

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

РОМАНОВ К. И.

Предложены уравнения неустановившейся ползучести, связывающие между собой приращения скоростей деформаций и напряжения. Эти уравнения позволяют отразить историю нагружения. В случае простого нагружения они легко интегрируются. Рассмотрен пример использования предложенных уравнений.

Известные уравнения теории ползучести [1]

$$\xi_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\xi_e}{\sigma_e} s_{ij}, \quad \sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}, \quad \xi_e = \sqrt{\frac{2}{3} \xi_{ij} \xi_{ij}} \quad (1)$$

где ξ_{ij} — скорости деформаций, s_{ij} — компоненты девиатора напряжений, σ_e — эквивалентное напряжение, ξ_e — эквивалентная скорость деформаций, связывают между собой мгновенные значения скоростей деформаций и напряжения. Естественно, что для нелинейно-вязкого тела (когда величины σ_e и ξ_e связаны однозначно) эти уравнения не отражают истории нагружения: одинаковым скоростям деформаций, достигнутым при различных путях деформирования, соответствуют одинаковые напряжения. Следовательно, при сложном нагружении уравнения (1) могут привести к неверным результатам.

Для получения уравнений, отражающих историю нагружения, предположим, что существует потенциал ползучести следующего вида:

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij} d\xi_{ij}, \quad (2)$$

где σ_{ij} — напряжения, $d\xi_{ij}$ — бесконечно малые приращения скоростей деформаций ползучести.

Если принять, что в процессе нагружения потенциал ползучести не убывает, то получим

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\xi_{ij} \geq 0 \quad (3)$$

где σ_{ij}^* и σ_{ij} — напряжения, соответствующие точкам на двух эквипотенциальных поверхностях, вложенных одна в другую.

Неравенство (3) соответствует предположению Друкера [2] о том, что для реономного тела мощность, развиваемая дополнительными силами на дополнительных скоростях перемещений, должна быть неотрицательна.

Условие существования потенциала ползучести (2) приводит к определяющим уравнениям вида

$$d\xi_{ij} = d\lambda \partial f / \partial \sigma_{ij} \quad (4)$$

где $d\lambda$ — бесконечно малый скалярный множитель. Множитель $d\lambda$ может быть получен для выбранной формулировки потенциала ползучести

$$d\lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{-1/2} d\xi_e^\circ, \quad d\xi_e^\circ = \sqrt{\frac{2}{3} d\xi_{ij} d\xi_{ij}}$$

где $d\xi_e^\circ$ — эквивалентное приращение скоростей деформаций.

При использовании потенциала ползучести, включающего в себя только второй инвариант девиатора напряжений $f = {}^{3/2} s_{ij} s_{ij}$, множитель $d\lambda = d\xi_e^\circ / (2\sigma_e)$ и, следовательно, уравнения (4) принимают вид

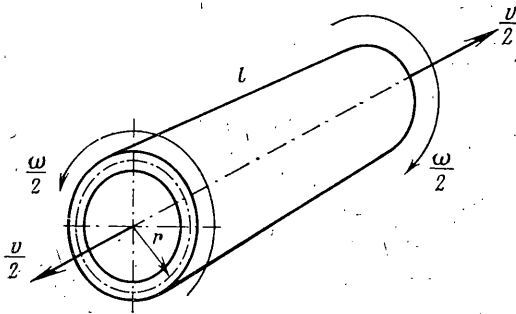
$$d\xi_{ij} = {}^{3/2} d\xi_e^\circ s_{ij} / \sigma_e \quad (5)$$

Уравнения (5) отличаются от уравнений (1) в такой же мере, в какой уравнения теории пластического течения отличаются от деформационной теории пластичности. Уравнения (5), связывающие между собой в каждый момент времени приращения скоростей деформаций и напряжения, позволяют отразить историю нагружения при неустановившейся ползучести, что составляет преимущество этих уравнений по сравнению с уравнениями (1).

