На фиг. 8, a – 10, a показаны распределения давлений $p^{\vee}$, $p_\mu^{\vee}$ и скоростей $v^{\vee}$ по координате x в моменты времени τ=1,23; 2,46; 4,30; 6,15; 13,5; 16,5; 19,6 (кривые *1–7*), а на фиг. 8, *б* – 10, *б* – изменения этих параметров во времени в точках $r^{\vee}$=–0,286; –0,171; –0,057; 0; 0,143; 0,286; 0,429. Давления $p_\mu^{\vee}$ на фиг. 9 появляются при пересечении частицы газа с поверхностью грунта. Светлые точки на фиг. 10, a соответствуют верхней границе жидкой зоны.

Из фигур видно, что в результате торможения газовых частиц и отражения от жидкой прослойки движение газа в верхней части порового пространства носит колебательный характер при резком уменьшении сопротивления фильтрации и градиента p_μ'. Это вызывает увеличение влияния сил инерции в жидкой зоне, причем ускорения жидких частиц (достигающие 70 ⟨единиц g⟩) почти полностью компенсируются градиентом давлений p'. При τ>6,2 скорость фильтрации жидкости и сопротивление p_μ возрастают.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лейбензон Л. С.* Подземная гидрогазодинамика. Собр. тр. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1953. 544 с.
2. *Требин Г. Ф.* Фильтрация жидкостей и газов в пористых средах. М.: Гостоптехиздат, 1959. 157 с.
3. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 286 с.
4. *Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А.* Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 335 с.
5. *Каракин А. В., Лобковский Л. И.* Механика пористой двухфазной вязкодеформируемой среды и некоторые геофизические приложения.– Изв. АН СССР, МЖГ, 1979, № 6, с. 53–63.
6. *Адушкин В. В., Каазик П. Б.* Расчет выхода газообразных продуктов подземного взрыва в атмосферу.– ПМТФ, 1976, № 1, с. 111–120.
7. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1967. 528 с.
8. *Коробейников В. П., Чушкин П. И., Шароватова К. В.* Газодинамические функции точечного взрыва. М.: ВЦ АН СССР, 1969. 48 с.
9. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. 418 с.
10. *Dupuit J.* Memoire sur le mouvement de l'eau a travers les terrains perméables. Paris, 1857.
11. *Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С.* Физико-математические основы фильтрации воды. М.: Мир, 1971. 452 с.
12. *Фабрикант Н. Я.* Аэродинамика. М.: Наука, 1964. 814 с.
13. *Гинзбург И. П.* Теория сопротивления и теплопередачи. Л.: Изд-во ЛГУ, 1970. 375 с.
14. *Дейли Д., Харлеман Д.* Механика жидкости. М.: Энергия, 1971. 480 с.
15. *Котляревский В. А., Румянцева Р. А., Шишикин А. И.* Волны в мягком грунте как упруговязкой среде.– Физика горения и взрыва, 1977, № 2, с. 229–238.
16. *Котляревский В. А., Майорова Е. Г., Шишикин А. И.* Волны напряжений в грунтах при наличии кавитационных эффектов.– ПМТФ, 1978, № 2, с. 95–104.
17. *Коробейников В. П., Чушкин П. И., Шароватова К. В.* Таблицы газодинамических функций начальной стадии точечного взрыва. М.: ВЦ АН СССР, 1963. 59 с.

Москва

Поступила в редакцию 24.II.1981

УДК 539.3

ОБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ БАЛОК В ПРОЦЕССЕ ДВИЖЕНИЯ

БРОВМАН М. Я.

Решению задач об упругопластическом изгибе балок посвящено большое число работ, часть результатов и соответствующие ссылки можно найти, например, в [1–3].

В практических задачах часто рассматривают изгиб балки, совершающей в процессе деформации движение вдоль своей оси при постоянных внешних нагрузках. Такие процессы деформации применяют при правке и вальцовке заготовок в роликовых машинах.

