

УДК 531.383

УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ
ДВУХСТЕПЕННЫХ СИЛОВЫХ ГИРОСКОПОВ
С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ОСЯМИ ПРЕЦЕССИИ

ВАСИЛЬЕВ В. Н.

В электромеханических системах управления ориентацией долговременных орбитальных станций наряду с двигателями-маховиками могут применяться двухстепенные силовые гироскопы-гиродины [1-3]. Возникает задача управления гиродинами [2]. Предлагается алгоритм управления гиродинами, у которых оси прецессии параллельны. Исследуются свойства системы гиродинов как исполнительного органа системы управления.

1. Рассмотрим систему n одинаковых гиродинов с произвольно ориентированными осями прецессии. Вектор управляющего момента, создаваемый такой системой относительно инерциальной системы координат, вычисляется по формуле

$$\mathbf{M} = -G \sum_{j=1}^n \lambda_j \times \mathbf{g}_j$$

или в матричной форме

$$\mathbf{m} = B\lambda \quad (1.1)$$

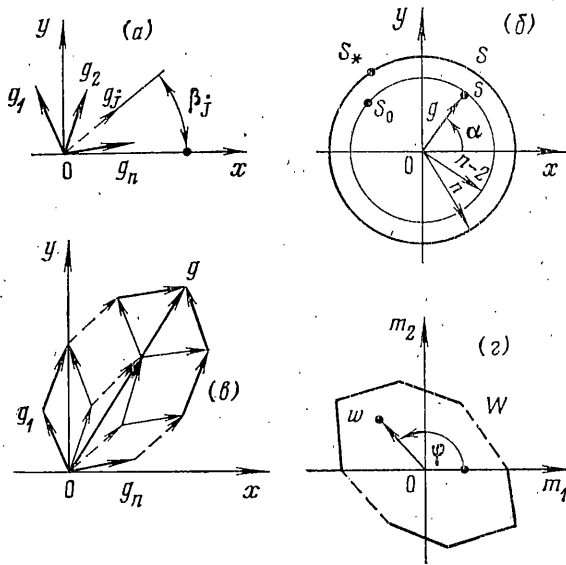
где \mathbf{m} , λ — матрицы-столбцы, B — $(3 \times n)$ -матрица, элементы которой зависят от углов прецессии гиродинов β_j , λ_j — скорость прецессии j -го гиродина, m_1, m_2, m_3 — компоненты вектора управляющего момента, отнесенные к кинетическому моменту одного гиродина G , \mathbf{g}_j — единичный вектор, направленный по вектору кинетического момента j -го гиродина.

Полагаем, что вектор управления станцией $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ определен. Вектор управляющего момента системы гиродинов является функцией углов и скоростей прецессии $\mathbf{m} = \mathbf{m}(\beta_j, \lambda_j)$. Задача управления гиродинами заключается в нахождении скоростей прецессии, обеспечивающих выполнение равенства $\mathbf{m}(\beta_j, \lambda_j) = \mathbf{u}$. Заменяя в соотношении (1.1) матрицу \mathbf{m} на (3×1) -матрицу \mathbf{u} , элементами которой являются компоненты вектора управления \mathbf{u} , получим систему трех уравнений (назовем их уравнениями моментов) для определения неизвестных скоростей прецессии

$$B\lambda = \mathbf{u} \quad (1.2)$$

Если число гиродинов больше трех, то число неизвестных скоростей прецессии превышает число уравнений. Такая система может быть решена многими способами. Однако нужно учитывать, что в результате движения гиродинов матрица B непрерывно меняется и в некоторый момент времени система уравнений (1.2) может оказаться несовместной. Один из способов определения скоростей прецессии состоит в том, что уравнения (1.2) заменяются системой уравнений вида

$$B_1 l_1 = p_1, \quad B_2 l_2 = p_2, \dots, B_q l_q = p_q \quad (1.3)$$



Фиг. 1

такой, что ее решение является решением уравнений (1.2). Система (1.3) должна удовлетворять условиям

$$\sum_{v=1}^q B_v l_v = B \lambda, \quad \sum_{v=1}^q P_v = u$$

В этом случае задача управления гиродинами сводится, во-первых, к распределению вектора управления между q группами гиродинов, во-вторых, к нахождению скорости прецессии каждого гиродина v -й группы. Минимальное число гиродинов в группе равно двум.

