

ЛИТЕРАТУРА

1. Скурлатов Э. Д. Поведение цилиндрических оболочек в сверхзвуковом потоке газа.— Расчеты на прочность: Сб. статей. М.: Машиностроение, 1974, вып. 15, с. 356—365.
2. Воробьева Н. Л., Преображенский И. Н. Обзор исследований по устойчивости пластин и оболочек, ослабленных отверстиями.— Расчет пространственных конструкций: Сб. статей. М.: Стройиздат, 1973, вып. 15, с. 89—112.
3. Немировский Б. Я., Преображенский И. Н., Федоров В. А. Линейные и нелинейные задачи устойчивости конструкций типа круглых и кольцевых пластин.— В кн.: Конструкции зданий и сооружений научных комплексов. М.: Наука, 1977, с. 44—49.
4. Григоров Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.

Москва

Поступила в редакцию
12.III.1980

УДК 539.3

ПЛОТНОСТЬ ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ
ТОНКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ,
СОСТАВЛЕННОЙ ИЗ АНИЗОТРОПНЫХ СЛОЕВ

ГУЛГАЗАРЯН Г. Р., ЛИДСКИЙ В. В.

Найдена плотность частот свободных колебаний тонкой оболочки произвольного очертания, составленной из анизотропных слоев.

1. Свободные колебания слоистой оболочки, собранной из $m+n$ анизотропных слоев, описываются в классической теории [1] системой дифференциальных уравнений:

$$\sum_{j=1}^3 (h^2 n_{ij} + h k_{ij} + l_{ij}) \ddot{u}_j = \lambda \sum_{j=1}^3 (\delta_{ij} + h q_{ij} + h^2 p_{ij}) u_j \quad (i=1,2,3) \quad (1.1)$$

при граничных условиях, зависящих от характера закрепления на краях.

Здесь λ — спектральный параметр, который на постоянный множитель отличается от квадрата частоты ω свободных колебаний, h — относительная толщина оболочки (малый параметр), $u_j(\alpha, \beta)$ — компоненты вектора перемещения, δ_{ij} — символ Кронекера, $n_{ij}, k_{ij}, l_{ij}, q_{ij}, p_{ij}$ — дифференциальные операторы, явный вид которых не приводится. Их можно получить выразив усилия и моменты через перемещения [1, с. 344]. Инерционные члены при этом берутся как и в [1].

Система (1.1) является системой Лагранжа — Эйлера для функционала $V - \omega^2 T$, где

$$V = \frac{1}{2} \iint_G (h C_{ij}^\circ \varepsilon_i \varepsilon_j + 2h^2 K_{ij}^\circ \varepsilon_i \kappa_j + h^3 D_{ij}^\circ \kappa_i \kappa_j) dS \quad (1.2)$$

— потенциальная энергия деформации [1, с. 166], $\omega^2 T$ — кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \iint_G (h C_\rho^\circ \delta_{ij} u_i u_j - 2h^2 A^{-1} K_\rho^\circ u_{3,\alpha} u_{1-} - 2h^2 K_\rho^\circ B^{-1} u_{3,\beta} u_2 + h^3 D_\rho^\circ (A^{-2} u_{3,\alpha}^2 + B^{-2} u_{3,\beta}^2)) dS \quad (1.3)$$

В (1.2) и (1.3) $dS = AB d\alpha d\beta$ и по сравнению с [1] введены обозначения $C_{ij}^\circ = h^{-1} C_{ij}, K_{ij}^\circ = h^{-2} K_{ij}, D_{ij}^\circ = h^{-3} D_{ij}, C_\rho^\circ = h^{-1} C_\rho, K_\rho^\circ = h^{-2} K_\rho, D_\rho^\circ = h^{-3} D_\rho$. При этом предполагается, что все отношения $\delta_s / h, s=1, 2, \dots, m+n$ [1, с. 164, 345], характеризующие положение слоев, при $h \rightarrow 0$ сохраняются. Матрица

$$A_0 = \begin{vmatrix} C_0 & K_0 \\ K_0 & D_0 \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

размеров 6×6 , в которой $C_0 = \|C_{ij}^\circ\|, K_0 = \|K_{ij}^\circ\|, D_0 = \|D_{ij}^\circ\|$ матрицы размеров 3×3 , предполагается положительно-определенной. Это эквивалентно положительно определенной квадратичной формы, стоящей под знаком интеграла в (1.2).

В соответствии с [1] в формуле (1.2) индексы i, j пробегает значения $1, 2, 6$ и в связи с этим приняты обозначения $\varepsilon_6 = \omega, \kappa_6 = \tau$. Выражения для деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega, \kappa_1, \kappa_2, \tau$ через перемещения $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$ берутся такими же, как в [1] (с. 26, 27). Отметим, что стоящая под знаком интеграла в (1.3) квадратичная форма пяти переменных $u_1, u_2, u_3, u_{3,\alpha}, u_{3,\beta}$ положительно-определенная.

