

Согласно уравнениям (5), напряжения в точке A вычисляются по формулам

$$\sigma_{II} = \frac{\sigma_e}{d\xi_e^\circ} d\xi = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \left(\frac{2,08r\omega_0}{\sqrt{3}lk} \right)^{1/n}, \quad \tau_{II} = \frac{\sigma_e}{d\xi_e^\circ} d\eta = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{13}} \left(\frac{2,08r\omega_0}{\sqrt{3}lk} \right)^{1/n} \quad (7)$$

Сопоставление напряжений, определяемых формулами (6) и (7), позволяет установить, что $\sigma_{II} \approx 1,11\sigma_I$, $\tau_{II} \approx 0,56\tau_I$. Таким образом, уравнения (1) приводят к одинаковым результатам при любом пути нагружения. В условиях неустановившейся ползучести при нагружении, отличающемся от простого, уравнения (1) и (5) дают различные результаты, что необходимо иметь в виду при выполнении расчетов на прочность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. Друкер Д. О посылате устойчивости материала в механике сплошной среды. — Механика. Сб. перев. иностр. статей, 1964, № 3, с. 115—128.
3. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 398 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.IX.1980

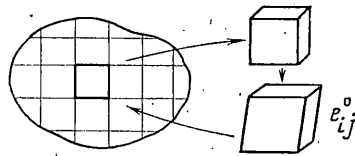
УДК 539.3:551.243

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПУТЕМ ПОСТРОЕНИЯ ДИСЛОКАЦИЙ СОМИЛЬЯНЫ

ДВЕРЕС М. Н., ФОМИН А. В.

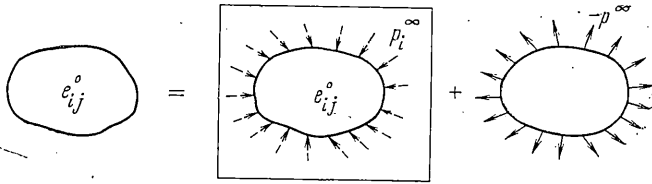
Известно, что упругие напряжения и деформации при отсутствии внешней силовой нагрузки могут быть вызваны действием температурного поля, остаточных пластических деформаций, внутренними неоднородностями или фазовыми превращениями в материале. Источник таких напряжений, называемых собственными напряжениями, может быть сведен к несовместным начальным деформациям.

В публикуемой работе показано, что имеет место аналогия между задачами о несовместных начальных деформациях и дислокациях Сомильяны. Моделирование собственных напряжений выполняется путем построения дислокаций Сомильяны — разрезки, деформирования и склейки [1]. Деформирование проводится по частному решению соответствующей задачи теории упругости. Показана применимость метода в случаях, когда вместо начальных деформаций известен тензор их несовместности или тензор плотности дислокаций. Этот метод в отличие от метода устранения деформаций [2] может быть реализован на моделях из несжимаемого материала.



Фиг. 1

1. Причиной появления в деформируемом теле собственных напряжений являются начальные или остаточные деформации e_{ij}^0 , не удовлетворяющие уравнениям совместности. Эти напряжения связаны законом Гука с возникающими в теле упругими деформациями $e_{ij} - e_{ij}^0$, где e_{ij} — полные деформации, определяемые общим решением задачи. Так как граница тела свободна от внешних нагрузок, то для моделирования собственных напряжений можно применить построение дислокаций Сомильяны — разрезку, добавление или удаление части материала, деформирование и склейку (фиг. 1), после чего нагрузки, приложенные при деформировании, устраняются. Выбор размеров и конфигурации элементов модели по деформациям e_{ij}^0 приводит к несовместности элементов, устраняемой последующим их деформированием. Для этого искомую упругую деформацию $e_{ij} - e_{ij}^0$ целесообразно разложить на две части [1]: деформацию $e_{ij}^\infty - e_{ij}^0$, соответствующую собственным напряжениям в заданном теле, погруженном в бесконечное пространство, и совместную деформацию $e_{ij} - e_{ij}^\infty$, возникающую в теле от нагрузки $-p_i^\infty$ по его границе, противоположной реакции бесконечной среды (фиг. 2). Так как совместные деформации не вызывают в теле напряжений, то при моделировании достаточно создавать в элементах модели первую часть искомых деформаций, воспроизводя реакцию бесконечной среды приложением по границе тела нагрузки p_i^∞ , определяемой при помощи закона Гука по моделируемой деформации на поверхности тела.