Объединение гиродинов в группы и распределение функций управления между ними целесообразно производить таким образом, чтобы система уравнений оставалась совместной при изменении взаимного положения гиродинов. Каждый гиродин может входить в состав нескольких групп или одной группы. В последнем случае система уравнений (1.3) распадается на независимые подсистемы, а группы гиродинов могут рассматриваться как автономные исполнительные органы.

2. Одна из типовых групп — система гиродинов с параллельными осями прецессии — представляет собой автономный исполнительный орган, создающий управляющие моменты относительно двух осей станции. Две или три такие системы, расположенные на станции соответствующим образом, могут обеспечить управление ее угловым положением.

Пусть оси прецессии n одинаковых гиродинов параллельны оси Oz , единичные векторы g_j приведены в начало координат O , а кинетический момент гиродинов условно равен единице. Полагаем, что диапазон изменения углов прецессии не ограничен, углы прецессии отсчитываются от оси Ox и в текущий момент времени удовлетворяют условию $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_n$ (фиг. 1, а). Для характеристики управляющих свойств системы гиродинов используем область S вариации кинетического момента и область W изменения вектора управляющего момента [2, 3].

Область S представляет собой круг радиуса n (фиг. 1, б). Каждому вектору кинетического момента исследуемой системы $g = \sum g_j$ соответствует точка $s \in S$ с координатами

$$x = \sum_{j=1}^n x_j, \quad y = \sum_{j=1}^n y_j, \quad x_j = \cos \beta_j, \quad y_j = \sin \beta_j$$

Суммируя векторы \mathbf{g}_j , начиная с \mathbf{g}_1 , в порядке убывания углов β_j и, начиная с \mathbf{g}_n , в порядке возрастания углов β_j , получим две выпуклые ломаные линии — верхнюю и нижнюю, общей замыкающей которых является вектор \mathbf{g} . Они образуют симметричный относительно центра векторный $2n$ -угольник. Последний ограничен замкнутой ломаной линией, содержащей внутри себя все ломаные линии, полученные суммированием векторов \mathbf{g}_j в произвольном порядке (фиг. 1, ϵ).

Можно показать, что при наличии ограничения на величину скорости прецессии $|\lambda_j| \leq \lambda_*$ область W имеет форму $2n$ -угольника, подобного (с коэффициентом подобия λ_*) векторному $2n$ -угольнику, построенному на векторе \mathbf{g} , и повернутого относительно него на угол $1/2\pi$ (фиг. 1, ϵ). Каждому вектору управляющего момента

$$\mathbf{m} = - \sum_{j=1}^n \lambda_j \times \mathbf{g}_j$$

соответствует точка $w \in W$ с координатами

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -y_1 \dots -y_j \dots -y_n \\ x_1 \dots x_j \dots x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Площадь области W характеризует среднюю по всем направлениям величину управляющего момента. Она зависит не только от результирующего вектора кинетического момента, но и от взаимного положения гироидинов. Площадь области W будет минимальной (область W вырождается в отрезок прямой), если векторы \mathbf{g}_j коллинеарны. Коллинеарное состояние векторов \mathbf{g}_j будем называть особой ситуацией в расположении гироидинов. Каждой особой ситуации внутри области S соответствует особая точка s_0 [4]. Особые точки располагаются на окружностях радиуса $g=1, 3, \dots, n-2$, если число гироидинов нечетное, и на окружностях радиуса $g=2, 4, \dots, n-2$, если число гироидинов четное. В последнем случае особой точкой является и точка O (фиг. 1, δ). В особых ситуациях система гироидинов не может реализовать вектор управления произвольного направления, а область W из плоской фигуры вырождается в отрезок, перпендикулярный вектору \mathbf{g} (вырожденная область W). Особые ситуации, которым соответствуют точки s_* на границе области S , представляют собой состояния насыщения, при которых все векторы \mathbf{g}_j совпадают по направлению.