Для формулировки основного результата обозначим через $n_h(\omega)$ число частот свободных колебаний рассматриваемой задачи, которые не превосходят данного $\omega > 0$. Введем в рассмотрение прямоугольные матрицы

$$g_1^* = -i \begin{vmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

$$g_2^* = \|\cos^2 \theta, \sin^2 \theta, \sin 2\theta\|, \quad g_3^* = \|\sin^2 \theta, \cos^2 \theta, -1/2 \sin 2\theta\|$$

Звездочка здесь, как и всюду, означает сопряженную прямоугольную матрицу. Пусть

$$M = g_1^* C_0 g_1, \quad g_4 = g_1^* K_0 g_2 \quad (1.6)$$

матрицы размеров 2×2 и 2×1 . Справедливо следующее утверждение, составляющее основной результат статьи.

Теорема. При фиксированном $\lambda > 0$ и $h \rightarrow 0$

$$n_h(\omega) = \frac{1}{8\pi^2 h} \left\{ \iint_G \left(\int_C \operatorname{Re} \sqrt{\frac{\lambda - \Omega(\alpha, \beta, \theta)}{m(\theta)}} d\theta \right) dS + O(h^v) \right\} \quad (1.7)$$

$$\lambda = C_p \circ \omega^2, \quad m(\theta) = g_2^* D_0 g_2 - g_4^* M^{-1} g_4 \quad (1.8)$$

$$\Omega(\alpha, \beta, \theta) = (k_1 \sin^2 \theta + k_2 \cos^2 \theta)^2 \det C_0 / \det M \quad (1.9)$$

где $k_1(\alpha, \beta)$ и $k_2(\alpha, \beta)$ — главные кривизны оболочки, γ — некоторая положительная постоянная.

2. Сделаем несколько замечаний в связи с формулой (1.7). Можно показать, что для фигурирующей в (1.9) дроби справедливо равенство

$$\det M / \det C_0 = g_3^* C_0^{-1} g_3 \quad (2.1)$$

иногда полезное при расчетах.

Отметим, что при повороте системы координат на (α, β) -плоскости на угол φ функции (1.8) и (1.9) переходят соответственно в $m(\theta + \varphi)$ и $\Omega(\alpha', \beta', \theta + \varphi)$. Впрочем, инвариантность интеграла в (1.7) следует из смысла формулы (1.7). Первоначально, как и в [1], оболочка отнесена к линиям кривизны.

Рассуждая, как в [2, с. 136] и [3, с. 42], получаем для плотности частот формулу

$$v_h(\omega) = (8\pi^2 h)^{-1} I(\omega), \quad (2.2)$$

$$I(\omega) = \iint_G \left(\int_C \operatorname{Re} C_p \circ \omega [(\lambda - \Omega(\alpha, \beta, \theta)) m(\theta)]^{-1/2} d\theta \right) dS$$

В однослойной ортотропной оболочке, когда все три главных направления упругости совпадают с направлениями координатных линий, формулы (1.8) и (1.9) упрощаются и принимают вид

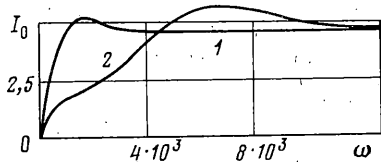
$$\Omega = (k_1 \sin^2 \theta + k_2 \cos^2 \theta)^2 [E_2^{-1} \cos^4 \theta + (G_{12}^{-1} - 2\nu_2 E_2^{-1}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + E_1^{-1} \sin^4 \theta]^{-1} \\ m(\theta) = 12^{-1} \{ E_1 (1 - \nu_1 \nu_2)^{-1} \cos^4 \theta + 2 [E_1 \nu_2 (1 - \nu_1 \nu_2)^{-1} + 2G_{12}] \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \\ + E_2 (1 - \nu_1 \nu_2)^{-1} \sin^4 \theta \}$$

По поводу введенных здесь обозначений см. [1, с. 35, 38].

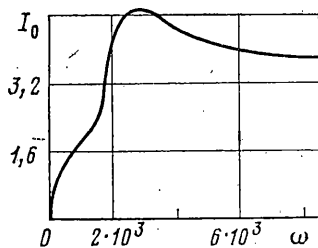
В частности, в изотропном случае ($E_1 = E_2 = E, \nu_1 = \nu_2 = \nu, G_{12} = G = 1/2 E (1 + \nu)^{-1}$) получаем $m(\theta) = 12^{-1} (1 - \nu^2)^{-1} E, \Omega = (k_1 \sin^2 \theta + k_2 \cos^2 \theta)^2 E$ и формула (1.7) превращается в известный результат [3, с. 18], где $\lambda = \omega^2 \rho (1 - \nu^2) E^{-1}$, и [4, с. 88].