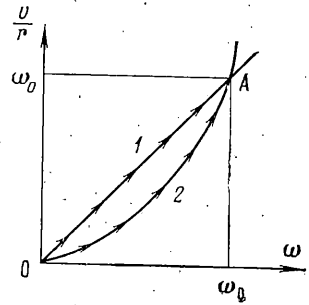
Покажем, что при простом нагружении уравнения (5) переходят в уравнения (1). Если компоненты девиатора напряжений возрастают пропорционально некоторому параметру β ($s_{ij} = \beta s_{ij}'$, где штрихом отмечены характерные значения, например в конце нагружения, компонент девиатора напряжений), то по уравнениям (5) имеем $d\xi_{ij} = {}^{3/2} s_{ij}' d\xi_e^\circ / \sigma_e'$. Проинтегрируем это уравнение (считая, что в начальный момент времени $\xi_{ij} = 0$), тогда получим, что в конце нагружения $\xi_{ij} = {}^{3/2} (s_{ij}' / \sigma_e') \int d\xi_e^\circ$.

Подставим полученные выражения в соотношение для эквивалентной скорости деформаций. В результате будем иметь $\xi_e = \int d\xi_e^\circ$, откуда следует равенство $d\xi_e = d\xi_e^\circ$.

Таким образом, при простом нагружении уравнения (5) могут быть легко проинтегрированы и сведены к уравнениям (1).



Фиг. 1



Фиг. 2

Далее на примере показано различие результатов для произвольного нагружения при использовании уравнений (1) и (5).

Рассмотрим (фиг. 1) тонкостенную трубку (r — радиус средней поверхности, l — длина), нагруженную при малых деформациях. Заданы следующие кинематические граничные условия — скорость растяжения в осевом направлении $v(t)$ и скорость скручивания $\omega(t)$, где t — время.

Определим значения напряжений в момент времени, соответствующей точке A (фиг. 2) при двух путях нагружения из начальной точки O : при линейной зависимости (прямая 1) $v = \omega r$; при квадратичной зависимости (кривая 2) $v = r\omega_0(\omega/\omega_0)^2$, где ω_0 — некоторое характерное значение скорости скручивания (в точке A скорость $\omega = \omega_0$).

При нагружении трубки отличны от нуля только нормальные σ и касательные τ напряжения в плоскости, перпендикулярной к оси трубки. Скорость осевой деформации ξ и скорость угловой деформации η связаны со скоростями растяжения и скручивания следующими зависимостями: $\xi = v/l$, $\eta = r\omega/l$.

Определим напряжения по уравнениям (1), принимая следующий закон ползучести [3]: $\sigma_e = (\xi_e/k)^{1/n}$, где k и n — постоянные, определяемые при данной температуре экспериментально.

Эквивалентная скорость деформаций в точке A определяется формулой

$$\xi_e = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3\xi^2 + \eta^2} = \frac{r\omega_0}{\sqrt{3}l}$$

По уравнениям (1) при любом пути нагружения имеем в точке A следующие значения напряжений:

$$\sigma_I = \frac{\sigma_e}{\xi_e} \xi = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{2r\omega_0}{\sqrt{3}lk} \right)^{1/n}, \quad \tau_I = \frac{\sigma_e}{3\xi_e} \eta = \frac{\sqrt{3}}{6} \left(\frac{2r\omega_0}{\sqrt{3}lk} \right)^{1/n} \quad (6)$$

Получим решение задачи по уравнениям (5), приняв закон ползучести в виде $\sigma_e = (\Gamma/k)^{1/n}$, где Γ — накопленная скорость ползучести, определяемая аналогично

параметру Одквиста $\Gamma = \int_0^t d\xi_e^\circ$. Очевидно, что при первом пути реализуется простое

нагружение. В этом случае $\Gamma = \xi_e$ и уравнения (5) приводят к формулам (6). Однако при втором пути нагружения уравнения (5) дают отличные от (6) результаты. Эквивалентное приращение скоростей деформаций определяется следующим образом:

$$d\xi_e^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3(d\xi)^2 + (d\eta)^2} = \frac{r d\omega}{\sqrt{3}l} \sqrt{12 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + 1}$$

В точке A имеем $d\xi_e^\circ = \sqrt{13}rd\omega/(\sqrt{3}l)$. Накопленная скорость ползучести в точке A составляет

$$\Gamma = \frac{r}{\sqrt{3}l} \int_0^{\omega_0} \sqrt{12 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + 1} d\omega = \frac{2,08r\omega_0}{\sqrt{3}l}$$

Как видно, величины Γ и ξ_e при выбранных путях нагружения мало отличаются друг от друга.