В публикуемой работе рассмотрена задача об упругопластическом изгибе балок, совершающих поступательное движение вдоль своей оси. Принимаются условия линейного распределения деформации по толщине балки и модель идеальной упругопластической среды. Приводятся результаты экспериментального исследования.

1. В процессе движения балки, нагруженной постоянными силами, каждый ее

участок последовательно проходит упругую зону, зоны упругопластической деформации и разгрузки. Например, при нагрузке, согласно фиг. 1, пластическая деформация начнется в зоне слева от сечения, где действует сила P. Но справа от этого сечения в отличие от деформаций неподвижной балки пластическая деформация отсутствует и реализуется только разгрузка ввиду уменьшения изгибающего момента. В зоне упругой деформации имеет место закон Гука, а в зонах разгрузки напряжения равны:

при разгрузке после пластической деформации растяжения

$$\sigma=\sigma_T+Ey\,(d^2u/dx^2-r_1) \tag{1.1}$$

при разгрузке после пластической деформации сжатия

$$\sigma=-\sigma_T+Ey\,(d^2u/dx^2-r_1) \tag{1.2}$$

Здесь y – расстояние от нейтральной оси для балки прямоугольного сечения размерами $b\times h$, $u(x)$ – прогиб, l – расстояние между опорами, r_1 – кривизна в середине длины балки, где изгибающий момент M достигает максимума (график для M показан на фиг. 1), $\sigma_T E$ – предел текучести и модуль упругости материала балки. В зонах пластической деформации $\sigma=\pm\sigma_T$.

Отсутствие симметрии расположения зоны пластической деформации относительно сечения $x=0.5l$, в котором приложена сила P, приводит к нарушению симметрии функции $u(x)$. В расчете не учитывается влияние касательных напряжений, что допустимо для длинных балок [1, 2]. Задача сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $u(x)$ с учетом последовательного прохождения каждым участком балки зон упругой, упругопластической деформации и разгрузки.

Принимаем, что деформации и производные функции $u(x)$ всюду являются малыми.

2. Рассматривая приведенную на фиг. 1 схему нагружения балки постоянной сосредоточенной силой, примем начало координат в точке A (балка перемещается от A к B). Следуя [1, 2], исходные уравнения задачи упругопластического изгиба запишем в виде:

$$\begin{gathered}
d^2u/dx^2=-24amx/l^2,\quad a=\sigma_T l/Eh,\quad m=Pl/4\sigma_T bh^2\quad (0\leqslant x<x_n)\\
\frac{d^2u}{dx^2}=-\frac{2a}{l\sqrt{3}\sqrt{1-8mx/l}},\qquad x_n=\frac{l}{12m}\qquad (x_n\leqslant x<0.5l)\\
\frac{d^2u}{dx^2}=-\frac{2a}{l\sqrt{3}\sqrt{1-4m}}+12am\left(2\frac{x}{l}-1\right)\qquad (0.5l\leqslant x\leqslant l)
\end{gathered} \tag{2.1}$$

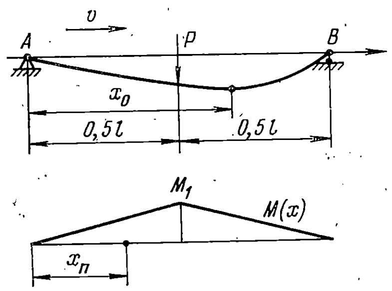
Первое из уравнений (2.1) описывает прогиб в зоне упругой деформации, второе – в зоне пластической деформации, а третье – в зоне разгрузки, где изгибающий момент уменьшается. Интегрирование уравнений (2.1) с учетом непрерывности функций $u(x)$ и du/dx в сечениях $x=x_n$ и $x=0.5l$ и краевых условий $u(0)=u(l)=0$ приводит к зависимостям

$$u(x)=-al\left[\left(C+m-\frac{1}{4m}-\frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{1-4m}}+\frac{\sqrt{1-4m}}{2m\sqrt{3}}\right)\frac{x}{l}+\frac{4mx^3}{l^3}\right]\qquad (0\leqslant x<x_n)$$

