

ными величинами не превышает 16%, в то время как с результатами расчета прогиба неподвижной балки (кривая 2 на фиг. 2) расхождение достигает 100%.

Подтверждено смещение сечения максимального прогиба с нарушением симметрии функции $u(x)$. По экспериментальным данным $x_0 = (0.50 \div 0.68)l$. Изменение скорости движения балки от 0.1 до 1.5 м/с не оказало влияния на процесс изгиба.

Исследование изгиба по схеме фиг. 5 осуществлялось на новой роликовой правильной машине¹. При $k=3 \div 5$ все ролики установлены на эксцентриках, что позволяет просто регулировать прогиб балки в сечениях, где приложены силы. Расчетные данные, полученные по формулам (3.10), (3.11), отличаются от экспериментальных не более чем на 22%. Расчеты показывают, что при четных k уравнение (3.12) ($r_0 = 0$) имеет только тривиальное решение $m_s = \frac{1}{6}(-1)^{s-1}$, соответствующее упругой деформации.

При нечетных k уравнение (3.12) имеет много решений ($r_0 = 0$): например, $m_1 = -m_2, m_3 = -m_4$ и т. д.

Указанное уравнение было применено на практике при $k=3$ для настройки правильной машины.

Ранее настройка роликов создавала остаточную кривизну $r_0 = (2.5-3.0) \cdot 10^{-4} \text{ мм}^{-1}$, что снижало качество выпускаемого проката. Ниже приводятся результаты расчета параметров упругопластического изгиба, обеспечивающего получение прямолинейных балок.

| n | m_n | $P_{nl}/\sigma_T b h^2$ | r_{nl}/a | u_n/la |
|-----|--------|-------------------------|------------|----------|
| 1 | 0,230 | 0,690 | -4,05 | 1,40 |
| 2 | -0,230 | 0,899 | 4,05 | 0,40 |
| 3 | 0,209 | 0,648 | -2,55 | 0,60 |

На левой опоре величина $P_{nl}/\sigma_T b h^2$ равна 0.230, а на правой 0.209. При данном режиме изгиба балок остаточная кривизна уменьшилась в 8-10 раз и не превышает $r_0 = 3.1 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^{-1}$, что обеспечивает получение проката первого сорта, для которого прогиб не должен превышать 2 мм на 1000 мм длины балки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
2. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
3. Шапиро Г. С. О предельном и упругопластическом состояниях конструкций. - Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1963, № 4, с. 138-144.
4. Беньковский М. А., Бровман М. Я. Применение тензометрии в прокатке. М.: Металлургия, 1965. 145 с.
5. Бровман М. Я., Будников Ю. В., Аггарян В. Г., Чивадзе М. И. Повышение качества правки прямоугольных и квадратных труб. - Сталь, 1980, № 3, с. 222-225.

Краматорск

Поступила в редакцию
12.IX.1979

УДК 539.3

ВОЛНЫ В СЛАБО АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

РОССИХИН Ю. А.

Рассматривается анизотропная среда, модули упругости которой мало отличаются от упругих коэффициентов некоторого изотропного материала. Эта среда носит название слабо анизотропной. В такой среде изучено поведение объемных волн, которые возникают при внезапном приложении нагрузки к границе сферической полости. При исследовании используется метод возмущений, позволяющий в первом приближении получить ряд особенностей распространения волн в кристаллах.

Рассмотрим ударные волны в упругой анизотропной среде. Уравнения для определения скоростей и интенсивностей волновых фронтов в криволинейных координатах запишутся так [1]:

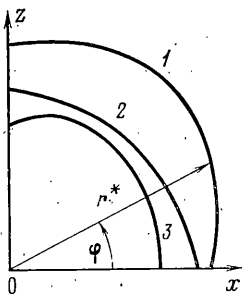
$$(c_{ij}^k \cdot i \nu^j \nu^l - \rho G^2 \delta_i^k) \lambda_k = 0, \quad \lambda_i = -G^{-1} [v_i] \quad (1)$$

$$\rho G^2 (W_{i,t}^i - W_{i,\alpha}^i g^{\alpha\nu} x_{k\nu} x_t^k) + \rho G (G_{i,t} - G_{,\alpha} g^{\alpha\beta} x_{k\beta} x_t^k) W_i^i + c_{ij,l}^k (W_{k,\alpha}^i \nu^j x_\beta^l +$$

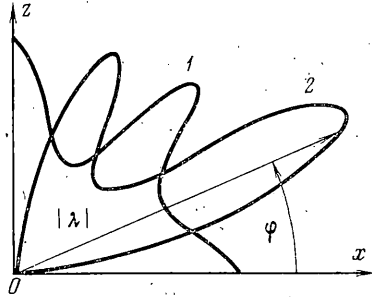
$$+ \Gamma_{mn}^i W_k^m x_\alpha^n \nu^j x_\beta^l - \Gamma_{kn}^m W_m^i x_\alpha^n \nu^j x_\beta^l + \nu_{,\alpha}^l W_k^i x_\beta^j + \Gamma_{mn}^l W_k^i x_\beta^j \nu^m x_\alpha^n) g^{\alpha\beta} G = 0,$$

$$W_j^i = \lambda^i \lambda_j$$

¹ Машина спроектирована и изготовлена Краматорским научно-исследовательским и проектно-технологическим институтом машиностроения. Пущена в эксплуатацию на Руставском металлургическом заводе [5].



