

УДК 533.6.013.42

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЗДУШНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ПОРИСТОЙ СРЕДОЙ И ФИЛЬТРАЦИЯ ГАЗА ЧЕРЕЗ ГРУНТОВЫЙ СЛОЙ ПРИ ВЗРЫВАХ

КОТЛЯРЕВСКИЙ В. А., МАЙОРОВА Е. Г.

Теория фильтрации газа и газированной жидкости в пористой среде развивалась, как известно, применительно к технологическим процессам разработки нефтяных, газовых и газоконденсатных месторождений [1-3].

Вывод фундаментальных уравнений динамики деформируемых пористых сред применительно к задачам горного дела и техники, где приходится сталкиваться с многофазными средами, дан в [4]. Рассмотрены особенности сейсмических и ударных волн в насыщенных жидкостью упругих породах и механизм консолидации земляных масс. Уравнения механики вязкодеформируемых двухфазных трещиновато-пористых сред (с фазовыми переходами) в приложениях к задачам геофизики приводятся в [5]. Представления теории фильтрации в [6] использованы для описания выхода в атмосферу газообразных продуктов подземного взрыва через трещины разрушенной, но недеформируемой пористой среды с применением нелинейного закона фильтрации.

Ниже на основе модели пористой среды¹ даются формулировка и численное решение квазиодномерной задачи о взаимодействии воздушной ударной волны со слоем пористой среды, расположенным над замкнутым объемом газа. Изучаются связанные процессы нелинейной фильтрации газа из области отраженной волны через открытые поровые каналы слоя в объем, деформации упруговязкого скелета пористого слоя и перераспределение напряжений в его скелете, вызванное силами вязкого трения фильтрующего газа, с учетом сил инерции сред.

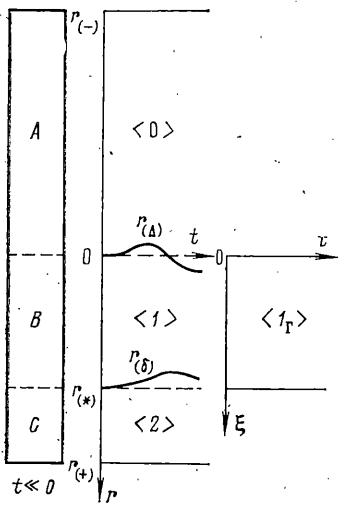
1. Предполагается, что пористая среда обладает деформируемым скелетом с закрытыми пораами и открытыми поровыми каналами. Это обуславливает идентичность исходных параметров окружающей газовой среды и газа в каналах. Механические свойства скелета, содержащего газ, защемленный в закрытых порах, учитываются общим для этой системы реологическим уравнением состояния. Полагается, что взаимодействие скелета пористой среды и газа в открытых поровых каналах сводится к вязкому трению, обуславливающему падение напора, причем объем пор зависит от напряжений в скелете. Теплообмен между газом и скелетом, возможные фазовые переходы, химические взаимодействия, двумерные инерционные эффекты, связанные с компонентой поперечного движения газа в каналах, и поле силы тяжести не принимаются во внимание.

При формулировке задачи используется модель потока в пористой среде в виде потока, проходящего в цилиндрической трубке (модель капиллярной трубки), подчиняющегося нелинейному закону фильтрации (с нулевым начальным градиентом), причем осредненный расход V газа на единицу площади пористой среды связан с локальными скоростями газа v и стенок капилляра v_r соотношением (n — открытая пористость)

$$V = n(v - v_r) \quad (1.1)$$

¹ Котляревский В. А. Об использовании моделей грунтов при прогнозе испытаний крепи подземных выработок на действие промышленных взрывов: Тез. докл. научно-техн. конф. «Повышение эффективности и качества транспортного строительства на БАМе, а также в других районах Сибири и Дальнего Востока» (ВНИИ трансп. строит. Минтрансстроя). М., 1979, с. 267.

Рассматривается вертикальный столб среды (фиг. 1) с единичной поперечной площадью, ограниченный снизу неподвижной преградой. В невозмущенном состоянии зоны А, В, С столба находятся под атмосферным давлением $p_{(0)}$. Область А является частью газовой среды, по которой распространяется ударная волна, взаимодействующая с пористым слоем В и газом в объеме С. Инфильтрация газа возможна через полупроницаемые границы А|В и В|С пористого слоя, причем подвижность границы А|В обусловлена деформацией слоя; граница В|С считается неподвижной.



Фиг. 1

Вводится две координаты Лагранжа, соответствующие геометрии столба среды при $t \ll 0$ и давления $p_{(0)}$: r — для газа и ξ — для скелета пористой среды с общим началом $r = \xi = 0$, совмещенным с границей А|В. Плоскость rt содержит области: 0 — газ над пористым слоем, 1 — газ в поровых каналах, 2 — газ под пористым слоем, а ξt — область I_{Γ} скелетной системы (скелета пористой среды с заземленным в закрытых порах газом). Отсчет времени t ведется с момента $t=0$ прихода фронта воздушной ударной волны в начало координат $r=0$. Начальные условия для области 0 ударной волны и условие на ее внешней границе $r=r_{(-)}$ при $t \geq 0$ формируются на основе задачи о точечном взрыве [7, 8], причем расстояние $|r_{(-)}|$ предполагается достаточно большим (не менее пробега отраженной от поверхности $r=0$ воздушной ударной волны с учетом сноса потоком за исследуемый промежуток времени $t=t_*$). Начальные условия для остальных областей — нулевые, кроме уравнения (1.5), для которого при $t=0$ $p=p_{(0)}$.

Границы $r_{(\Delta)}$ и $r_{(\delta)}$ между областями 0|1 и 1|2 подвижные и определяются притоком массы газа, фильтрующего в пористый слой и затекающего в объем. Уравнения для $r_{(\Delta)}$, $r_{(\delta)}$ с учетом смещений $u_{\Gamma}(0, t)$ верхней границы А|В пористого слоя с начальной толщиной $r_{(*)}$ имеют вид

$$r_{(\Delta)} = u_{\Gamma}(0, t) - u[r_{(\Delta)}(t), t], \quad r_{(\delta)} = r_{(*)} - u[r_{(\delta)}(t), t] \quad (1.2)$$

На полупроницаемых границах предполагаются обычные условия совместности. Условиями для нижних границ $\xi = r_{(*)}$, $r_{(+)}$ областей I_{Γ} , 2 является их неподвижность.

Для описания движений газа в областях 0, 2 используется система уравнений в переменных Лагранжа

$$\rho_{(0)} \dot{v} = -(p+q)' \quad (1.3)$$

$$\dot{u} = v \quad (1.4)$$

$$\dot{p} = \dot{\rho} \rho^{-1} [k p + (k-1) q] \quad (1.5)$$

$$q = -s \rho l^2 |v'| |v'| \quad (1.6)$$

$$\rho = \rho_{(0)} (u'+1)^{-1} \quad (1.7)$$

Здесь p — давление, ρ — плотность газа, $\rho_{(0)}$ — плотность при атмосферном давлении, l — константа с размерностью длины, u — смещение частиц.

В уравнении движения (1.3) введена квадратичная искусственная вязкость q , исключаяющая необходимость постановки условий на сильных разрывах ($s=1$ при $v' < 0$, в противном случае $s=0$ [9]). Уравнение (1.5) представляет комбинацию первого закона термодинамики $\dot{E} = \rho^{-2} \dot{\rho} (p+q)$ и уравнения состояния совершенного газа $p = \rho(k-1)(E + \text{const})$ с постоян-

ным отношением теплоемкостей k (E — внутренняя энергия). Точкой сверху обозначена частная производная по t , штрихом — по r .