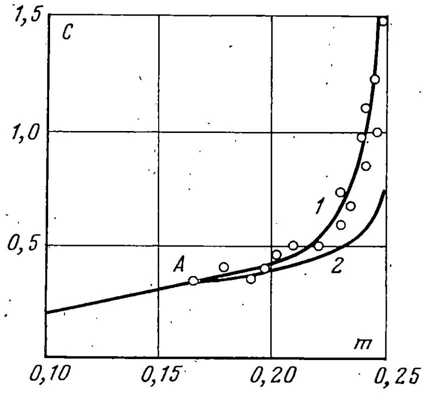
$$\begin{gathered}
u(x)=-al\left[-\frac{5}{216m^2}+\left(C+m-\frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{1-4m}}+\frac{\sqrt{1-4m}}{2m\sqrt{3}}\right)\frac{x}{l}+\right.\\
\left.+\frac{1}{24m^2\sqrt{3}}\left(1-8m\frac{x}{l}\right)^{3/2}\right]\qquad (x_n\leqslant x<0.5l)
\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered}
u(x)=al\left[C-\frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{1-4m}}-\left(C-2m-\frac{3}{2\sqrt{3}\sqrt{1-4m}}\right)\frac{x}{l}-\right.\\
\left.-\left(\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{1-4m}}+6m\right)\frac{x^2}{l^2}+4m\frac{x^3}{l^3}\right]\qquad (0.5l\leqslant x\leqslant l)
\end{gathered}$$

$$C=\frac{5}{216m^2}-\frac{m}{2}+\frac{1}{4\sqrt{3}\sqrt{1-4m}}-\frac{\sqrt{1-4m}}{4m\sqrt{3}}-\frac{(1-4m)^{3/2}}{24m^2\sqrt{3}} \tag{2.3}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Прогиб в сечении $x=0.5l$, в котором приложена сила P, равен $u_1=0.5alC$. Для неподвижной балки прогиб в этом сечении будет равен

$$v_1=0.5alC_1, \quad C_1=\frac{5}{108m^2}-\frac{\sqrt{1-4m}}{2m\sqrt{3}}-\frac{(1-4m)^{3/2}}{12m^2\sqrt{3}} \tag{2.4}$$

Графики функций $C(m)$, $C_1(m)$ приведены на фиг. 2, где кривая $1-C(m)$, $2-C_1(m)$. Точка $A(m=1/6)$ определяет границу упругой деформации.

Сравнение величин прогибов подвижной и неподвижной балок показывает, что при $m\geqslant 0.23$ расхождение превышает 12% и быстро увеличивается с возрастанием m. С приближением силы к предельной величине $m=0.25$ коэффициент $C(m)$ неограниченно возрастает, в то время как $C_1(0.25)=0.74$.

Движение балки в процессе изгиба не только увеличивает прогиб, но и качественно изменяет распределение деформации по ее длине. Сечение x_0, в котором прогиб достигает максимума и $du/dx=0$, смещается в направлении движения балки и не совпадает с сечением $x=0.5l$, где приложена сила (см. фиг. 3). Имеет место условие $x_0\geqslant 0.5l$, причем знак равенства только при упругой деформации ($m=1/6$), когда движение балки не изменяет ее прогиба.

При упругопластической деформации функция $u(x)$ несимметрична относительно сечения $x=0.5l$, хотя реакции опор равны и эпюра изгибающих моментов симметрична.

Практическое значение имеет определение остаточной кривизны балки r_0, после выхода ее из роликов

$$r_0=\frac{d^2u}{dx^2}(l)=\frac{2a}{l}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{1-4m}}+6m\right) \tag{2.5}$$

На фиг. 4 показано изменение величины $R_0=1/2 r_0 l/a$ в зависимости от усилия (фиг. 4, *а*) и от прогиба в середине длины балки u_1 (фиг. 4, *б*).