Фиг. 2

При заданной начальной деформации e_{ij}^0 моделируемая деформация $e_{ij}^\infty - e_{ij}^0$ выражается через результирующие перемещения u_i^∞ в бесконечном пространстве, получающиеся по теореме взаимности Майзеля, в виде

$$e_{ij}^\infty - e_{ij}^0 = u_{\langle i,j \rangle}^\infty - e_{ij}^0, \quad u_i^\infty = \int \sigma_{kl}^{(i)} e_{kl}^0 dV \quad (1)$$

где индекс $\langle i, j \rangle$ означает симметризацию по i и j ; $\sigma_{kl}^{(i)}$ — тензор Грина для напряжений в бесконечном пространстве. В частном случае несжимаемого материала $\sigma_{kl}^{(i)} = 3/4\pi^{-1} x_i x_k x_l R^{-5}$, где x_i, x_k, x_l ($i, k, l = 1, 2, 3$) — декартовы координаты, R — расстояние между рассматриваемой точкой и точкой интегрирования. Перемещения u_i^∞ являются частным решением рассматриваемой задачи для ограниченного тела. Определяемая по ним моделируемая деформация (1) отличается от деформации $-e_{ij}^0$, создаваемой в элементах модели по методу устранения деформаций, на совместную деформацию e_{ij}^∞ .

Если вместо начальной деформации задан тензор ее несовместности η_{ij} , моделируемая деформация равна [3]:

$$e_{ij}^\infty - e_{ij}^0 = \frac{1}{4\pi} \left[\int (\eta_{ij} - \delta_{ij}\eta) R^{-1} dV - \Psi_{,ij} \right]$$

где η — след тензора η_{ij} , Ψ — бигармонический потенциал с плотностью, равной для несжимаемого материала η .

Первое слагаемое в правой части дает упругую деформацию для конечного тела, если η_{ij} или его нормальная компонента равны нулю на границе тела [1], второе слагаемое является совместной деформацией. Аналогично может быть получена моделируемая деформация, если задан тензор плотности дислокаций [3].

2. Частным случаем начальной деформации является температурная деформация αT (α — коэффициент теплового расширения). Моделируемая деформация (1) принимает вид

$$e_{ij}^\infty - e_{ij}^0 = u_{i,j}^\infty - \alpha T \delta_{ij}, \quad u_i^\infty = \Phi_{,i} \quad (2)$$

где Φ — термоупругий потенциал перемещений. При разделении тела на достаточно малые элементы (кубики) температуру в них можно считать постоянной. Тогда температурное поле можно представить суммой разрывных полей, каждое из которых отлично от нуля только в k -м элементе, где температура равна T_k . Соответственно моделируемая деформация представляется суммой $e_{ij}^\infty - e_{ij}^0 = (e_{ij}^* - \alpha \delta_{ij})_k T_k$, где e_{ij}^* — деформации в бесконечном пространстве, содержащем включение в виде нагретого на единичную температуру k -го кубика. Поле таких деформаций при переходе от элемента к элементу испытывает жесткое смещение.

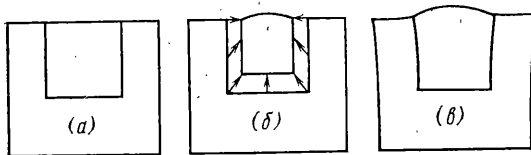
Для кубика размером $2a$ (начало координат в его центре) получаем:

$$e_{11}^* = A \Sigma \operatorname{arctg} \frac{X_2 X_3}{X_1 R}, \quad e_{12}^* = A \Sigma \ln(R - X_3)$$

$$A = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha}{4\pi}, \quad R = (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)^{1/2}, \quad X_i = x_i \pm a$$

где знаком Σ обозначена сумма восьми слагаемых, отличающихся комбинацией знаков в X_i ($i=1, 2, 3$), причем знак слагаемого равен произведению этих знаков. Другие компоненты деформаций получаются круговой перестановкой индексов.