Согласно уравнениям (5), напряжения в точке A вычисляются по формулам

$$\sigma_{II} = \frac{\sigma_e}{d\xi_e^\circ} d\xi = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \left(\frac{2,08r\omega_0}{\sqrt{3}lk} \right)^{1/n}, \quad \tau_{II} = \frac{\sigma_e}{d\xi_e^\circ} d\eta = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{13}} \left(\frac{2,08r\omega_0}{\sqrt{3}lk} \right)^{1/n} \quad (7)$$

Сопоставление напряжений, определяемых формулами (6) и (7), позволяет установить, что $\sigma_{II} \approx 1,11\sigma_I$, $\tau_{II} \approx 0,56\tau_I$. Таким образом, уравнения (1) приводят к одинаковым результатам при любом пути нагружения. В условиях неустановившейся ползучести при нагружении, отличающемся от простого, уравнения (1) и (5) дают различные результаты, что необходимо иметь в виду при выполнении расчетов на прочность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. Друкер Д. О посылате устойчивости материала в механике сплошной среды. — Механика. Сб. перев. иностр. статей, 1964, № 3, с. 115—128.
3. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 398 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.IX.1980

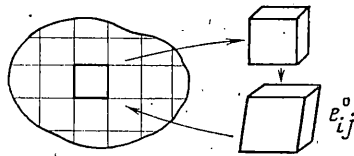
УДК 539.3:551.243

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПУТЕМ ПОСТРОЕНИЯ ДИСЛОКАЦИЙ СОМИЛЬЯНЫ

ДВЕРЕС М. Н., ФОМИН А. В.

Известно, что упругие напряжения и деформации при отсутствии внешней силовой нагрузки могут быть вызваны действием температурного поля, остаточных пластических деформаций, внутренними неоднородностями или фазовыми превращениями в материале. Источник таких напряжений, называемых собственными напряжениями, может быть сведен к несовместным начальным деформациям.

В публикуемой работе показано, что имеет место аналогия между задачами о несовместных начальных деформациях и дислокациях Сомильяны. Моделирование собственных напряжений выполняется путем построения дислокаций Сомильяны — разрезки, деформирования и склейки [1]. Деформирование проводится по частному решению соответствующей задачи теории упругости. Показана применимость метода в случаях, когда вместо начальных деформаций известен тензор их несовместности или тензор плотности дислокаций. Этот метод в отличие от метода устранения деформаций [2] может быть реализован на моделях из несжимаемого материала.



Фиг. 1

1. Причиной появления в деформируемом теле собственных напряжений являются начальные или остаточные деформации e_{ij}^0 , не удовлетворяющие уравнениям совместности. Эти напряжения связаны законом Гука с возникающими в теле упругими деформациями $e_{ij} - e_{ij}^0$, где e_{ij} — полные деформации, определяемые общим решением задачи. Так как граница тела свободна от внешних нагрузок, то для моделирования собственных напряжений можно применить построение дислокаций Сомильяны — разрезку, добавление или удаление части материала, деформирование и склейку (фиг. 1), после чего нагрузки, приложенные при деформировании, устраняются. Выбор размеров и конфигурации элементов модели по деформациям e_{ij}^0 приводит к несовместности элементов, устраняемой последующим их деформированием. Для этого искомую упругую деформацию $e_{ij} - e_{ij}^0$ целесообразно разложить на две части [1]: деформацию $e_{ij}^\infty - e_{ij}^0$, соответствующую собственным напряжениям в заданном теле, погруженном в бесконечное пространство, и совместную деформацию $e_{ij} - e_{ij}^\infty$, возникающую в теле от нагрузки $-p_i^\infty$ по его границе, противоположной реакции бесконечной среды (фиг. 2). Так как совместные деформации не вызывают в теле напряжений, то при моделировании достаточно создавать в элементах модели первую часть искомых деформаций, воспроизводя реакцию бесконечной среды приложением по границе тела нагрузки p_i^∞ , определяемой при помощи закона Гука по моделируемой деформации на поверхности тела.