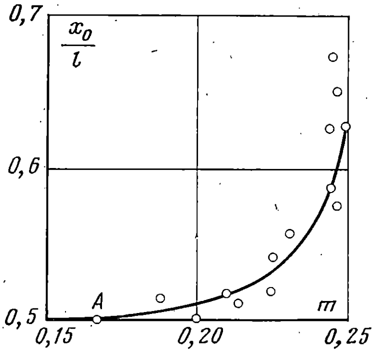
Из (2.5) следует, что при $m=1/6$ кривизна $r_0=0$. (На фиг. 3, 4 точка A показывает границу зоны упругой деформации.) При $m>0.22$ зависимость $r_0(C)$ можно описать простой формулой $R_0=-(4C-2)$ или $R_0=-(2/a)(4u_1/l-a)$.

3. В большинстве правильных машин балку перемещают через ролики, подвергая ее знакопеременному изгибу, как показано на фиг. 5. Здесь же приведена эпюра изгибающих моментов $M(x)$. На участке длиной l между сечениями, в которых действуют силы P_n, P_{n+1} и изгибающие моменты $m_n=M_n/(\sigma_T bh^2)$, $m_{n+1}=M_{n+1}/(\sigma_T bh^2)$, приняв начало координат для данного пролета в точке A (фиг. 5), запишем уравнение изгибающих моментов: $m(x)=m_n+(m_{n+1}-m_n)x/t$.

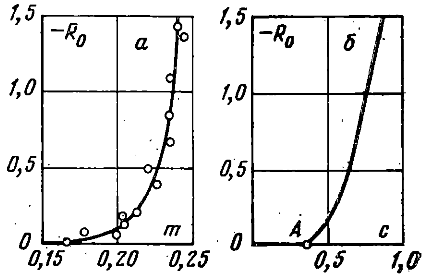
Из условий равновесия для балки, нагруженной системой из k сил (фиг. 5), получим

$$M_n=\frac{nl}{k+1}\sum_{s=1}^{k}P_s(-1)^{s-1}(k-s+1)-l\sum_{s=1}^{n}P_s(-1)^{s-1}(n-s) \tag{3.1}$$

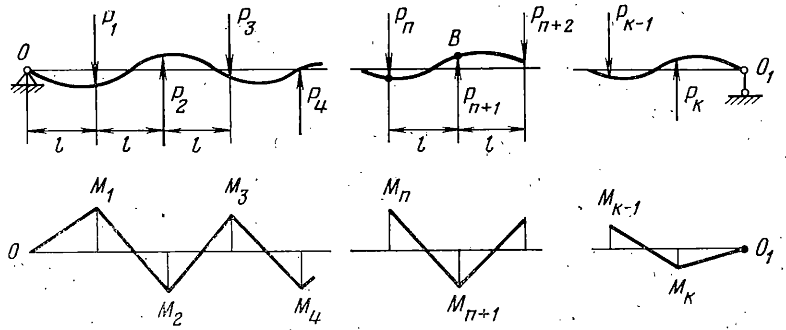
Наибольшую деформацию создают на первом изгибающем ролике (где действует сила P_1), а затем плавно уменьшают ее при каждом перегибе. Поэтому размер зоны упругой деформации определяется кривизной $r_1=-2a/[l(3-12m_1)^{1/2}]$. По всей длине балки упругая деформация имеет место при $0\leqslant|y|<y_1$, где $y_1=\sigma_T/Er_1$ – расстояние от нейтральной оси до границы зоны упругой деформации. При $y_1\leqslant y<y_2$ находится



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

зона разгрузки, где имеет место зависимость (1.1). $y_2=2\sigma_T/[E(r_2-r_1)]$. При $y_2\leqslant y<y_3$ происходит разгрузка, описываемая формулой (1.2) $y_3=2\sigma_T/[E(r_2-r_3)]$. Аналогично

$$y_n=2\sigma_T/[E(r_{n-1}-r_n)] \tag{3.2}$$

(Величины m_1, m_3, $m_5,\ldots$ и r_2, r_4, $r_6,\ldots$ положительны, а m_2, $m_4,\ldots$ и r_1, r_3, $r_5,\ldots$ отрицательны.)

