полученные в [4, 5] результаты справедливы лишь для частного случая движения с непрерывным активным участком, т. е. с двигателем однократного включения.

Для более строгой формулировки задачи об управлении тягой в атмосфере может быть введена новая релейная управляющая функция  $\delta$ , принимающая значение единицы на активном и равная нулю на пассивном участках движения [6]:

$$P\epsilon + F = (qV - p_h\sigma)\delta\epsilon + F, \quad \dot{m} = -q\delta \quad (2.1)$$

где  $m$  — масса ракеты, точка справа означает дифференцирование по времени.

При записи уравнений движения ракеты с использованием представления (2.1) управление производится включением ( $\delta=1$ ) или выключением ( $\delta=0$ ) двигателя, дросселированием расхода  $p_h\sigma/V < q \leq q_0$  и поворотом вектора тяги. Анализ, проведенный в [6], показал, что оптимальным является граничное управление расходом рабочего тела  $q=q_0$  на всех активных ( $\delta=1$ ) участках полета.

Этот результат противоречит основному выводу, полученному при использовании классического представления (1.2), о том, что в состав оптимальных траекторий тела переменной массы в среде, оказывающей сопротивление движущемуся телу, могут входить участки переменной тяги, движение вдоль которых происходит с некоторой оптимальной скоростью, меньшей максимально возможной [1, 2].

В той же работе [6] показано, что движение с указанной оптимальной скоростью осуществляется на участках скользящего режима управления  $\delta$ . Возможность возникновения скользящего режима связана с тем, что множество допустимых значений управления  $\delta$  не выпукло. Покажем преимущество скользящего режима над особым управлением расходом  $q \in (p_h\sigma/V, q_0)$  при  $\delta=1$ . Пусть при выполнении рассматриваемого динамического маневра в состав оптимальной траектории входит участок движения с меньшим значением реактивного ускорения  $a$ , чем максимально возможное  $a_0$ :

$$a = (qV - p_h\sigma)\delta/m < a_0 \quad (2.2)$$

Рассмотрим вначале фиктивную двигательную систему, у которой множество допустимых значений  $\delta$  выпукло:  $\delta \in [0, 1]$ . Снижение ускорения до  $a < a_0$  возможно теперь уменьшением как  $q$ , так и величины  $\delta$ , причем управления  $q$  и  $\delta$  не независимы из-за наличия связи (2.2). Используя формулу (2.2), представим выражение расхода рабочего тела, необходимого для создания реактивного ускорения  $a$ , в виде

$$\dot{m} = -\frac{am}{V} \left( 1 + \frac{p_h\sigma}{qV - p_h\sigma} \right) \quad (2.3)$$

Из (2.3) следует, что абсолютная величина расхода рабочего тела, при прочих равных условиях, имеет минимум при  $q=q_0$ , т. е. оптимально движение с некоторым промежуточным значением  $\delta \in (0, 1)$ , которое можно вычислить используя формулу (2.2) при  $q=q_0$ . Этому движению в случае исходной двигательной системы ( $\delta=0\sqrt{1}$ ) как раз и соответствует скользящий режим.

Решение задачи о наборе максимальной высоты, полученное в [6] при  $\delta \in [0, 1]$ , дает линию нулевой близости рассматриваемого скользящего режима. Можно провести сопоставление этого решения при  $p_h\sigma \rightarrow 0$  с классическим результатом, полученным с использованием упрощенной характеристики  $P_0=qV$ . Хотя при рассматриваемом предельном переходе характеристика (1.4) стремится к упрощенной, представлению (2.1) и (1.2) остаются различными по составу управляющих функций. Поэтому участок скользящего режима  $\delta$  не переходит в предельный участок особого управления  $q$ . Однако поверхность скользящего режима при формулировке задачи с использованием соотношения (2.1) и поверхность особого управления (с использованием (1.2)) в предельном случае совпадают. Совпадают так же выражения для реактивного ускорения на этих участках.