Частные случаи формулы (2.2) для ортотропной пластинки и круговой цилиндрической оболочки были получены ранее и приведены в [2] (с. 134, 142). Следует иметь в виду, что в отличие от [1] в [2] через B_{jk} и D_{jk} ($j, k = 1, 2$) обозначены коэффициенты при производных четвертого порядка в уравнениях теории пологих оболочек [1, с. 379]. Укажем также на работы [9] и [10], в которых рассматривается вопрос о плотности частот пологих ортотропных прямоугольных в плане оболочек и предполагается, что перенормированные кривизны в этой задаче можно пренебречь.

Ниже для иллюстрации на фиг. 1, 2 приводятся кривые плотности частот в предположении, что срединная поверхность оболочки представляет собой усеченный конус, полученный вращением вокруг оси x отрезка прямой $y = x, \sqrt{2}/2 \leq x \leq 2$. Края оболочки защемлены. На обеих фигурах по горизонтальной прямой отложены:



Фиг. 1



Фиг. 2

значения ω , а по вертикали $-I_0(\omega) = 10^4 / (8\pi\sqrt{6}) I(\omega)$, где $I(\omega)$ определено по формуле (2.2).

На фиг. 1 изображены кривые плотности в случае, когда оболочка является однослойной и изготовлена из боропластика (ортотропный материал): $\rho = 2 \cdot 10^3$ кг/м³, $E_1 = 27 \cdot 9,8 \cdot 10^9$ Н/м², $E_2 = 1,35 \cdot 9,8 \cdot 10^9$, $G = 0,98 \cdot 9,8 \cdot 10^9$; $\nu_1 = 0,2$, $\nu_2 = 0,01$, $h = 0,01$.

Для кривой 1 модули E_1 и E_2 соответствуют направлениям вдоль меридиана и параллели соответственно, для кривой 2 — наоборот.

На фиг. 2 показана кривая плотности оболочки, составленной из пяти симметрично расположенных относительно срединной поверхности ортотропных слоев. Срединный слой из стеклопластика толщиной $h/3$ ($h = 10^{-2}$) и параметрами $\rho = 2,4 \cdot 10^3$ кг/м³, $E_1 = 6,5 \cdot 9,8 \cdot 10^9$ Н/м², $E_2 = 1,5 \cdot 9,8 \cdot 10^9$, $G = 0,5 \cdot 9,8 \cdot 10^9$, $\nu_1 = 0,26$, $\nu_2 = 0,06$, где E_1 соответствует направлению вдоль меридиана. Два наружных слоя и два симметрично расположенных внутренних слоя толщиной по $h/6$ каждый изготовлены из углепластика: $\rho = 1,5 \cdot 10^3$ кг/м³, $E_1 = 1,5 \cdot 9,8 \cdot 10^9$ Н/м², $E_2 = 1,5 \cdot 9,8 \cdot 10^9$, $G = 0,5 \cdot 9,8 \cdot 10^9$; $\nu_1 = 0,26$, $\nu_2 = 0,026$.

В слоях, прилегающих к стеклопластику, E_1 соответствует направлению, которое составляет угол $\pi/4$ с меридианом, а во внешних слоях — угол $(-\pi/4)$.

Сравнение с кривыми плотности в изотропном случае [3, с. 43], [4, с. 95] показывает, что общий характер зависимости $v_h(\omega)$ сохраняется. Следует отметить, что функция $\Omega(\alpha, \beta, \theta)$ (см. (9)), определяющая зону наибольшей концентрации частот, существенно сложнее, чем в изотропном случае, и зависит от жесткостей C_{ij}^0 .

Зависимость $\Omega(\alpha, \beta, \theta)$ от геометрии оболочки — та же [4, с. 88]. Отсюда, в частности, следует, что у анизотропной оболочки неположительной гауссовой кривизны всегда существуют сверхнизкие частоты (см. [4, с. 261]).

3. Формула (7) получена методом Гильберта — Куранта. Подробности см. в [3, с. 19—39]. Для строгого обоснования этого метода необходимо использовать работу [5]. Существенное место в получении формулы (1.7) занимает вычисление количества частот для задачи в квадратной ячейке Q_p : $\alpha_i \leq \alpha \leq \alpha_i + \Delta$, $\beta_i \leq \beta \leq \beta_i + \Delta$, с фиксированными постоянными коэффициентами и периодическими на сторонах квадрата Q_p граничными условиями.