Вблизи точки A в зонах разгрузки имеют место формулы (1.1) или (1.2) по всей толщине балки, а границы участков определяются выражениями (3.2).

В зоне разгрузки получаем уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2}=r_n+\frac{12a}{l}(m_{n+1}-m_n)\frac{x}{l}, \qquad r_n=\frac{d^2u}{dx^2}(0) \tag{3.3}$$

где r_n – кривизна в сечении, определяемом точкой A, в котором действует сила P_n.

На расстоянии x_n от точки A начинается зона пластической деформации (обратная по знаку деформации вблизи сечения $x=0$):

$$x_n={}^1/_3 l(-1)^n/(m_{n+1}-m_n) \tag{3.4}$$

В зоне пластической деформации уравнение для прогиба имеет вид

$$\frac{d^2u}{dx^2}=r_n-\frac{4a(-1)^n}{l\sqrt{3}\sqrt{1+2(-1)^{n-1}(m_{n+1}-m_n)x/l}} \tag{3.5}$$

Уравнения (3.3) и (3.5) применимы, если все величины y_n не убывают с увеличением n. Поскольку r_{n-1} и r_n при любом n имеют различные знаки, то увеличение y_n имеет место, если абсолютные величины кривизны не увеличиваются, т. е. $|r_{n+1}|\leqslant|r_n|$, что на практике выполняется.

Уравнение (3.5) можно применять, если выполнено условие $x_n\leqslant l$. Это выполняется и в практически важных случаях, поскольку изгиб только при упругой деформации не изменяет ее остаточную кривизну.

Только в последнем пролете от силы P_k до опоры в точке O_1 (фиг. 5) по всей длине имеет место уравнение (3.3). Для участка длиной l от силы P_n до силы P_{n+1}

краевые условия в точках A и B имеют вид

$$\frac{d^2u}{dx^2}(0)=r_n,\qquad \frac{du}{dx}(0)=\theta_n,\qquad u(0)=u_n$$
$$\frac{d^2u}{dx^2}(l)=r_{n+1},\qquad \frac{du}{dx}(l)=\theta_{n+1},\qquad u(l)=u_{n+1} \tag{3.6}$$

Интегрирование уравнений (3.3) и (3.5) при условиях (3.6) приводит к рекуррентным соотношениям (при $n>1$):

$$r_{n+1}=r_n+a/(l\psi_n),\qquad \theta_{n+1}=\theta_n+r_nl+a\varphi_n \tag{3.7}$$
$$u_{n+1}=u_n+\theta_nl+0.5r_nl^2+alf_n$$

$$\psi_n=\frac{4(-1)^n}{\sqrt{3}\sqrt{1+2(-1)^{n-1}(m_{n+1}-m_n)}},$$

$$\varphi_n=\frac{2}{m_{n+1}-m_n}\left[1-\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1+2(-1)^{n-1}(m_{n+1}-m_n)}\right] \tag{3.8}$$

$$f_n=\frac{2}{m_{n+1}-m_n}\left\{1-\frac{10(-1)^n}{27(m_{n+1}-m_n)}+\frac{2(-1)^n}{3\sqrt{3}(m_{n+1}-m_n)}\left[1+2(-1)^{n-1}(m_{n+1}-m_n)^{3/2}\right]\right\}$$

Условие равенства нулю прогиба на левой опоре в точке O (фиг. 5) определяет

$$\theta_1=\frac{u_1}{l}+a\varphi_0(m),\qquad \varphi_0(m)=\frac{5}{54m_1^2}-\frac{\sqrt{1-4m_1}}{3m_1}-\frac{(1-4m_1)^{3/2}}{6\sqrt{3}\,m_1^2} \tag{3.9}$$