Нестационарная фильтрация газа описывается законом Дюпюи — Форхгеймера [10, 3] с поправкой $(\rho_{(0)}v')$ на инерционные эффекты [11]. С учетом (1.1) этот закон приобретает форму (p_μ — сопротивление фильтрации или давление вязкого трения; при $t=0$, $n=n^*$):

$$\begin{aligned} & -(np)' + (np_\mu)' = n^* \rho_{(0)} v' \\ -p_\mu' &= \frac{\mu}{k_0} n (v - v_T) \left(1 + \frac{\rho n}{\mu k_T / k_0} |v - v_T| \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

причем динамическая вязкость газа μ определяется по формуле Сэттерленда с учетом термического уравнения состояния

$$\mu = \mu_{(0)} (T/T_{(0)})^{1,5} [(c + T_{(0)}) / (c + T)], \quad T = p / (R\rho) \quad (1.9)$$

Выше обозначено: k_0 , k_T — ламинарная и турбулентная проницаемость, T — температура, $R = 287,14 \text{ м}^2 / (\text{с}^2 \cdot \text{К})$ — газовая постоянная, $\mu_{(0)} = 1,72 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$ — вязкость воздуха $T_0 = 273 \text{ К}$, $c = 130,5 \text{ К}$ [12].

В уравнении (1.8) $v_T = v_T(\xi[r(t)], t)$ — скорость стенки капилляра на уровне частиц газа с координатой r , движущихся со скоростью v . Соответствующая зависимость $\xi(r)$ определяется из условия равенства эйлеровых координат трущихся сред в сечении r (скорость v_T определяется уравнениями для области I_T).

Для области I кроме (1.8), (1.9) используются уравнения (1.4), (1.7) и (1.5) при $q=0$, причем (1.8) служит для определения v , p_μ .

Термины «ламинарный» и «турбулентный» для коэффициентов k_0 , k_T являются условными, так как переход к нелинейной фильтрации носит бескризисный характер и осуществляется в диапазоне условных чисел Рейнольдса $Re = d_1 v \rho / \mu = 60 - 600$ [13, 14] (d_1 — характерный размер порового канала или диаметр частицы).

Уравнение состояния скелета пористой среды, получаемое в опытах по схеме [3] (в условиях, когда поры заполнены жидкостью), связывает деформации и эффективные (фиктивные) напряжения σ^f , причем $\sigma^f = \sigma_2 - p = \sigma - p(1 - n)$, где σ_2 — полное давление, p — поровое давление, σ — «истинное» напряжение в скелете, отнесенное к единице площади общего сечения.

В данной работе предполагается, что условия опыта отличаются от схемы [3] тем, что поры заполнены газом, сжимаемость которого существенно выше сжимаемости скелета. Обычно материальные константы уравнения состояния скелета такой пористой среды (например, грунта) определяют в приборах объемного или осевого сжатия при динамическом давлении, передаваемом на тонкий слой среды через сплошной легкий поршень [15]. В этих условиях (даже при отсутствии дренирования газа) поровое давление и инерционные эффекты пренебрежимо малы и фиксируется не фиктивное в смысле [3], а «истинное» напряжение σ (хотя при $p \rightarrow 0$ напряжение $\sigma \sim \sigma^f \sim \sigma_2$), которое и входит в уравнение состояния.

Поведение скелетной системы считается упруговязким. Для описания этих свойств используется обобщенная модель Фойгта с двумя временами запаздывания $\tau_k = v_k / c_k$ ($k=1, 2$) [16]:

$$\sigma = c_1 \varepsilon_* + v_1 \varepsilon_*', \quad (v_1 + v_2) \varepsilon_*' + (c_1 + c_2) \varepsilon_* = v_2 \varepsilon'' + c_2 \varepsilon' \quad (1.10)$$

Здесь ε — деформация, v_k , c_k — вязкость и жесткость ньютоновых и кузовых звеньев фойгтовых элементов модели, ε_* — деформация элемента с временем запаздывания τ_1 .

В формулируемой задаче условия нагружения отличаются от условий получения зависимости (1.10): сжатие скелета обусловлено волной дефор-

мации в скелете, индуцируемой давлением ударной волны на полупроницаемой границе $A|B$, и вязким трением фильтрующего газа о поверхность поровых каналов, догружающим скелет, причем поровое давление p в открытых каналах соизмеримо с давлением в ударной волне, т. е. по порядку величины соответствует напряжению σ . Таким образом, уравнение движения скелета содержит σ и p_μ , а полное (инструментальное) давление дается формулой

$$\sigma_x = \sigma + n(p - p_{(0)}) \quad (1.11)$$

причем σ и σ_x — избыточные сверх $p_{(0)}$ напряжения, а np соответствует вкладу давления фильтрующего газа.

Уравнения, описывающие движение скелета пористой среды, имеют вид

$$\rho_\Gamma v_\Gamma' = -\sigma' - (np_\mu)' \quad (1.12)$$

$$u_\Gamma' = v_\Gamma \quad (1.13)$$

$$\varepsilon = -u_\Gamma' \quad (1.14)$$

Здесь ρ_Γ — начальная плотность грунта, u_Γ — смещение его частиц, а штрих означает частную производную по ξ .

Давление вязкого трения p_μ в (1.12) берется по уравнению (1.8) для частицы газа с лагранжевой координатой $r = r(\xi)$, определяемой из условия равенства эйлеровых координат на уровне частиц скелета с координатой ξ .

Функция ε в (1.10), (1.14) представляет относительное сжатие пористой среды при одноосной деформации. В предположении, что сжатие происходит исключительно за счет общей пористости n° при постоянном отношении объемов открытого и закрытого поровых пространств, можно записать соотношения, связывающие n , n° с ε :

$$n^\circ = (n^{\circ*} - \varepsilon)(1 - \varepsilon)^{-1}, \quad n = n^\circ n^*/n^{\circ*} \quad (1.15)$$

где n^* , $n^{\circ*}$ — начальные значения для n и n° .

2. Для численного решения уравнения п. 1 относятся к конечному элементу среды (ячейке). При этом сформулированная краевая задача переходит в задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Таким образом, рассматривается параллельное движение двух цепочек масс ячеек, одна из которых соответствует газу, а другая — скелетной системе. Для аппроксимации уравнений (1.2) подвижные границы $r_{(\Delta)}$, $r_{(\delta)}$ заменяются переходными газовыми зонами, которые исключаются из областей 0, 1, 2. Ниже приводится аппроксимация уравнений для областей 0, 1, 2, I_Γ и газовых зон.

Разбивка газовой среды на ячейки с шагом $h_{j-1/2}$ при $t \ll 0$ производится с помощью лагранжевой сетки с координатами узлов r_j

$$r_0 = 0, \quad r_j = \pm \sum_{m=\pm 1}^j h_{m \mp 1/2} \quad (j = \pm 1, \pm 2, \dots, a, c) \quad (2.1)$$

$$h_{j-1/2} = h_* + a_1 j_0 + a_2 j_0^2 \quad (j_0 = -j + N + 1; a + 1 \leq j \leq N) \quad (2.2)$$

$$h_{j-1/2} = h_* \quad (1 + N \leq j \leq 0; b + 1 \leq j \leq c), \quad h_{j-1/2} = h_*/n^* \quad (1 \leq j \leq b)$$

а скелета — лагранжевой сеткой $\xi_i = h_\Gamma i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, d$) с шагом $h_\Gamma = h_* b (dn^*)^{-1}$, причем $j = a, b, c$ и $i = d$ — номера узлов в точках с координатами $r = r_{(-)}$, $r_{(*)}$, $r_{(+)}$, $\xi = r_{(*)}$; $j = N$ — номер узла, ограничивающего сверху совокупность газовых ячеек с шагом h_* постоянных по массе $h_* \rho_{(0)}$; a_1, a_2 — безразмерные константы, регулирующие разрежение сетки.