3. Моделирование собственных напряжений с применением разрезки, деформирования и склейки удобно проводить на «замораживаемом» оптически чувствительном материале с помощью поляризационно-оптических измерений. Мысленные операции, используемые при построении дислокаций Соммильяны, реально осуществимы на моделях с применением процедуры «замораживания» и «размораживания» деформаций.



Фиг. 3

Создаваемые при моделировании несовместные деформации в элементах могут быть заморожены. Размораживание склеенной из таких элементов модели приводит к перераспределению деформаций и появлению в модели искривленных упругих деформаций. При этом полностью освобождаются деформации, вызванные поверхностной нагрузкой p_i^∞ , и реализуется деформированное состояние для ограниченного тела со свободной границей. При последующем замораживании модели эти деформации фиксируются и могут быть найдены поляризационно-оптическим методом.

Особенностью существующего «замораживаемого» оптически чувствительного материала является его несжимаемость при замораживании. На таком материале не может быть создана механическим путем шаровая часть деформации e_{ij} , что существенно ограничивает возможность определения собственных напряжений методом устранения деформаций. Вместе с тем механическое моделирование температурных напряжений обычно проводится на основе этого метода (метод размораживания свободных температурных деформаций [5]), и поэтому ограничено решением плоских задач и одномерными температурными полями в объемных телах.

Для преодоления этих ограничений в [6] предложено для трехмерных температурных полей создавать на несжимаемом материале моделируемые деформации по частному решению задачи термоупругости, так как необходимое при этом деформирование не требует изменения объема элементов. В [7, 8] приведены примеры моделируемых деформаций, использующих частные решения, полученные погружением тела в бесконечную среду (см. формулу (2)). Для девиаторной части начальной деформации при этом рекомендован метод устранения деформаций. В отличие от этого формула (1) дает моделируемую деформацию для произвольной начальной деформации.

4. Важным частным случаем являются задачи о включениях, соединениях разнородных материалов и другие, сводящиеся к кусочно-однородным задачам с разрывным полем начальной деформации. Для них возможно моделирование собственных напряжений путем непосредственного построения дислокации Соммильяны по поверхности разрыва. Разность перемещений берегов разреза равна разности свободных перемещений по границе кусочно-однородных участков тела от их собственного поля начальной деформации.

Например, для включения с другим коэффициентом теплового расширения (фиг. 3, а) достаточно создать вдоль его поверхности линейные перемещения (равномерные деформации) (фиг. 3, б). Добавив недостающий материал, склеивают элементы и устраняют все нагрузки (фиг. 3, в). Такое моделирование собственных напряжений на «замораживаемом» материале рассмотрено в [7] для разрывных двух- и трехмерных температурных полей, когда также неприменим метод устранения деформаций. Создание в таких случаях моделируемой деформации (2) оказывается более сложным и нецелесообразным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 247 с.
2. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
- 3-4. Вит Р., де. Континуальная теория дисклиаций. М.: Мир, 1977. 208 с.
5. Пригоровский Н. И., Варданян Г. С. Определение термоупругих напряжений поляризационно-оптическим методом. — Заводск. лаборатория, 1961, № 9, с. 4129.
6. Дверес М. Н., Евстратов В. Н., Пригоровский Н. И. Моделирование термоупругих объемных напряженных состояний на «замораживаемых» моделях. — В кн.: Экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений в конструкциях. М.: Наука, 1977, с. 61—73.
7. Дверес М. Н., Евстратов В. Н., Пригоровский Н. И., Фокин А. В. Трехмерные задачи механического моделирования термоупругих напряженных состояний. — В кн.: Матер. VIII Всес. конф. по методу фотоупругости. Т. 2. Таллин: Ин-т кибернетики АН ЭССР, 1979, с. 192—197.
8. Бугаенко С. Е. Моделирование напряжений от заданных несовместных деформаций поляризационно-оптическим методом. — Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 4, с. 100—102.

Москва

Поступила в редакцию
5.II.1980