Из соотношений (3.8) находим прогиб u_n в сечении, где действует сила P_n:

$$u_n=-\left\{nu_1+(n-1)al\varphi_0+\frac{al(n-1)^2}{\sqrt{3}\sqrt{1-4m_1}}+al\sum_{s=1}^{n-1}\left[f_s+(n-s-1)\varphi_s+\frac{1}{2}(n-1-s)^2\psi_s\right]\right\} \tag{3.10}$$

Равенство нулю прогиба на правой опоре балки (в точке O_1) имеет вид $u_k+\theta_kl+{}^1/_2r_kl^2-2alm_k=0$, откуда с применением (3.8) и (3.10) получим

$$u_1=-\frac{al}{k+1}\left\{2m_k-\varphi_0k-\frac{k^2}{\sqrt{3}\sqrt{1-4m_1}}-\sum_{s=1}^{n-1}\left[f_s+(k-s)\varphi_s+{}^1/_2(k-s)^2\psi_s\right]\right\} \tag{3.11}$$

Выражения (3.10) и (3.11) определяют прогибы во всех сечениях, где действуют силы P_n.

Остаточная кривизна балки после прохождения через систему $(k+2)$ роликов (при этом имеют место две опорные реакции и k внешних сил) равна

$$r_0=-\frac{2a}{l\sqrt{3}}\left[\frac{1}{\sqrt{1-4m_1}}+2\sum_{s=1}^{k-1}\frac{(-1)^s}{\sqrt{1+2(-1)^{s-1}(m_{s+1}-m_s)}}\right]+\frac{12am_k}{l} \tag{3.12}$$

Условие $r_0=0$ определяет поверхность в пространстве с координатами $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Настройку правильной машины можно производить по величинам усилий, измеряемых мессдозами, или по величинам прогибов: $u_1, u_2, \ldots, u_k$.

Расчеты на ЭЦВМ по уравнениям (3.10), (3.11) с учетом (3.12) при $h=6\ldots20$ мм показывают, что эффективная правка может быть осуществлена при $k=5-7$, а при $h=2\div6$ мм значение $k=9-11$.

4. Экспериментальное исследование проводилось при изгибе балок толщиной $1\div8$ мм по схеме фит. 1 для следующих материалов: Ст. 3СП ($\sigma_T=310$ МПа, $E=2.1\cdot10^5$ МПа), 12ХН3А ($\sigma_T=740$ МПа, $E=2.1\cdot10^5$ МПа), медь М1 ($\sigma_T=180$ МПа, $E=1.3\cdot10^5$ МПа).

Прогибы измерялись индикаторами в сечениях, расположенных через каждые 10 мм по длине балки, при общей ее длине 100 и 200 мм. Усилия на роликах измеряли мессдозами с проволочными тензодатчиками [4]. После выхода балки из роликов измерялась ее остаточная кривизна. Результаты экспериментальных замеров отмечены точками на фиг. 2–4. Расхождение между экспериментальными и расчетными величинами не превышает 16%, в то время как с результатами расчета прогиба неподвижной балки (кривая 2 на фиг. 2) расхождение достигает 100%.

Подтверждено смещение сечения максимального прогиба с нарушением симметрии функции $u(x)$. По экспериментальным данным $x_0=(0.50\div0.68)l$. Изменение скорости движения балки от 0.1 до 1.5 м/с не оказало влияния на процесс изгиба.

Исследование изгиба по схеме фиг. 5 осуществлялось на новой роликовой правильной машине[1]. При $k=3\div5$ все ролики установлены на эксцентриках, что позволяет просто регулировать прогиб балки в сечениях, где приложены силы. Расчетные данные, полученные по формулам (3.10), (3.11), отличаются от экспериментальных не более чем на 22%. Расчеты показывают, что при четных k уравнение (3.12) ($r_0=0$) имеет только тривиальное решение $m_s={}^1/_6(-1)^{s-1}$, соответствующее упругой деформации.