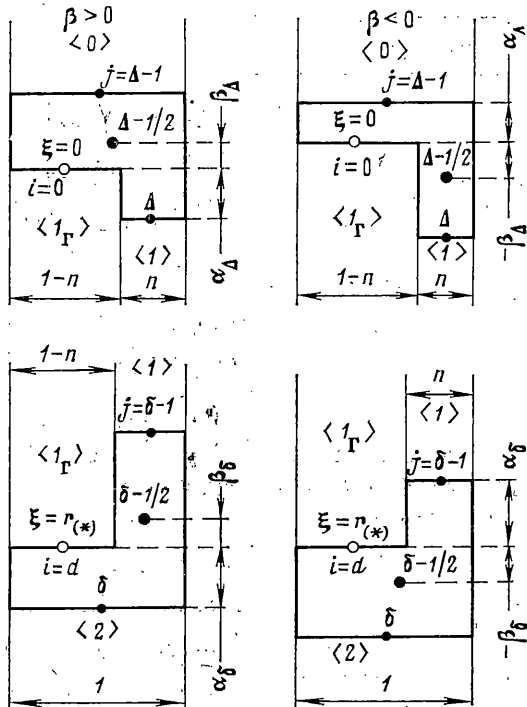
Переходные газовые зоны представлены переходными ячейками с переменными номерами Δ (между областями 0|1) и δ (между областями 1|2) с центрами масс в точках $r_{\Delta-1/2}$, $r_{\delta-1/2}$. Начальные значения: $\Delta=0$, $\delta=b$ при $t=0$. При $t>0$ переходные ячейки вытягиваются в капилляр или выдавливаются из капилляра (с площадью n), изображающего открытое поровое пространство (фиг. 2). Присвоение Δ и δ новых номеров ведется в процессе численного решения задачи и соответствует смещениям подвижных границ, причем считается, что в капилляр вытягиваются только ячейки, постоянные по массе.

Границы областей соответствуют координатам узлов сеток: $r_a=r_{(-)}$, $r_{\Delta-1} < 0 >$; r_{Δ} , $r_{\delta-1} < 1 >$;

$$r_{\delta}, r_c=r_{(+)} < 2 >; \\ \xi_0=0, \xi_d=r_{(*)} < 1_{\Gamma} >$$

В узлах сеток центрируются деформационные, а в точках с полуцелыми индексами — инерционные свойства сред, причем

$$r_{j+1/2}=1/2(r_j+r_{j+1}), \\ \xi_{i+1/2}=\xi_i+1/2h_{\Gamma} \quad (2.3)$$



Фиг. 2

Вводится эйлерова координата, совмещенная при $t=0$ с координатой Лагранжа r . Для удобства эйлерова координата частицы газа обозначается X , а скелетной частицы — χ .

Для лагранжевых ячеек с постоянным шагом соотношения для координат узлов в областях следующие:

$$X_j=1/2(X_{j-1/2}+X_{j+1/2}), \quad X_{j+1/2}=r_{j+1/2}+u_{j+1/2}, \quad X_c=r_{(+)} \quad (2.4)$$

$$\chi_i=1/2(\chi_{i-1/2}+\chi_{i+1/2}), \quad \chi_{i+1/2}=\xi_{i+1/2}+u_{\Gamma i+1/2} \quad (2.5)$$

$$\chi_0=1/2h_{\Gamma}\epsilon_0+u_{\Gamma 1/2}, \quad \chi_d=r_{(*)}=dh_{*} \quad (2.6)$$

где $u_{j+1/2}$, $u_{\Gamma j+1/2}$ — смещения центров масс газовых и скелетных ячеек, ϵ_i — деформации скелетных ячеек.

Эйлеровы координаты узлов переходных ячеек с учетом изменений пористости и на основании геометрии ячеек (фиг. 2) даются соотношениями

$$X_{\Delta, \delta}=X_{\Delta-1/2, \delta-1/2}+\alpha_{\Delta, \delta}+\beta_{\Delta, \delta} \quad (\beta_{\Delta, \delta}>0) \quad (2.7)$$

$$X_{\Delta-1, \delta-1}=X_{\Delta-1/2, \delta-1/2}-\alpha_{\Delta, \delta}+\beta_{\Delta, \delta} \quad (\beta_{\Delta, \delta}<0)$$

$$\alpha_{\Delta} = \begin{cases} 1/2(-\chi_0+X_{\Delta+1/2}) - \beta_{\Delta} \{n_0+n[\xi(r_{\Delta+1/2})]\}^{-1} & (\beta_{\Delta}>0) \\ 1/2\{\chi_0-X_{\Delta-1/2}+1/2\beta_{\Delta}(n_0+n[\xi(r_{\Delta-1/2})])\} & (\beta_{\Delta}<0) \end{cases}$$

$$\alpha_{\delta} = \begin{cases} 1/2\{-r_{(*)}+X_{\delta+1/2}-1/2\beta_{\delta}(n_d+n[\xi(r_{\delta-1/2})])\} & (\beta_{\delta}>0) \\ 1/2(r_{(*)}-X_{\delta-1/2}) + \beta_{\delta} \{n_d+n[\xi(r_{\delta-1/2})]\}^{-1} & (\beta_{\delta}<0) \end{cases}$$

$$\beta_{\Delta}=\chi_0-X_{\Delta-1/2}, \quad \beta_{\delta}=\chi_d-X_{\delta-1/2}$$

Здесь $\alpha_{\Delta, \delta} (\alpha_{\Delta}, \alpha_{\delta})$, $\beta_{\Delta, \delta} (\beta_{\Delta}, \beta_{\delta})$ — размеры, фиксирующие положение переходных ячеек относительно границ $i=0, d$ пористого слоя (фиг. 2), причем для зоны трения части переходной ячейки в капилляре введена средняя пористость; $X_{\Delta-1/2, \delta-1/2}$, $X_{\Delta, \delta}$ (при $\beta_{\Delta, \delta} < 0$) и $X_{\Delta-1, \delta-1}$ (при $\beta_{\Delta, \delta} > 0$) — эйлеровы координаты, вычисляемые по общим формулам (2.4).

Система обыкновенных уравнений, аппроксимирующих задачу для областей 0, 2, имеет вид $(\dot{}) = d()/dt$, $\nabla F_j = F(r_j) - F(r_{j-1})$

$$v_{j-1/2}^{\cdot} = -\nabla(p_j + q_j) (\rho_0 h_{j-1/2})^{-1} \quad (2.8)$$

$$u_{j-1/2}^{\cdot} = v_{j-1/2} \quad (2.9)$$

$$p_j^{\cdot} = \rho_j^{\cdot} \rho_j^{-1} [k p_j + (k-1) q_j] \quad (2.10)$$

$$q_j = -s a_0^2 \rho_j \nabla v_{j+1/2} |\nabla v_{j+1/2}|, \quad a_0 = 3/2 \quad (2.11)$$

$$s = 1 (\nabla v_{j+1/2} < 0), \quad s = 0 (\nabla v_{j+1/2} \geq 0) \\ \rho_j = \rho_{(0)} h_j / \nabla X_{j+1/2}, \quad h_j = 1/2 (h_{j-1/2} + h_{j+1/2}) \quad (2.12)$$

$$\rho_c = \rho_{(0)} (1 - 2u_{c-1/2} / h_{c-1/2})$$

Для области 1 к соотношениям (2.9), (2.10) при $q=0$ и (2.12) добавим уравнения, аппроксимирующие (1.8) и (1.9), учтя, что в капилляре $r_j - r_{j-1} = h_* / n^*$

$$v_{j-1/2}^{\cdot} = -\{p_j n [\xi(r_j)] - p_{j-1} n [\xi(r_{j-1})] - \\ - p_{\mu j} n [\xi(r_j)] + p_{\mu j-1} n [\xi(r_{j-1})]\} (\rho_{(0)} h_*)^{-1} \quad (2.13)$$

$$p_{\mu j-1}^{\cdot} = p_{\mu j} + \frac{h_* n [\xi(r_{j-1/2})]}{n^* k_0} \frac{\mu_{j-1} + \mu_j}{2} (v_{j-1/2} - v_{\Gamma} [\xi(r_{j-1/2})]) \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{\rho_{j-1} + \rho_j}{\mu_{j-1} + \mu_j} \frac{n [\xi(r_{j-1/2})]}{k_T / k_0} |v_{j-1/2} - v_{\Gamma} [\xi(r_{j-1/2})]| \right\} \quad (2.14)$$

$$\mu_j = \mu_{(0)} (T_j / T_{(0)})^{1.5} [(c + T_{(0)}) / (c + T_j)], \quad T_j = p_j / (R \rho_j) \quad (2.15)$$

Здесь функции n , v_{Γ} берутся из решения уравнений для скелетной системы в точках ξ , соответствующих центрам инерции газовых ячеек $r_{j-1/2}$ или узлам r_j .