Построенная с использованием представления (2.1) математическая модель ракеты, более точная по сравнению с классической, приводит к необходимости замены дросселирования расхода рабочего вещества скользящим режимом работы двигательной системы. Отличие между этими режимами существенно: если особый режим связан, как правило, с более или менее плавным, за исключением конечного числа точек разрыва, изменением управления, скользящий режим — это бесконечное число переключений управления на конечном отрезке времени. Получение скользящего режима при анализе любой оптимизационной задачи должно насторожить исследователя, так как его оптимальность всегда основана на постулируемой при формулировке задачи безынерционности управления. И лишь в том случае, когда управления моделируемого объекта действительно малоинерционны (как во многих примерах из [7–9]), информация об оптимальности скользящих режимов имеет не только теоретический интерес.

В рассматриваемой проблеме величина тяги может считаться безынерционным управлением лишь при конечном числе переключений на оптимальной траектории с конечным временем полета. Это подтверждается, в частности, диаграммами  $\dot{P}(t)$  для реальных ракетных двигателей, приведенными в монографиях по ракетодинамике (см., например, [10]). Поэтому необходимы дополнительные исследования. Прежде всего, математическая модель ракеты, полученная с использованием более точного, чем (1.2), представления (2.1), должна быть заменена более адекватной моделью, так как именно в достаточной степени искусственное введение в соотношения (2.1) управления  $\delta$  с невыпуклым множеством допустимых значений связано с возможностью несуществования экстремали в классе допустимых кривых и оптимальностью скользящего режима.

3. Применение одномерной теории сопла Лавала дает для идеального (без учета потерь) двигателя следующие формулы для тяги и расхода рабочего вещества:

$$P = p\sigma_* \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{1/(\kappa-1)} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) - p_h \sigma \quad (3.1)$$

$$q = p\sigma_* \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{(\kappa+1)/[2(\kappa-1)]} \sqrt{\frac{\kappa}{RT}} \quad (3.2)$$

Здесь  $p$  и  $T$  — давление и температура рабочего тела в камере сгорания двигателя,  $\kappa$  и  $R$  — показатель адиабаты и газовая постоянная рабочего тела,  $\lambda$  — скоростной коэффициент рабочего тела в выходном сечении сопла,  $\sigma_*$  — площадь критического сечения сопла.

Соотношение (3.1) справедливо на режиме работы двигателя выше расчетного, когда давление газов  $p_\sigma$  в выходном сечении сопла превосходит  $p_h$ , и на режиме ниже расчетного ( $p_\sigma < p_h$ ), пока течение в закритической части сопла остается сверхзвуковым [2]. При дальнейшем уменьшении  $p$  и, следовательно,  $p_\sigma$  внутри сопла размещается система скачков уплотнения и зависимость  $P(p)$  становится нелинейной. Расчет величины тяги производится при этом с использованием полуэмпирических формул [11, 12], так как соотношения, полученные по одномерной теории, не соответствуют наблюдаемым в эксперименте зависимостям. Расход газа на этом режиме работы сопла вычисляется по формуле (3.2):

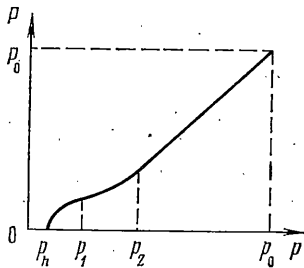
При значениях  $p$ , меньших некоторого  $p_1$ , движение газов в сопле двигателя полностью дозвуковое. Для этого случая по одномерной теории потока идеального совершенного газа формулы тяги и расхода могут быть представлены следующим образом:

$$P = \frac{2\kappa}{\kappa-1} p_h \sigma \left[ \left( \frac{p}{p_h} \right)^{\kappa-1} - 1 \right] \quad (3.3)$$

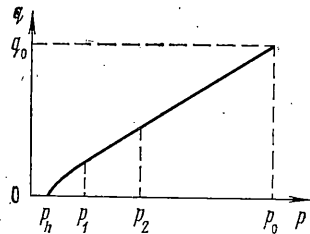
$$q = p_h \sigma \left\{ \frac{2\kappa}{(\kappa-1)RT} \left[ \left( \frac{p}{p_h} \right)^{2(\kappa-1)/\kappa} - \left( \frac{p}{p_h} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} \right] \right\}^{1/2} \quad (3.4)$$

Функциональная зависимость  $P(q)$ , заданная параметрически (параметр  $p$ ) формулами (3.1)–(3.4) и полуэмпирическими соотношениями из [11, 12], является основой математической модели ракеты, исследуемой в п. 3. Качественное представление о характере этой зависимости дают

кривые на фиг. 1, 2. Учет особенностей газодинамики ракетного двигателя позволил получить регулировочную характеристику, учитывающую влияние противодействия на величину тяги во всем диапазоне изменения  $p$ , включая значение  $p=p_h$ , при котором тяга и расход обращаются в нуль (см. (3.3), (3.4)). В качестве управляющей функции в такой постановке удобно выбрать величину давления в камере сгорания  $p \in [p_h, p_0]$ ; температура  $T$  принимается постоянной, как для идеально регулируемых двигателей ограниченной скорости истечения [2].