При нечетных k уравнение (3.12) имеет много решений ($r_0=0$): например, $m_1=-m_2$, $m_3=-m_4$ и т. д.

Указанное уравнение было применено на практике при $k=3$ для настройки правильной машины.

Ранее настройка роликов создавала остаточную кривизну $r_0=(2.5-3.0)\cdot10^{-4}$ мм$^{-1}$, что снижало качество выпускаемого проката. Ниже приводятся результаты расчета параметров упругопластического изгиба, обеспечивающего получение прямолинейных балок.

n	m_n	P_nl/σ_Tbh^2	r_nl/a	u_n/la
1	0,230	0,690	−4,05	1,40
2	−0,230	0,899	4,05	0,40
3	0,209	0,648	−2,55	0,60

На левой опоре величина P_nl/σ_Tbh^2 равна 0.230, а на правой 0.209. При данном режиме изгиба балок остаточная кривизна уменьшилась в 8–10 раз и не превышает $r_0=3.1\cdot10^{-5}$ мм$^{-1}$, что обеспечивает получение проката первого сорта, для которого прогиб не должен превышать 2 мм на 1000 мм длины балки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
2. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
3. *Шапиро Г. С.* О предельном и упругопластическом состояниях конструкций.— Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1963, № 4, с. 138–144.
4. *Беняковский М. А., Бровман М. Я.* Применение тензометрии в прокатке. М.: Металлургия, 1965. 145 с.
5. *Бровман М. Я., Будников Ю. В., Аттарян В. Г., Чивадзе М. И.* Повышение качества правки прямоугольных и квадратных труб.— Сталь, 1980, № 3, с. 222–225.

Краматорск

Поступила в редакцию 12.IX.1979

УДК 539.3

ВОЛНЫ В СЛАБО АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

РОССИХИН Ю. А.

Рассматривается анизотропная среда, модули упругости которой мало отличаются от упругих коэффициентов некоторого изотропного материала. Эта среда носит название слабо анизотропной. В такой среде изучено поведение объемных волн, которые возникают при внезапном приложении нагрузки к границе сферической полости. При исследовании используется метод возмущений, позволяющий в первом приближении получить ряд особенностей распространения волн в кристаллах.

Рассмотрим ударные волны в упругой анизотропной среде. Уравнения для определения скоростей и интенсивностей волновых фронтов в криволинейных координатах запишутся так [1]:

$$\left(\overset{k}{c}_{ij\cdot l}\nu^j\nu^l-\rho G^2\delta_i^k\right)\lambda_k=0,\qquad \lambda_i=-G^{-1}[v_i]$$

$$\begin{gathered}\rho G^2\left(\overset{i}{W}_{i,t}-\overset{i}{W}_{i,\alpha}g^{\alpha\gamma}x_{k\gamma}x_t^k\right)+\rho G\left(G_{,t}-G_{,\alpha}g^{\alpha\beta}x_{k\beta}x_t^k\right)W_i{}^i+\overset{k}{c}_{ij\cdot l}\left(\overset{i}{W}_{k,\alpha}\nu^jx_\beta{}^l+\right.\\ \left.+\Gamma_{mn}{}^iW_k{}^mx_\alpha{}^n\nu^jx_\beta{}^l-\Gamma_{kn}{}^mW_m{}^ix_\alpha{}^n\nu^jx_\beta{}^l+\nu_{,\alpha}{}^lW_k{}^ix_\beta{}^j+\Gamma_{mn}{}^lW_k{}^ix_\beta{}^j\nu^mx_\alpha{}^n\right)g^{\alpha\beta}G=0,\\ W_j{}^i=\lambda^i\lambda_j\end{gathered}\tag{1}$$

[1] Машина спроектирована и изготовлена Краматорским научно-исследовательским и проектно-технологическим институтом машиностроения. Пущена в эксплуатацию на Руставском металлургическом заводе [5].