Аппроксимирующие уравнения для области I_{Γ} следующие:

$$v_{\Gamma i-1/2}^{\cdot} = -\{\nabla \sigma_i + n_i p_{\mu} [r(\xi_i)] - n_{i-1} p_{\mu} [r(\xi_{i-1})]\} (\rho_{\Gamma} h_{\Gamma})^{-1} \quad (2.16)$$

$$u_{\Gamma i-1/2} = v_{\Gamma i-1/2} \quad (2.17)$$

$$\varepsilon_{*i}^{\cdot} = [v_2 \varepsilon_i^{\cdot} + c_2 \varepsilon_i - (c_1 + c_2) \varepsilon_{*i}] (v_1 + v_2)^{-1} \quad (2.18)$$

$$\varepsilon_i = -\nabla u_{\Gamma i+1/2} h_{\Gamma}^{-1}, \quad \varepsilon_0 \approx \sigma_0 (c_1 + c_2) (c_1 c_2)^{-1}, \quad \varepsilon_d = 2u_{\Gamma d-1/2} h_{\Gamma}^{-1} \quad (2.19)$$

$$\sigma_i = c_1 \varepsilon_{*i} + v_1 \varepsilon_{*i} \quad (2.20)$$

$$n_i = n^* (n^{0*} - \varepsilon_i) [n^{0*} (1 - \varepsilon_i)]^{-1} \quad (2.21)$$

Полное давление σ_x определяется в точках i

$$\sigma_{xi} = \sigma_i + n_i (p[r(\xi_i)] - p_{(0)}) \quad (2.22)$$

а число Рейнольдса — в точках $j-1/2$

$$Re_{j-1/2} = \frac{d_1 (\rho_j + \rho_{j-1})}{\mu + \mu} n [\xi(r_{j-1/2})] |v_{j-1/2} - v_{\Gamma} [\xi(r_{j-1/2})]| \quad (2.23)$$

Граничные и переходные функции исходной задачи с учетом избыточности напряжений σ над давлением $p_{(0)}$ относятся к следующим узловым

точкам, указанным в индексах: $p_a = p(t)$, $u_c = v_c = u_{\Gamma d} = v_{\Gamma d} = 0$, $p_{\mu\delta} = 0$ ($\beta_\delta \leq 0$), $p_{\mu\delta-1} = 0$ ($\beta_\delta < 0$), $\sigma_0 = (p_\Delta - p_{(0)}) (1 - n_0)$ ($\beta_\Delta > 0$), $\sigma_0 = (p_{\Delta-1} - p_{(0)}) (1 - n_0)$ ($\beta_\Delta < 0$) и вычисление $p_{\mu j}$ ведется с нижней ячейки $j = \delta - 1$ в направлении убывания j .

В уравнениях движения для переходных ячеек

$$v_{\Delta-1/2, \delta-1/2}^+ = -p_{\Delta, \delta}^+ (\rho_{(0)} h_*)^{-1}, \quad u_{\Delta-1/2, \delta-1/2}^+ = v_{\Delta-1/2, \delta-1/2}^+ \quad (2.24)$$

приращения давлений $p_{\Delta, \delta}^+$ даются соотношениями

$$\begin{aligned} p_{\Delta}^+ &= p_\Delta - p_{\Delta-1} - q_{\Delta-1} \quad (\beta_\Delta > 0) \\ p_{\Delta}^+ &= p_\Delta n [\xi(r_\Delta)] - p_{\Delta-1} n_0 - (p_{\mu\Delta} - p_{\mu\Delta-1}) n [\xi(r_{\Delta-1/2})] \quad (\beta_\Delta < 0) \\ p_{\delta}^+ &= p_\delta n_d - p_{\delta-1} n [\xi(r_{\Delta-1})] + p_{\mu\delta-1} n [\xi(r_{\delta-1/2})] \quad (\beta_\delta > 0) \\ p_{\delta}^+ &= p_\delta - p_{\delta-1} + q_\delta \quad (\beta_\delta < 0) \end{aligned}$$

Здесь учтено граничное значение $p_{\mu\delta} = 0$, а влиянием трения $p_{\mu\Delta}$ (при $\beta_\Delta > 0$) и $p_{\mu\delta-1}$ (при $\beta_\delta < 0$) в зонах $\alpha_{\Delta, \delta}$ пренебрегается. Давления $p_{\mu\Delta-1}$ ($\beta_\Delta < 0$) и $p_{\mu\delta-1}$ ($\beta_\delta > 0$) вычисляются по формуле (2.14) с корректировкой на переменную поверхность контакта переходной ячейки с капилляром, для чего при $j = \Delta, \delta$ параметр h_* умножается на соответствующий релаксационный коэффициент $\gamma_{\Delta, \delta}$:

$$\gamma_\Delta = \beta_\Delta^2 (\beta_\Delta - \alpha_\Delta)^{-2}, \quad \gamma_\delta = \beta_\delta^2 (\beta_\delta + \alpha_\delta)^{-2}$$

Давления p_j и перемещения u_j для переходных ячеек, а также $p_{\mu\Delta}$ ($\beta_\Delta < 0$), $p_{\mu\delta-1}$ ($\beta_\delta > 0$) и скорости $v_{\Delta+1/2}$ ($\beta_\Delta > 0$), $v_{\Delta-1/2}$ ($\beta_\Delta < 0$) вычисляются по общим формулам, но в последнем случае принято $q_{\Delta-1} = 0$. Плотность газа переходных ячеек определяется из условия сохранения массы

$$\begin{aligned} \rho_\Delta &= {}^{1/2} h_* \rho_{(0)} \{ \beta_\Delta + {}^{1/2} \alpha_\Delta (n_0 + n [\xi(r_\Delta)]) \}^{-1} \quad (\beta_\Delta > 0) \\ \rho_{\Delta-1} &= {}^{1/2} h_* \rho_{(0)} \{ \alpha_\Delta - {}^{1/2} \beta_\Delta (n_0 + n [\xi(r_{\Delta-1/2})]) \}^{-1} \quad (\beta_\Delta < 0) \\ \rho_\delta &= {}^{1/2} h_* \rho_{(0)} \{ \alpha_\delta + {}^{1/2} \beta_\delta (n_d + n [\xi(r_{\delta-1/2})]) \}^{-1} \quad (\beta_\delta > 0) \\ \rho_{\delta-1} &= {}^{1/2} h_* \rho_{(0)} \{ -\beta_\delta + {}^{1/2} \alpha_\delta (n_d + n [\xi(r_{\delta-1})]) \}^{-1} \quad (\beta_\delta < 0) \end{aligned}$$

причем при $t = 0$ плотность ρ_Δ и давление p_Δ уточняются по значению $\alpha_\Delta > 0$, вычисляемому по формуле (2.7) для $\beta_\Delta > 0$.