Фиг. 1



Фиг. 2

Движение ракеты исследуется с позиций механики материальной точки переменной массы. Уравнения движения ракеты под действием тяги  $P(p)$ , массовых сил с главным вектором  $\mathbf{R}m$  и поверхностных сил с главным вектором  $\mathbf{F}$  записываются в виде

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = (P(p)\mathbf{e} + \mathbf{F})/m + \mathbf{R}, \quad \dot{m} = -q(p) \quad (3.5)$$

где  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$  — радиус-вектор и вектор скорости ракеты в некоторой инерциальной системе координат. Управляющие функции  $p$  и  $\mathbf{e}$  ограничены:  $p_h \leq p \leq p_0$ ,  $|\mathbf{e}| = 1$ .

Рассматривается вариационная задача о выполнении некоторого динамического маневра с минимальным значением выбранного критерия качества. Граничные условия маневра и функционал задачи считаются заданными таким образом, что для анализа управления может быть использован принцип максимума [13].

Из условия максимума гамильтониана  $H$  системы (3.5):

$$H = \psi_r \mathbf{v} + \psi_v \left[ \frac{P(p)\mathbf{e} + \mathbf{F}}{m} + \mathbf{R} \right] - \psi_m q(p) \quad (3.6)$$

находим оптимальное управление  $\mathbf{e}$  ( $\psi_r$ ,  $\psi_v$ ,  $\psi_m$  — обобщенные импульсы):

$$\mathbf{e} = \psi_v / \psi_v, \quad \psi_v = |\psi_v| \quad (3.7)$$

Введем обозначение

$$H_1 = \psi_v P(p)/m - \psi_m q(p) \quad (3.8)$$

Поскольку оптимальное управление  $\mathbf{e}$  вычисляется по формуле (3.7) независимо от  $p$ , справедливо следующее равенство:

$$\arg \max_{e,p} H = \left\{ \frac{\psi_v}{\psi_v}, \arg \max_p H_1 \right\} \quad (3.9)$$

Зависимость  $H_1(p)$  на интервале  $p \in (p_2, p_0)$  линейна (см. (3.8) с учетом (3.1), (3.2)). При работе двигателя с системой скачков уплотнения внутри сопла ( $p \in (p_1, p_2)$ ) функция  $H_1(p)$  выпукла

$$\frac{\partial^2 H_1(p)}{\partial p^2} = \frac{\psi_v}{m} \frac{\partial^2 P(p)}{\partial p^2} - \psi_m \frac{\partial^2 q(p)}{\partial p^2} > 0 \quad (3.10)$$

так как на рассматриваемом интервале функция  $q(p)$  линейна (см. (3.2)), а выпуклость функции  $P(p)$  удается показать как для полуэмпирических формул [11, 12], так и для соотношений, полученных по одномерной теории.

На интервале  $(p_h, p_1)$  функция  $H_1(p)$  не может иметь максимума. Первая производная функции  $H_1(p)$  по  $p$  на этом интервале непрерывна. Если стационарная точка  $p=p_s$  функции принадлежит интервалу  $(p_h, p_1)$ , левая часть неравенства (3.10) с учетом формул (3.3), (3.4) и условия стационарности точки  $p_s$  преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 H_1(p_s)}{\partial p^2} = \frac{\psi_0 \sigma (\kappa - 1)}{m p_h \kappa} \left(\frac{p_s}{p_h}\right)^{-(\kappa+1)/\kappa} \left[ \left(\frac{p_s}{p_h}\right)^{(\kappa-1)/\kappa} - 1 \right]^{-1} \times \\ \times \left[ 2 \left(\frac{p_s}{p_h}\right)^{(\kappa-1)/\kappa} - 1 \right]^{-1} \quad (3.11)$$

При  $p_s > p_h$  производная (3.11) положительна, т. е. функция  $H_1(p)$  в точке  $p_s$  имеет минимум.