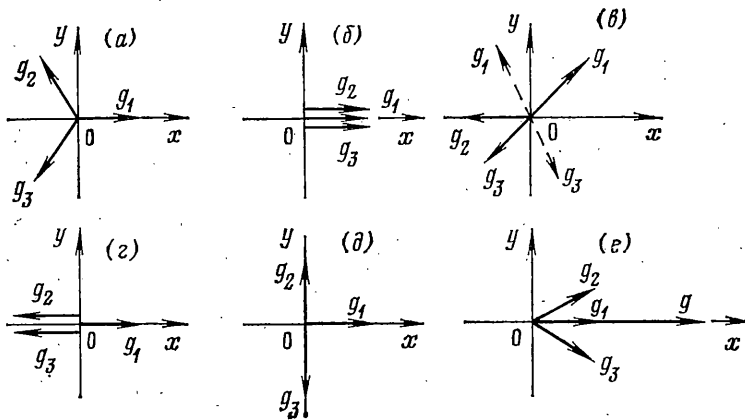
Между областями W и S существует соответствие, в силу которого каждой области W , заданной совокупностью углов прецессии β_j , соответствует одна точка s внутри или на границе области S . Обратное утверждение в общем случае ($n \geq 3$) неверно, т. е. каждой точке s , кроме s_* , соответствует некоторое множество областей W . Неособой точке s соответствуют невырожденные области W , особой точке s_0 — одна вырожденная и множество невырожденных областей W , особой точке s_* на границе области S — одна вырожденная область W , особой точке O (при $n > 3$) — множество невырожденных и вырожденных областей W . Следовательно, не меняя результирующий вектор кинетического момента \mathbf{g} , можно регулировать взаимное положение гироидинов так, чтобы особые ситуации в их расположении не возникали.

3. Уравнения моментов (1.2) для определения скоростей прецессии системы гироидинов с параллельными осями прецессии примут вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \dots y_j \dots y_n \\ x_1 \dots x_j \dots x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

В системе двух гироидинов ($n=2$) уравнения моментов $y_1\lambda_1 + y_2\lambda_2 = -u_1$, $x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 = -u_2$ имеют решение

$$\lambda_1 = \frac{x_2 u_1 + y_2 u_2}{y_1 x_2 - x_1 y_2} \quad \lambda_2 = \frac{x_1 u_1 + y_1 u_2}{y_1 x_2 - x_1 y_2}$$



Фиг. 2

В особых ситуациях, когда векторы g_1 и g_2 противоположны, определитель системы уравнений равен нулю и гиросины не могут реализовать вектор управления произвольного направления. Увеличивая число гиросинов в системе, вероятность возникновения особых ситуаций можно уменьшить.

Рассмотрим систему трех гиросинов. При $n=3$ уравнения моментов (3.1) примут вид

$$y_1\lambda_1 + y_2\lambda_2 + y_3\lambda_3 = u_1, \quad x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + x_3\lambda_3 = -u_2 \quad (3.2)$$

Для однозначного определения скоростей прецессии уравнения (3.2) должны быть дополнены третьим уравнением или некоторым условием оптимальности.

Особенность системы трех гиросинов состоит в том, что один и тот же вектор кинетического момента системы может быть получен при различных положениях векторов g_i относительно друг друга. Исключение составляют два случая: кинетический момент равен нулю — углы между векторами g_1, g_2, g_3 составляют $2/3\pi$ (фиг. 2, а); кинетический момент равен предельному значению $g=3$ (точки s_*) — углы между векторами равны нулю (фиг. 2, б). В точках s_0 один из векторов g_i совпадает с вектором кинетического момента системы гиросинов g , а два других противоположны и составляют произвольный угол с первым (фиг. 2, в). В частности, если линия действия этих векторов совмещается с первым вектором, этот угол равен π , и возникает особая ситуация (фиг. 2, з). В особых ситуациях при ограниченной скорости прецессии нельзя мгновенно изменить взаимное положение гиросинов и создать управляющий момент вдоль вектора кинетического момента системы гиросинов. Поэтому дополнительное условие к уравнениям моментов должно регулировать взаимное положение так, чтобы особые ситуации не возникали.