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь G — нормальная скорость движения волновой поверхности, $[v_i]$ — разность значений компонентов вектора скорости на различных сторонах волнового фронта, c_{ijkl} — коэффициенты упругости анизотропного тела, ρ — плотность, δ_i^k — символ Кронекера, v^i — компоненты вектора нормали к поверхности волны, $g^{\alpha\beta}$ — компоненты метрического тензора волновой поверхности, $x_{\beta}^i = \partial x^i / \partial y^{\beta}$, $x_t^i = \partial x^i / \partial t$, x^i — криволинейные пространственные координаты, y^{α} — поверхностные координаты, t — время, Γ_{ik}^m — символы Кристоффеля; латинские индексы принимают значения 1, 2, 3, греческие — 1, 2; верхние и нижние индексы означают соответственно контравариантные и ковариантные компоненты вектора или тензора; индексы, стоящие после запятой, означают производную по координате y^{α} или времени t .

Предположим, что

$$c_{ijkl} = c_{ijkl(0)} + \epsilon c_{ijkl(1)} \quad (2)$$

где $c_{ijkl(0)}$ — компоненты изотропного тензора упругости, $c_{ijkl(1)}$ — компоненты некоторого тензора четвертого ранга, ϵ — малая величина, характеризующая отклонение анизотропных коэффициентов жесткости от изотропных.

В декартовой системе координат для триклинного кристалла число независимых отличных от нуля компонентов тензора $c_{ijkl(1)}$ равно 19, так как два коэффициента из 21 уже содержатся в $c_{ijkl(0)}$. Для частных видов симметрии матрицы коэффициентов $c_{ijkl(1)}$ можно получить из соответствующих матриц коэффициентов c_{ijkl} , если в последних положить $c_{1111} = c_{1122} = 0$. Равенство нулю именно этих двух коэффициентов не ограничивает общности исследования, ибо достигается путем подходящего выбора упругих модулей изотропного материала.

Среды, для которых справедливы соотношения (2), будем называть слабо анизотропными. К ним относятся природные кристаллы вольфрама и алюминия [2], а также материалы, полученные искусственно в результате внешних воздействий на кристаллы.

Если рассматривать (2) как систему алгебраических уравнений для определения неизвестных величин $c_{ijkl(1)}$, то можно получить необходимые и достаточные условия слабости анизотропии. Так, для кубического кристалла это условие имеет вид

$$c_{1122} + 2c_{1313} - c_{1111} = 2\epsilon c_{1313(1)} \quad (3)$$

Для каждой последующей из перечисленных ниже кристаллических систем условия слабости анизотропии можно получить добавлением к условиям предыдущей системы таких соотношений:

для гексагональной

$$c_{1133} - c_{1122} = \epsilon c_{1133(1)}, \quad c_{3333} - c_{1111} = \epsilon c_{3333(1)} \quad (4)$$

тетрагональной (классы $4mm$, $42m$, 422 , $4/mmm$)

$$c_{1122} + 2c_{1212} - c_{1111} = 2\epsilon c_{1212(1)} \quad (5)$$

орторомбической

$$c_{2222} - c_{1111} = \epsilon c_{2222(1)}, \quad c_{2233} - c_{1122} = \epsilon c_{2233(1)} \quad (6)$$

$$c_{1122} + 2c_{2323} - c_{1111} = 2\epsilon c_{2323(1)}$$

моноклинной (x_3 — ось симметрии второго порядка)

$$c_{1112} = \epsilon c_{1112(1)}, \quad c_{2212} = \epsilon c_{2212(1)}, \quad c_{3312} = \epsilon c_{3312(1)}, \quad c_{2331} = \epsilon c_{2331(1)} \quad (7)$$

Из (3)–(7) видно, что полученные условия позволяют установить не только степень анизотропии, но и выделить из общей слабо анизотропной матрицы коэффициентов жесткости соответствующую матрицу коэффициентов изотропной среды.

Применим полученные соотношения к волнам, возникающим в результате внезапного приложения давления к границе сферической полости радиуса r_0 , расположенной в безграничном гексагональном кристалле, ось шестого порядка которого

совпадает с осью z . Для этого запишем уравнения (1) в сферических координатах r, φ, λ ; представим входящие туда величины $\lambda_i, G, F(y^\alpha, t) = 0$ (уравнение волновой поверхности) в виде $\lambda_i = \lambda_{i(0)} + \varepsilon \lambda_{i(1)}$, $G = G_{(0)} + \varepsilon G_{(1)}$, $F(y^\alpha, t) = r - r_0 - (G_0 + \varepsilon G_{(1)}) t = 0$ и учтем начальные условия на границе полости $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ($t = 0$).