Следовательно, функция  $H_1(p)$  может принимать максимальные значения лишь в граничных точках области допустимых значений управления  $p$  и оптимальные значения  $p$  на регулярных дугах оптимальной траектории определяются по формуле (см. кривые 1, 3, фиг. 3):

$$p=p_0 \text{ при } H_1(p_0) > 0, \quad p=p_h \text{ при } H_1(p_0) < 0 \quad (3.12)$$

Выполнение равенства  $H_1(p_0) = H_1(p_h)$  (кривая 2 на фиг. 3) вдоль некоторой дуги траектории есть необходимое условие оптимальности скользящего режима. Участки промежуточной тяги ( $p \in (p_h, p_0)$ ) не оптимальны.

Таким образом, проведенное выше исследование подтвердило основной вывод работы [6]: участки полета со скоростями, меньшими максимальной, реализуются не как дуги дросселируемой тяги, оптимальность которых показана с использованием представления (1.2), а как участки оптимального скользящего режима. Существенно, что этот вывод получен на основании анализа уравнений математической модели ракеты, которая намного точнее описывает работу ракетного двигателя, чем модель, предложенная в [6].

Для изучения линии нулевой близости скользящего режима проводится стандартное преобразование [14] исходной задачи. Уравнения ослабленной задачи с учетом обращения в нуль тяги  $P$  и расхода  $q$  при  $p=p_h$  могут быть записаны следующим образом:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = (P(p_0)\mathbf{e}_\delta + \mathbf{F})/m + \mathbf{R}, \quad \dot{m} = -q(p_0)\delta \quad (3.13)$$

В системе (3.13)  $\delta \in [0, 1]$  — управляющая функция. Необходимые условия оптимальности скользящего режима в исходной задаче могут быть получены теперь как необходимые условия оптимальности особого управления  $\delta$ :

$$\frac{\psi_v}{m} P(p_0) - \psi_m q(p_0) = 0 \quad (3.14)$$

$$\psi_0 \frac{\partial P(p_0)'}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v} - \frac{P(p_0)}{\psi_0} \left( \psi_v \psi_v' + \frac{1}{m} \psi_v' \frac{\partial \mathbf{F}'}{\partial \mathbf{v}} \psi_v \right) - \frac{q(p_0)}{m} \psi_v \mathbf{F} = 0$$

$$2P(p_0) \psi_v' \frac{\partial P(p_0)}{\partial \mathbf{r}} - 2 \frac{P(p_0) q(p_0)}{m \psi_v} \psi_v' \frac{\partial \mathbf{F}'}{\partial \mathbf{v}} \psi_v -$$

$$- \frac{P(p_0)}{m} \frac{\psi_v'}{\psi_0^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( \psi_v' \frac{\partial \mathbf{F}'}{\partial \mathbf{v}} \psi_v \right) - \frac{q^2(p_0)}{m} \psi_v' \mathbf{F} \geq 0$$

При записи соотношений (3.14) вектора представлены матрицами-столбцами, штрих — знак транспонирования.

При тождественном обращении в нуль левой части неравенства (3.14) (условие Келли) порядок вырождения управления возрастает и особое управление  $\delta$  может быть оптимально лишь при специальном подборе граничных условий маневра.

4. Полученные в п. 3 результаты приводят к необходимости построения новой математической модели ракеты, учитывающей инерционность управления величиной тяги. Уравнения одного из возможных вариантов такой модели могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, & \dot{\mathbf{v}} &= (P(y)\mathbf{e} + \mathbf{F})/m + \mathbf{R} \\ m\dot{y} &= -q(y), & \dot{u} &= k(u - y), & y(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $y \in [0, 1]$  — безразмерная фазовая переменная, связанная с давлением  $p = (p_0 - p_h)y + p_h$ ,  $u \in [-1, 1]$  — управляющая функция. Постоянная  $k$  характеризует быстродействие в звене, описываемом последним уравнением системы (4.1): с увеличением  $k$  время переходных процессов уменьшается.