При численном решении уравнений методом Рунге — Кутты на каждом шаге времени запоминаются значения $\chi_{i-1/2}$, $X_{j-1/2}$ и с учетом (2.4) — (2.6) — таблицы $p_{\mu j}(X_j)$, $v_{\Gamma i-1/2}(\chi_{i-1/2})$, $n_i(\chi_i)$, причем условное трение $p_{\mu\Delta-1}$ ($\beta_\Delta > 0$) определяется линейной экстраполяцией по значениям $p_{\mu\Delta}(X_\Delta)$, $p_{\mu\Delta+1}(X_{\Delta+1})$. Функции $p_\mu[r(\xi_i)]$, $v_\Gamma[\xi(r_{j-1/2})]$, $n[\xi(r_j)]$ и $n[\xi(r_{j-1/2})]$ находятся линейной интерполяцией по таблицам соответственно для аргументов $X = \chi_i$, $\chi = X_{j-1/2}$, $\chi = X_j$ и $\chi = X_{j-1/2}$. Функция $p[r(\xi_i)]$ вычисляется аналогично $p_\mu[r(\xi_i)]$.

В алгоритме предусмотрена возможность включения в пористый слой зон, полностью насыщенных различными жидкостями. Для этого в область I включаются прослойки жидкостей с границами, совмещенными с узлами, помеченными полужелтыми индексами. Поведение жидкостей считается линейно-упругим при постоянном значении динамической вязкости. Параметр $\rho_{(0)} h_*$ в формуле (2.13) для $j = 1/2$, совпадающего с границей прослойки, определяется как полусумма масс газовой и жидкостной ячеек.

Учитывая наличие трех сред, шаг счета по времени определяется по формуле $\Delta t = {}^{1/3} h_* c_m^{-1}$, где c_m — наибольшая из скоростей: фронта отраженной (от твердой стенки при $t = 0$) воздушной ударной волны, звука в грунтовым скелете и звука в жидкости.

Начальные условия для уравнений, описывающих движение сред в областях I , I_Γ , 2 и переходной ячейки δ , — нулевые, а для уравнения (2.10) $p_j(0) = p_{(0)}$. Для области 0 и переходной ячейки Δ начальные условия определяются из решения задачи о точечном взрыве с использованием таблиц

[8, 17]. Эти условия соответствуют параметрам ударной волны взрыва плоского заряда BB (фронт которой при нормальном падении на грунт подошел к земной поверхности) и задаются в зависимости от высоты r_n и энергии E° взрыва (или давления p_F на фронте подошедшей ударной волны).

Для высоких взрывов, когда размер $r_{(-)}$ области O намного меньше высоты r_n , могут быть использованы параметры ударной волны сферического и цилиндрического взрывов.

Последовательность вычислений начальных условий, например с использованием таблиц [8], такова. Определяется безразмерная высота взрыва $R_n = r_n / r^\circ$, где $r^\circ = (E^\circ / p_{(0)})^{1/\nu}$ — динамическая длина, ν — показатель вида симметрии. По параметру R_n определяется время $t^\circ = t_0^\circ$ от начала взрыва и параметры на фронте ударной волны (в сформулированной выше задаче отсчет времени t ведется от момента t_0° , т. е. $t = t^\circ - t_0^\circ$). Далее по лагранжевым координатам r_j узлов области O методом итераций определяются их эйлеровы координаты $X_j = r_n \xi_j^\circ$ в момент времени t_0° по уравнению неразрывности ($t^\circ = 0$ — момент взрыва)

$$\left(\frac{r_j}{r_n}\right)^\nu = 1 - \frac{k+1}{k-1+2kp_{(0)}/(\rho_{(0)}D_n^2)} \int_{\xi_j^\circ}^1 \frac{\rho}{\rho_n} d\xi^\circ$$

Здесь D_n — скорость фронта волны, ρ_n — плотность на фронте волны при $t^\circ = t_0^\circ$, а интеграл берется численно по формуле Симпсона с использованием таблицы функции $\rho(\xi^\circ)/\rho_n$ [8], дополненных значениями, вычисляемыми по асимптотическим формулам.

По найденным величинам ξ_j° с использованием таблиц [8] путем квадратичной интерполяции фиксируются начальные значения давлений p_j . Аналогично определяются эйлеровы координаты $X_{j+1/2}$ точек $r_{j+1/2}$ и начальные значения скоростей $v_{j+1/2}$ и перемещений $u_{j+1/2} = r_n \xi_{j+1/2}^{0,1/\nu} - r_{j+1/2}$.

Функция $p(t)$ для верхней ячейки области O ($r = r_n$) определяется таким же образом для последовательного ряда моментов времени $t^\circ \geq t_0^\circ$. При расчетах на большие давления p_F начальные условия и функция $p(t)$ берутся по таблицам [17].

Программа решения задачи с процедурой выработки начальных условий и граничной функции $p(t)$ составлена на языке ПЛ/1.

3. Проведены расчеты взаимодействия с пористым (песчаным) слоем ударной волны плоского взрыва ($\nu=1$) на высоте $r_n=368$ м; BB — тротил с теплотой взрыва $Q=4,2 \cdot 10^6$ Дж/кг; удельная масса заряда $m_3=51$ кг/м² (энергия взрыва $E^\circ = m_3 Q = 2,1 \cdot 10^8$ Дж/м²). Параметры воздушной среды $P_{(0)}=10^5$ Па; $\rho_{(0)}=1,22$ кг/м³; $k=1,4$; значения параметров R , $\mu_{(0)}$, $T_{(0)}$, c в формулах (1.9) приведены выше.

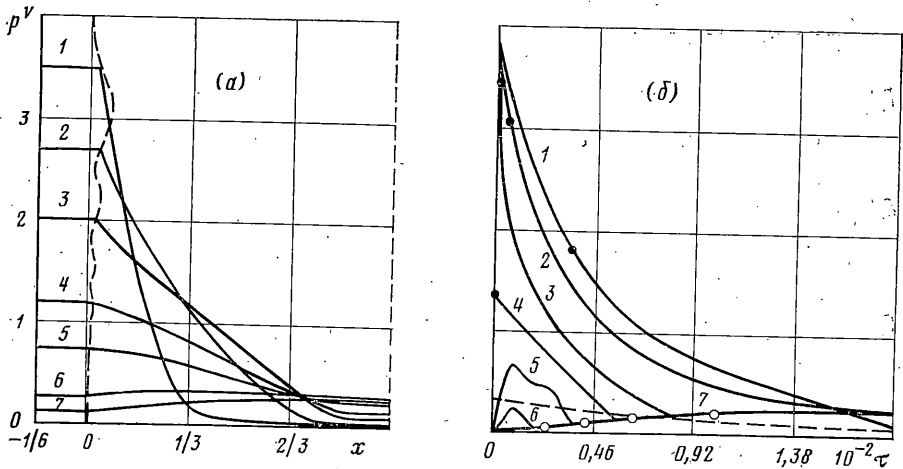
Избыточное давление на фронте ударной волны, подошедшей к грунту, $\Delta p_F = p_F - p_{(0)} = 2,94 \cdot 10^5$ Па. Высота области O принята $r_{(-)} = -245,6$ м (при $t=0$ эйлерова координата границы области O составляет $X = -139$ м). Область O разбита на 50 ячеек (20 — с высотой $h_* = 0,2$ м и 30 — с переменной высотой согласно (2.2) при $a_1 = 0,1$ м, $a_2 = 0,02$ м).

Параметры грунта (плотный песок): $\rho_T = 1,67 \cdot 10^3$ кг/м³, $n^* = 0,5$, $n^* = 0,4$, $c_1 = 1,04 \cdot 10^8$ Па, $c_2 = 2,25 \cdot 10^7$ Па, $\tau_1 = 0,35$ мс, $\tau_2 = 3,26$ мс [16].