Взаимное положение гиросинов в точке $s \in S$, заданной вектором g , будем считать оптимальным, если оно обеспечивает максимальную в этой точке площадь области W . Последнее условие выполняется, если векторы g_i занимают симметричное положение, при котором один из них (средний) совпадает с вектором g (фиг. 2, е). Углы прецессии симметрично расположенных гиросинов обращают в нуль одну из трех функций:

$$f_1 = g_1 \cdot g_2 - g_1 \cdot g_3, \quad f_2 = g_2 \cdot g_3 - g_1 \cdot g_2, \quad f_3 = g_1 \cdot g_3 - g_2 \cdot g_3$$

в зависимости от того, какой гиросин является средним.

Пусть g_k — средний вектор. Если рассматривать отличие функции f_k от нуля как отклонение системы гиросинов от симметричного положения, уравнения моментов (3.2) можно дополнить уравнением регулирования взаимного положения гиросинов $\tau(\lambda_{k-1} + \lambda_{k+1}) = f_k$, где τ — постоянная вре-

мени, а нумерация гироудинов принята циклической. Поскольку средним вектором g_k может быть любой из векторов g_j , уравнение регулирования можно представить в виде

$$\begin{aligned} \kappa_1 \lambda_1 + \kappa_2 \lambda_2 + \kappa_3 \lambda_3 &= f \\ f &= \tau^{-1} [(1 - \kappa_1) f_1 + (1 - \kappa_2) f_2 + (1 - \kappa_3) f_3] \end{aligned}$$

Параметры κ_j принимают значение 1 или 0 в зависимости от того, какой из векторов g_j является средним и составляет наименьший угол с вектором g : если $g_j = g_k$, то $\kappa_k = 0$, $\kappa_{k-1} = \kappa_{k+1} = 1$. Для определения среднего вектора g_k можно использовать функции f_j : вектор g_k является средним, если $f_{k+1} < 0$, $f_{k-1} > 0$. Следовательно, $\kappa_1 = 0$, если $f_2 < 0$, $f_3 > 0$; $\kappa_2 = 0$, если $f_3 < 0$, $f_1 > 0$; $\kappa_3 = 0$, если $f_1 < 0$, $f_2 > 0$; в остальных случаях $\kappa_j = 1$.

С учетом уравнения регулирования взаимного положения гироудинов система уравнений для определения искомых скоростей прецессии примет вид

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 \\ -u_2 \\ f \end{vmatrix}$$

Скорости прецессии вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{\Delta} [f(g_3 \times g_2)h - \kappa_2(g_3 \cdot u) + \kappa_3(g_2 \cdot u)] \\ \lambda_2 &= \frac{1}{\Delta} [f(g_1 \times g_3)h - \kappa_3(g_1 \cdot u) + \kappa_1(g_3 \cdot u)] \\ \lambda_3 &= \frac{1}{\Delta} [f(g_2 \times g_1)h - \kappa_1(g_2 \cdot u) + \kappa_2(g_1 \cdot u)] \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\Delta = [\kappa_1(g_3 \times g_2) + \kappa_2(g_1 \times g_3) + \kappa_3(g_2 \times g_1)]h$$

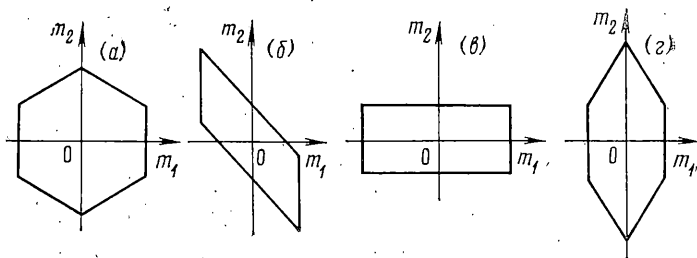
где h — единичный вектор, направленный по оси прецессии гироудинов.