Оптимальное управление  $u$  определяется соотношением:

$$u = 1 \text{ при } \psi_y > 0, \quad u = -1 \text{ при } \psi_y < 0, \quad u = 0 \text{ при } y = 0 \quad (4.2)$$

Необходимые условия оптимальности особого управления

$$\begin{aligned} \psi_y = 0, & \quad \psi_m \frac{\partial q(y)}{\partial y} - \frac{\psi_v}{m} \frac{\partial P(y)}{\partial y} = 0 \\ \psi_m \frac{\partial^2 q(y)}{\partial y^2} - \frac{\psi_v}{m} \frac{\partial^2 P(y)}{\partial y^2} & \geq 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

совпадают с условиями наличия максимума функции  $H_1$  (п. 3) в промежутке  $(p_h, p_0)$  и, следовательно, не выполняются. Тождественное обращение в нуль левой части неравенства (5.3) на линейном участке расходной характеристики  $p \in (p_2, p_0)$  связано с повышением порядка вырождения особого управления  $u(t)$ , которое может быть оптимальным в этом случае лишь при специальном подборе граничных условий динамического маневра.

Поскольку условия теоремы существования оптимального управления [15] для системы (4.1) в вариационной задаче п. 3 выполняются, оптимальная траектория существует и является экстремалью Понтрягина. Следовательно, движение со скоростью, меньшей максимальной, может реализовываться лишь вдоль дуги экстремали с конечным числом переключений, которое будет, естественно, возрастать с увеличением постоянной  $k$ . В пределе при  $k \rightarrow \infty$  упомянутая дуга переходит в участок скользящего режима; рассмотренный в п. 3.

Таким образом, выполненное выше исследование оптимального управления величиной тяги ракеты при движении в атмосфере показало, что учет противодавления приводит к замене участков особого управления участками оптимального скользящего режима. Поскольку управление величиной тяги реального двигателя инерционно, вместо участка скользящего режима в состав оптимальной траектории входит дуга с конечным числом переключений. Определенное количественное представление о сопровождающих эту замену потерях можно получить из анализа приведенных в работе [6] результатов, относящихся к задаче о наборе максимальной высоты при вертикальном движении ракеты.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Охоцимский Д. Е. К теории движения ракет. — ПММ, 1946, т. 10, вып. 2, с. 251–272.
2. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975. 702 с.

3. *Bono P., Gatland K. W.* Frontiers of space. New York: Macmillan, 1975. 247 p.— Рус. перев.: М.: Машиностроение, 1975. 214 с.
4. *Jain S. C., Tawakley V. B.* Optimum flight paths of rocket powered vehicles for general thrust law.— *Z. Flugwiss.*, 1972, В. 20, Н. 11, S. 421–430.
5. *Кузьменко В. В.* Особое управление вертикальным движением ракеты в атмосфере.— Тр. IX чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К. Э. Циолковского. М.: Ин-т истории естествознания и техники, 1975, с. 138–144.
6. *Кифоренко Б. Н., Злацкий В. Т., Кожуховский Н. Н.* Особенности управления движением ракеты в плотной атмосфере.— Тр. XI чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К. Э. Циолковского. М.: Ин-т истории естествознания и техники, 1978, с. 132–147.
7. *Кротов В. Ф., Гурман В. И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973. 446 с.
8. *Гурман В. И.* Вырожденные задачи оптимального управления. М.: Наука, 1977. 304 с.
9. *Уткин В. И.* Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974. 272 с.
10. *Лебедев А. А., Герасюга Н. Ф.* Баллистика ракет. М.: Машиностроение, 1970. 244 с.
11. *Квасников А. В.* Теория жидкостных ракетных двигателей. Л.: Судпромгиз, 1959. 542 с.
12. Основы теории и расчета жидкостных ракетных двигателей./ Под ред. Кудрявцева В. М. М.: Высш. школа, 1975. 656 с.
13. *Понярягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
14. *Гамкрелидзе Р. В.* О скользящих оптимальных режимах.— Докл. АН СССР, 1962, т. 143, № 6, с. 1243–1245.
15. *Lee E. B., Markus L.* Foundations of optimal control theory. New York: Wiley, 1976. 567 p.— Рус. перев.: М.: Наука, 1972. 576 с.

Киев

Поступила в редакцию  
17.VI.1980