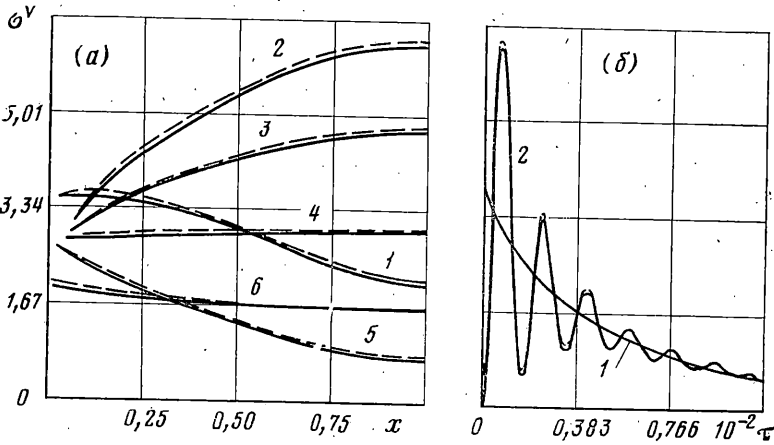
В расчетах варьировались коэффициенты k_0 , k_T и геометрия. Ламинарная проницаемость k_0 — параметр геометрии пористой среды. По данным [11], для грунтов k_0 определяется по формуле, отражающей влияние общей (n^*) и открытой (n^*) пористости, текстуры d_1 , структуры c_T и формы k_T зерен

$$k_0 = d_1^2 f_1(n^*, n^*) f, \quad f_1 = (n^*)^3 (1 - n^*)^{-2}, \quad f = f_2(k_T) f_3(c_T)$$

Здесь $f_2(k_T)$ — коэффициент формы зерен (изменяющийся в пределах $1/60 - 1/110$, а для однородных сферических частиц $1/80$); $f_3(c_T) \sim 0,4$ — коэффициент извилистости, выражающий отношение кратчайшего расстояния в направлении потока к длине извилистого пути через поры. Для однородных сферических частиц в зависимости от плотности упаковки предельные значения пористости по Слехтеру [1] $n^* = 0,259 - 0,476$, т. е. $10^4 k_0 d_1^{-2} \sim 1,58 - 19,6$ (d_1 — для зернистой среды эффективный диаметр частицы).



Фиг. 3.



Фиг. 4

Аналогичные данные для шариков приведены в [14] $10^4 k_0 d_1^{-2} = 6,15$. Сравнение показывает, что последнее значение k_0 соответствует $n^* = 0,37$, т. е. упаковке (фиктивного грунта [1]) с углом граней ромбоэдра 68° (минимально возможное значение угла 60°).

Принимая значение для f_2 , близкое к среднему, получим для песчаных грунтов с пористостью $n^* = 0,4$ ($n^* = 0,6$) проницаемости: для песка с $d_1 = 0,1$ см величина $k_0 \sim 10^{-5}$ см² и для $d_1 = 0,05$ см величина $k_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ см².

Данных о коэффициенте k_T для грунтов в литературе весьма мало. Из опытов по фильтрации воздуха через слой свинцовых и стальных шариков $d = 0,14$ см ($n \sim 0,36$) при 20°C и различных значениях числа Рейнольдса $Re < 10^3$ получено [2] $k_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ см², $k_T = 10$ см, однако для искусственно спемментированного песка при $Re < 10-50$ значения этих коэффициентов почти на два порядка меньше.

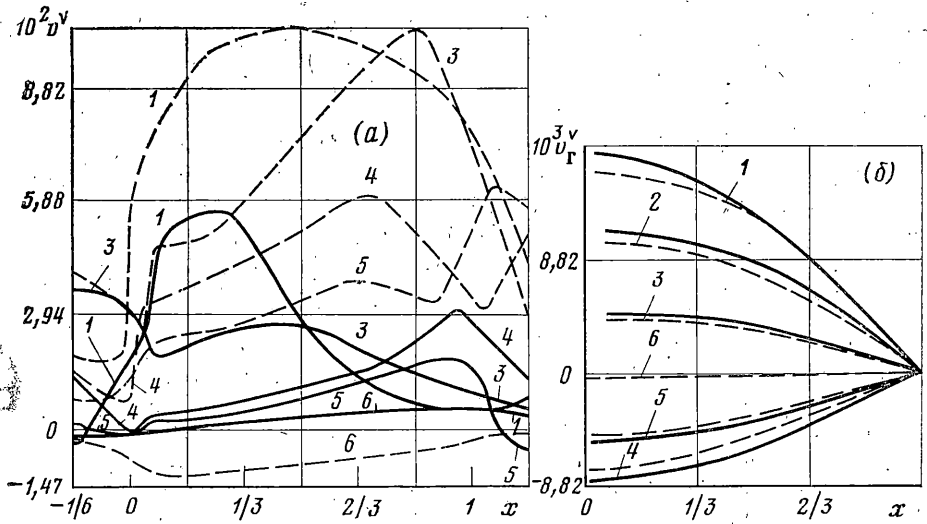
В проведенных четырех вариантах N расчета использовались следующие значения коэффициентов и параметра d_1 в формуле (2.23):

№	1	2,4	3
d_1 , см	0,05	0,1	0,1
$10^5 k_0$, см ²	0,2	1	1
$10^{-6} k_T/k_0$, см ⁻¹	1	1	100

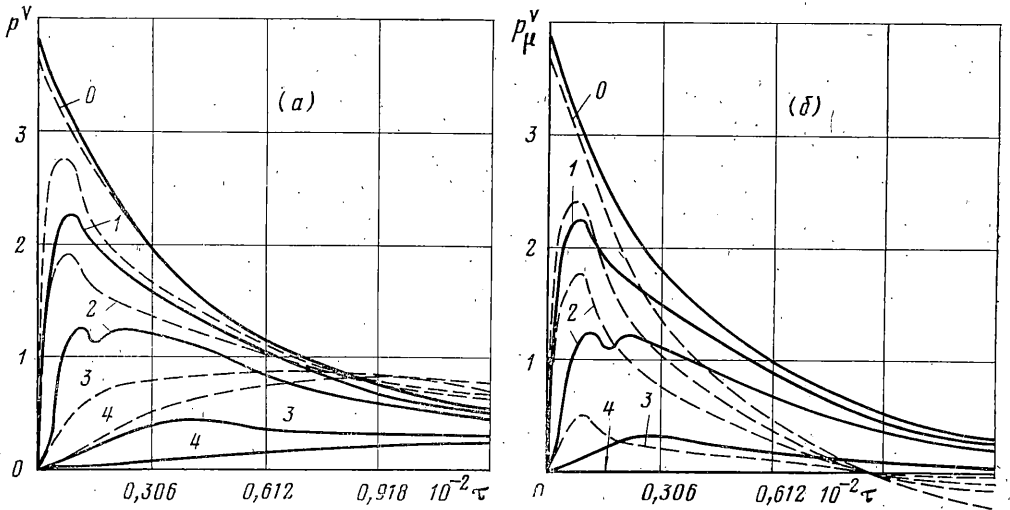
В вариантах 1-3 толщина пористого слоя $r_{(*)} = 1,5$ м (10 ячеек, $h_T = 0,15$ м), высота воздушной камеры $r_{(+)} - r_{(*)} = 2$ м. В варианте 4 $r_{(*)} = 5$ м (25 ячеек, $h_T = 0,2$ м).

Во всех вариантах получено хорошее согласие максимума давления отражения с точным давлением при отражении ударной волны от твердой стенки, т. е. пористость среды на указанный параметр влияет слабо.