Ограничиваясь нулевым и первым приближениями, получим

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(3)} &= \frac{r_0}{R} + \varepsilon \left[\frac{q(\varphi)}{2r_0(1+b)} \left(1 - \frac{r_0}{R} \right) \frac{1}{R} + \frac{q(\varphi) - l(\varphi)}{2r_0(1+b)} \frac{1}{R} \ln \frac{R}{r_0} \right] \\ \lambda_2^{(3)} &= \varepsilon \frac{r_0}{2b(1+b)} \left(\frac{1-b}{2} + b \frac{r_0}{R} \right) c_{1111, \varphi}, \quad \lambda_3^{(3)} = \lambda_1^{(1)} = \lambda_3^{(1)} = \lambda_1^{(2)} = \\ &= \lambda_2^{(2)} = \lambda_3^{(2)} = 0, \quad \lambda_2^{(1)} = -\varepsilon r_0 (4b)^{-1} c_{1111, \varphi} \\ q(\varphi) &= \frac{1}{2} r_0^2 (2c_{1111(1)} - \operatorname{tg} \varphi c_{1111(1), \varphi} + c_{1111(1), \varphi \varphi}), \quad l(\varphi) = r_0^2 (-c_{1111(1)} + 2c_{1212(1)} + \\ &+ 2 \cos^{-2} \varphi c_{1313(1)} + c_{1122(1)} + \cos^{-2} \varphi c_{1133(1)} - \operatorname{tg} \varphi c_{1112(1)} + c_{1112(1), \varphi}) \\ G_{(1)} &= \frac{1}{2} G_{(0)} \quad G_{(0)} \quad c_{1111(1)}, \quad G_{(1)} = \frac{1}{2} G_{(0)} \quad c_{1212(1)}, \\ G_{(1)}^{(2)} &= \frac{1}{2} G_{(0)} \quad c_{1313(1)} \cos^{-2} \varphi, \quad c_{1111(1)} = \frac{1}{2} m_1 + m_2 \sin^2 2\varphi + m_2 \sin^4 \varphi, \\ c_{1133(1)} &= \frac{1}{4} m_1 \sin^2 2\varphi \\ c_{1122(1)} &= m_1 + (-\frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{4} m_2 - m_3) \sin^2 2\varphi, \quad c_{1313(1)} = \frac{1}{4} m_3 \sin^2 2\varphi \\ c_{1112(1)} &= (\frac{1}{4} m_1 + \frac{1}{2} m_3) \sin 4\varphi + \frac{1}{2} m_2 \sin^2 \varphi \sin 2\varphi, \quad b = G_{(0)}^{(3)2} G_{(0)}^{(1,2)-2} - 1 \\ c_{1212(1)} &= m_3 + (\frac{1}{4} m_1 + \frac{1}{4} m_2 - m_3) \sin^2 2\varphi, \quad R = r_0 + G_{(0)}^{(3)} t \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь верхний индекс, стоящий в скобках, указывает на порядковый номер волны, а именно цифры 3, 1, 2 относятся соответственно к квазипродольной и двум квазипоперечным волнам [3, 4]; m_1, m_2, m_3 — коэффициенты жесткости $c_{1133(1)}, c_{3333(1)}, c_{2323(1)}$ в декартовой системе координат.

На фиг. 1 показаны формы волновых поверхностей в полярных координатах $r^* = r(G_{(0)} t)^{-1}, \varphi$ при $r_0(G_{(0)} t)^{-1} = 1, G_{(0)}^{(3)} G_{(0)}^{(1,2)-1} = 1,7$. Кривые 1–3 уменьшены

в 10 раз и соответствуют волновым фронтам квазипродольной и квазипоперечных волн.

На фиг. 2 приведены для квазипродольной волны зависимости компонент вектора интенсивности $|\lambda_1|$ (кривая 1), $|\lambda_2|$ (кривая 2 увеличена в 60 раз и изображает физическую компоненту величины λ_2) от угла φ , вычисленные по формуле (8). При этом предполагалось, что $b=3, r_0 R^{-1} = 0,5, \varepsilon = 0,4, m_1 = 2, m_2 = m_3 = 1$.

Ввиду симметрии показана лишь область первого квадранта. Можно видеть, что радиальные перемещения материальных частиц на ударной волне значительно превосходят перемещения в направлении оси φ , причем максимумы (минимумы) величины $|\lambda_1|$ соответствуют минимумам (максимумам) величины $|\lambda_2|$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гонсовский В. Л., Россихин Ю. А. О волнах ускорений в анизотропных термоупругих средах с учетом конечности скорости распространения тепла. — ПММ, 1974, т. 38, вып. 6, с. 1098–1104.
2. Най Дж. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. М.: Мир, 1967. 385 с.
3. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
4. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965. 386 с.

Воронеж

Поступила в редакцию
7.IV.1980