Эту задачу можно решать не обращаясь к системе (1.4), а путем определения при фиксированном ω^2 числа отрицательных собственных значений квадратичного функционала $V_p - \omega^2 T_p$, где V_p и T_p — те же, что и в (1.2) и (1.3), с заменой области интегрирования G на Q_p . После упрощений, использующих малость Δ , вопрос сводится к отысканию числа целых точек внутри кривой $r = r(\theta)$, которая определяется уравнением

$$\det(a_{ij}^0(r, \theta) - \lambda \delta_{ij}^0) = 0 \quad (3.1)$$

Здесь λ — то же, что и в теореме п. 1 $\|a_{ij}\|$ и $\|\delta_{ij}^0\|$ — матрицы размеров 3×3 . Все $\delta_{ij}^0 = 0$, кроме $\delta_{33}^0 = 1$. Матрица $\|a_{ij}^0\|$ определяется по формуле

$$\|a_{ij}^0\| = \|F_1 * F_2 * A_0\| \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} ir \cos \theta & 0 & -k_1 \\ 0 & ir \sin \theta & -k_2 \\ ir \sin \theta & ir \cos \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r^2 \cos^2 \theta \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & r^2 \sin 2\theta \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

где A_0 определено формулой (1.4).

Отметим, что левая часть (3.1), будучи полиномом восьмой степени относительно r , содержит лишь члены с r^8 и r^4 . Это приводит к сравнительно простому выражению для главного члена асимптотики в (1.7). К сожалению, специфика задачи не позволила непосредственно привлечь полученные недавно в [6, 7] теоремы, хотя главный член асимптотики можно было бы найти, сведя ценой известных усилий задачу к рассматриваемому в [6] виду.

Примененный в данной статье метод дает грубую оценку остаточного члена в (1.7); значения γ те же, что и в изотропном случае [3, с. 37]. Отметим, что, как показывает пример сферы, $\gamma = 1/3$ является неуплучшаемым показателем в (1.7) с равномерной по λ оценкой [3, с. 137]. С другой стороны, в различных зонах изменения λ оценка

остатка может быть усилена. Например, в зоне

$$\lambda - \Omega(\alpha, \beta, \theta) \geq a^2 > 0 \quad (3.4)$$

в случае, когда оболочка не имеет краев, теорема Хермандера [8, гл. III] позволяет взять $\gamma = 1/2$. Этот факт указывает на то, что в зоне (3.4) оценка остатка в (1.7) может быть существенно усилена и при наличии края. Этот и родственные вопросы сейчас интенсивно изучаются. Из уже опубликованных работ (см. [11]) можно заключить, что в зоне (3.4) формула (1.7) справедлива при наличии заземленного края с $\gamma = 1/4 - \varepsilon$ с любым $\varepsilon > 0$. В подробном исследовании¹ доказано, что при нарушении условия (3.4) формула (1.7) сохраняет силу с $\gamma = 1/5 - \varepsilon$ при любых условиях закрепления, если только сходится интеграл в (2.2).

Авторы признательны С. А. Амбарцумяну, А. Л. Гольденвейзеру за полезные обсуждения и советы, а также В. В. Васильеву, С. А. Лурье и А. Л. Радовинскому за консультации по отдельным вопросам. Авторы благодарят Л. В. Маркову, построившую кривые плотности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
2. Бологин В. В. Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 335 с.
3. Аслабян А. Г., Лидский В. Б. Распределение собственных частот тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1974. 156 с.
4. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.
5. Gobert J. Une inégalité fondamentale de la théorie de l'élasticité.— Bull. Soc. Roy. Sci., Liège, 1962, v. 31, No. 3, 4, p. 182—191.
6. Алексеев А. Б., Бирман М. Ш. Асимптотика спектра эллиптических граничных задач с разрешимыми связями.— Докл. АН СССР, 1976, т. 230, № 3, с. 505—507.
7. Алексеев А. Б. О спектральной асимптотике дифференциальных операторов при полиномиальном вхождении малого параметра.— В кн.: Проблемы математической физики. Вып. 8. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976, с. 3—15.
8. Шубин М. А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978. 279 с.
9. Хроматов В. Е. Плотность собственных частот тонких пологих ортотропных оболочек.— Прикл. механика, 1977, т. 8, вып. 7, с. 37—41.
10. Ермоленко Е. М. Влияние параметров ортотропии на спектр в задачах колебаний оболочек.— ПМТФ, 1980, № 1, с. 163—170.
11. Grubb G. Estimation du reste dans l'étude des valeurs propres des problèmes aux limites pseudo-differentials auto-adjoints.— Comptes Rend., 1978, t. 287, No. 15, p. 1017—1020.

Ереван, Москва

Поступила в редакцию
29.IX.1980

¹ Левендорский С. З. Асимптотика спектра III. Тонкие оболочки. Ростов-на-Дону, 1981. Деп. в ВИНТИ, 24.12.81; № 5830—81.