На фиг. 3, а для варианта 1 кривыми 1-7 показано распределение давлений $p^v = (p - p_{(0)}) / \Delta p_F$ по координате $x = X/r_{(*)}$ в моменты времени $\tau = t/\tau_2 = 3,06; 15,3;$



Фиг. 5

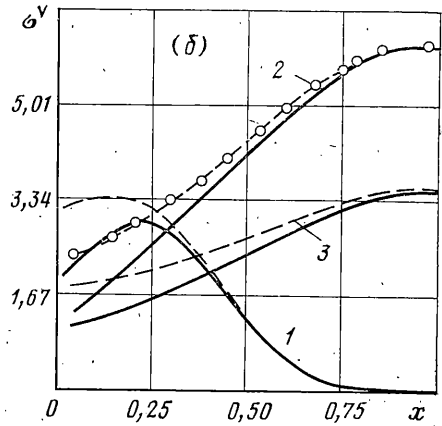
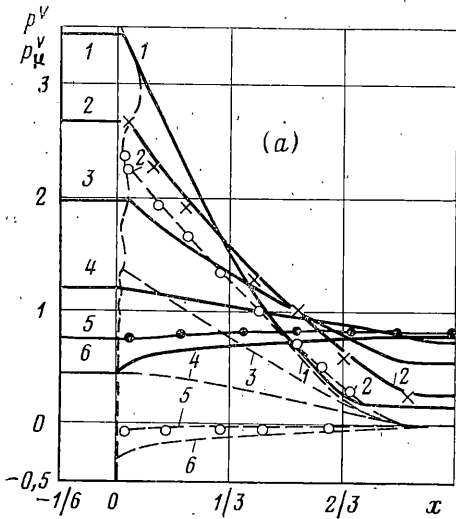


Фиг. 6

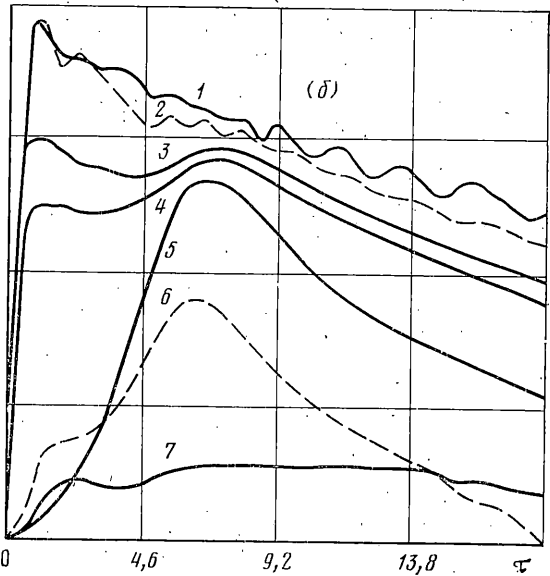
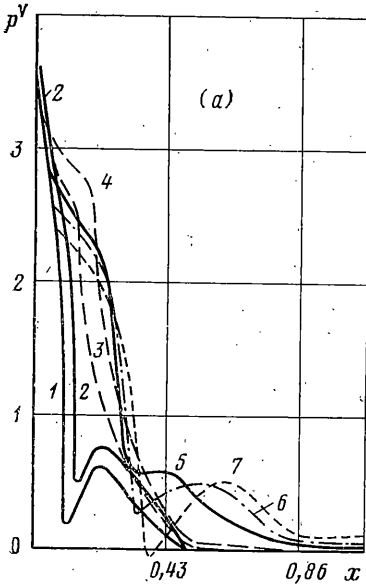
30,6; 61,2; 92; 159; 184; штриховыми линиями показаны границы пористого слоя. На фиг. 3, б дано изменение давлений во времени $p^v(\tau)$ в семи узлах лагранжевой сетки $r^v = r/r_{(*)} = -0,667; -0,4; -0,133; 0; 0,333; 0,667; 1,0$ (кривые 1-7); штриховая линия соответствует давлению на границе области 0 ($r^v = -164$). Темные точки на кривых соответствуют моментам времени перехода частицы из области 0 в область 1 (т. е. в поровый канал), а светлые — в область 2 (в камеру). Перед выходом частиц газа в камеру давлений в них становятся близкими к давлению в камере (по кривой 7).

Приводится сравнение полученных решений с расчетами, проведенными без учета фильтрации газа в грунт по программе [16]. На фиг. 4, а показано изменение напряжений в грунте $\sigma^v = \sigma_z / \Delta p_F$ по координате x при $\tau = 3,06; 7,35; 10,4; 12,3; 15,4; 30,6$ (кривые 1-6); штриховые линии соответствуют решению с учетом фильтрации газа, а сплошные — без учета, согласно [16], причем в последнем случае при расчетах в качестве граничного давления использована таблица значений давления в отраженной волне у земной поверхности $p_{\Delta-1}(t)$, взятая из решения с учетом фильтрации и показанная кривой 1 на фиг. 4, б. Там же кривыми 2 дано сравнение в изменениях давлений на нижней границе пористого слоя $r^v = 1$.

Сравнение показывает, что средние напряжения в пористом слое находятся в хорошем соответствии с напряжениями, вычисленными без учета эффектов фильтрации газа.



Фиг. 7

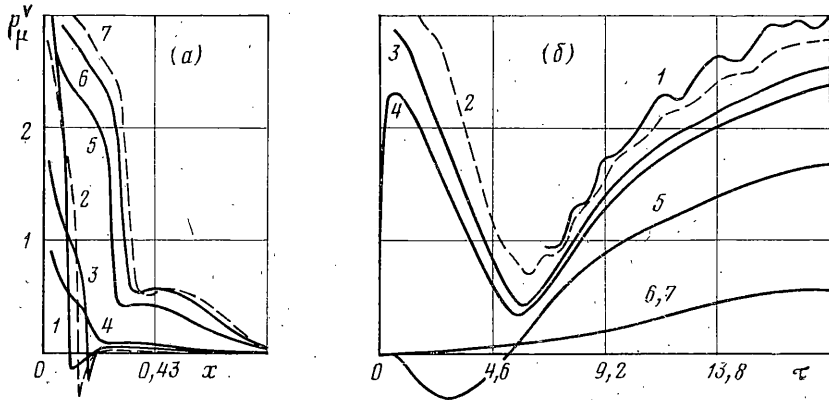


Фиг. 8

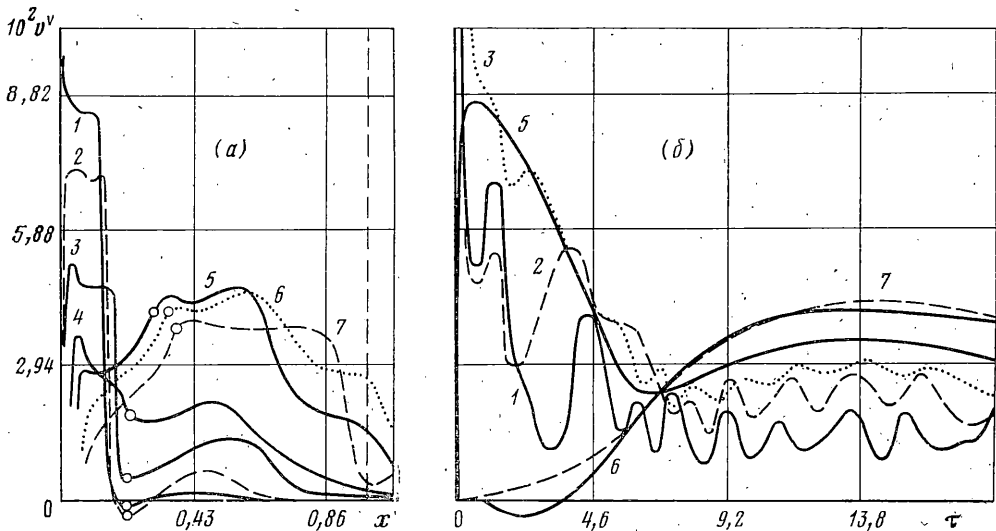
Влияние параметра k_0 существенно для движений газа в открытых поровых каналах; на фиг. 5, а кривыми 1-6 показано распределение по x скоростей $v \sim = v/v_-$ ($v_- = [k p(0)/\rho(0)]^{1/2}$) при $\tau = 3,06; 6,12; 7,35; 15,4; 30,6; 122,4$ и при $k_0 = 0,2 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2$ (сплошные линии, вар. 1) и $k_0 = 10^{-3} \text{ см}^2$ (штриховые, вар. 2). С увеличением проницаемости на полорядка фильтрационная скорость на ранних стадиях возрастает в несколько раз, а при $\tau > 100$ происходит изменение направления движения газа в каналах во всем слое. Распределения скоростей частиц грунта $v_{\Gamma} \sim = v_{\Gamma}/v_-$ при указанном изменении k_0 (фиг. 5, б) отличается слабо.

На фиг. 6 для тех же вариантов даны изменения во времени давлений газа в грунте $p \sim$ (а) и $p_{\mu} \sim$ (б) в точках с безразмерными эйлеровыми координатами $x = 0,167; 0,333; 0,667; 1,0$ (кривые 1-4), причем кривые 0 соответствуют давлениям на верхней границе пористого слоя ($r=0$) для вар. 1 (сплошные) и вар. 2 (штриховые). Увеличение k_0 приводит к росту давлений p , особенно заметному для больших глубин. При этом превышение p_{μ} имеет место в начальной фазе фильтрации $\tau < 30$, а затем давление p_{μ} в вар. 2 с повышением k_0 становится значительно ниже, чем в вар. 1.

Распределение давлений $p \sim$ (сплошные линии) и $p_{\mu} \sim$ (штриховые линии) вдоль x для $\tau = 3,06; 15,3; 30,6; 61,2; 91,8; 122,4$ (кривые 1-6) иллюстрируется на фиг. 7, а



Фиг. 9



Фиг. 10

для вар. 2. Видно, что различие в градиентах давлений p и p_μ , соответствующее согласно (1.8) влиянию инерционных эффектов при фильтрации газа, невелико.

Для оценки вклада квадратичного члена в (1.8) проведен расчет по вар. 3 с повышенным в сравнении с вар. 2 на два порядка параметром k_T . Результаты для моментов времени $\tau=15,3$ и $91,8$, показанные точками на фиг. 7, а, свидетельствуют о слабом влиянии турбулентной проницаемости на распределение давлений.

Расчет по вар. 4 для пористого слоя толщиной 5 м, $r_{(*)}=5,6$ м проведен с целью выяснения соотношения распределений полных давлений σ_z в грунте с учетом давления газа в поровых каналах (штриховые линии) и напряжений σ в скелетной системе (сплошные линии). Как видно из графиков фиг. 7, б для времен $\tau=6,12; 21,4$ и $34,3$ (кривые 1-3), различие в указанных напряжениях, соответствующее давлению газа $n(p-p_{(0)})$, убывает с глубиной. Однако давление σ_z находится в хорошем согласии с решением, полученным по программе [16] без учета фильтрационных процессов независимо от координаты x (точки на фиг. 7, б для $\tau=21,4$).

4. Для проверки влияния на волновые процессы в грунте водонасыщения проведен расчет взаимодействия воздушной ударной волны со слоем грунта толщиной $r_{(*)}=3,5$ м ($r_{(+)}=4,1$ м), в котором открытое поровое пространство частично заполнено водой. Лагранжевы координаты жидкой прослойки (толщиной 1 м) $r^*=0,214$ и $0,5$; $h_T=0,175$ м, $h_*=0,2$ м. В остальном параметры задачи соответствуют варианту 4.

При наличии жидких прослоек для вычисления давлений в узловых точках жидких ячеек вместо (2.10) используется уравнение $p_j = G \rho_{(g)} \rho_j \cdot \rho_j^{-2}$, соответствующее линейно-упругой среде с модулем объемного сжатия G и начальной плотностью $\rho_{(g)}$. Кроме того, в (2.14) берется постоянное значение вязкости жидкости $\mu = \mu_{(g)}$.

В расчете принято: $\rho_{(g)}=1,02 \cdot 10^3$ кг/м³, $G=2,16 \cdot 10^9$ Па, $\mu_{(g)}=1,08 \cdot 10^3$ Па·с. Проницаемости в зоне жидкой прослойки $k_0=9 \cdot 10^{-5}$ см², $k_T/k_0=10^6$ см⁻¹ приняты близкими к таковым для зоны газа.

На фиг. 8, а — 10, а показаны распределения давлений p' , p'' и скоростей v' по координате x в моменты времени $\tau=1,23; 2,46; 4,30; 6,15; 13,5; 16,5; 19,6$ (кривые 1—7), а на фиг. 8, б — 10, б — изменения этих параметров во времени в точках $x'=-0,286; -0,171; -0,057; 0; 0,143; 0,286; 0,429$. Давления p'' на фиг. 9 появляются при пересечении частицы газа с поверхностью грунта. Светлые точки на фиг. 10, а соответствуют верхней границе жидкой зоны.

Из фигур видно, что в результате торможения газовых частиц и отражения от жидкой прослойки движение газа в верхней части порового пространства носит колебательный характер при резком уменьшении сопротивления фильтрации и градиента p' . Это вызывает увеличение влияния сил инерции в жидкой зоне, причем ускорения жидких частиц (достигающие 70 (единиц g)) почти полностью компенсируются градиентом давлений p' . При $\tau > 6,2$ скорость фильтрации жидкости и сопротивление p'' возрастают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Подземная гидрогазодинамика. Собр. тр. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1953. 544 с.
2. Требин Г. Ф. Фильтрация жидкостей и газов в пористых средах. М.: Гостоптехиздат, 1959. 157 с.
3. Баренблатт Г. И., Енгов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 286 с.
4. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 335 с.
5. Каракин А. В., Лобковский Л. И. Механика пористой двухфазной вязкодеформируемой среды и некоторые геофизические приложения. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1979, № 6, с. 53—63.
6. Адушкин В. В., Каазик П. Б. Расчет выхода газообразных продуктов подземного взрыва в атмосферу. — ПМТФ, 1976, № 1, с. 111—120.
7. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1967. 528 с.
8. Коробейников В. П., Чушкин П. И., Шароватова К. В. Газодинамические функции точечного взрыва. М.: ВЦ АН СССР, 1969. 48 с.
9. Рихтмайер Р., Морган К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. 418 с.
10. Dupuit J. Memoire sur le mouvement de l'eau a travers les terrains perméables. Paris, 1857.
11. Бар Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. М.: Мир, 1971. 452 с.
12. Фабрикант Н. Я. Аэродинамика. М.: Наука, 1964. 814 с.
13. Гинзбург И. П. Теория сопротивления и теплопередачи. Л.: Изд-во ЛГУ, 1970. 375 с.
14. Дейли Д., Харлеман Д. Механика жидкости. М.: Энергия, 1971. 480 с.
15. Котляревский В. А., Румянцева Р. А., Шишкин А. И. Волны в мягком грунте как упруговязкой среде. — Физика горения и взрыва, 1977, № 2, с. 229—238.
16. Котляревский В. А., Майорова Е. Г., Шишкин А. И. Волны напряжений в грунтах при наличии кавитационных эффектов. — ПМТФ, 1978, № 2, с. 95—104.
17. Коробейников В. П., Чушкин П. И., Шароватова К. В. Таблицы газодинамических функций начальной стадии точечного взрыва. М.: ВЦ АН СССР, 1963. 59 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.II.1981

УДК 539.3

ОБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ БАЛОК В ПРОЦЕССЕ ДВИЖЕНИЯ

БРОВМАН М. Я.

Решению задач об упругопластическом изгибе балок посвящено большое число работ, часть результатов и соответствующие ссылки можно найти, например, в [1—3].

В практических задачах часто рассматривают изгиб балки, совершающей в процессе деформации движение вдоль своей оси при постоянных внешних нагрузках. Такие процессы деформации применяют при правке и вальцовке заготовок в роликовых машинах.

В публикуемой работе рассмотрена задача об упругопластическом изгибе балок, совершающих поступательное движение вдоль своей оси. Принимаются условия линейного распределения деформации по толщине балки и модель идеальной упругопластической среды. Приводятся результаты экспериментального исследования.

1. В процессе движения балки, нагруженной постоянными силами, каждый ее