Управляющий момент m системы гироудинов с регулированием взаимного положения зависит не только от величины кинетического момента g , но и от предыстории движения, т. е. от времени, в течение которого кинетический момент создавался. Общей характеристикой системы гироудинов как исполнительного органа может служить зависимость $m = m(g, t)$, где t — время, за которое достигается заданное значение кинетического момента (оно зависит от постоянной времени τ). Управляющий момент, создаваемый гироудинами в точке $s \in S$, определенной времени τ . Управляющий момент, создаваемый гироудинами в произвольном направлении, заданном вектором g (φ), является функцией четырех переменных $m = m(\varphi, g, \alpha, \tau)$. В пространстве параметров φ, g, α эта функция представляет собой совокупность поверхностей, наглядное представление о которых дают сечения.

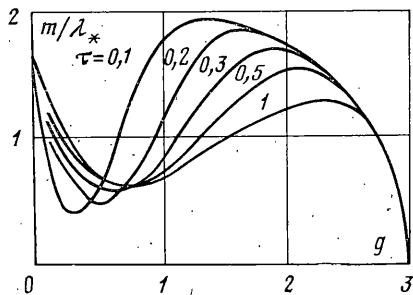
Каждой точке (g, α) в текущий момент времени могут быть поставлены в соответствие точки $w \in W$, определенные полярными координатами m, φ . Область W системы трех гироудинов в общем случае представляет собой шестиугольник. Формы области W при различных положениях векторов g_j (фиг. 2, а, в, д, е) изображены на фиг. 3.

Каждому направлению $g(\varphi)$, проведенному из точки s , может быть поставлена в соответствие зависимость $m(g, \tau)$, которую будем называть моментной характеристикой. Она характеризует изменение протяженности области W вдоль траектории изменения вектора кинетического момента.

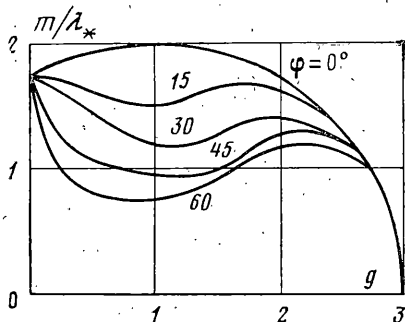
Пусть вектор g задан в точке $O \in S$, а модуль кинетического момента изменяется от 0 до 3. Направления, совпадающие с векторами g_j , являются благоприятными для создания управляющего момента, поскольку при всех значениях g выполняется условие симметричного расположения гироудинов. Моментная характеристика для этих направлений не зависит от τ : $m(g) = \lambda_* [4 - (g-1)^2]^{1/2}$, где λ_* — максимальная скорость прецессии гироудинов. Для всех других направлений, особенно для $g = -g_j$, моментная характеристика зависит от τ . Семейство моментных характеристик для $g = -g_j$ и $\lambda_* = 0,2$ рад/с изображено на фиг. 4.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

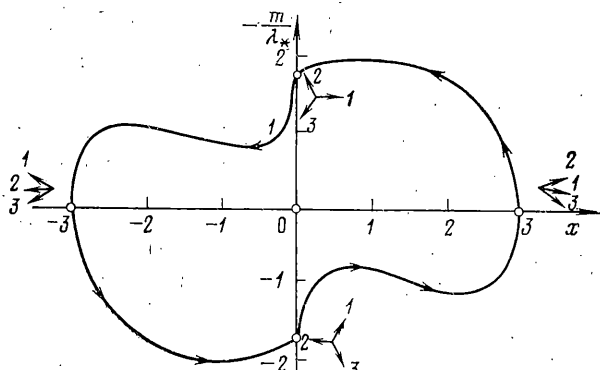
Скорости прецессии гироскопов, вычисленные по формулам (3.3), содержат две составляющие, одна из которых определяет долю гироскопа в создании управляющего момента, другая — регулирует взаимное положение. Соотношение между ними определяется параметром τ . При $\tau \rightarrow \infty$ превалирует задача создания управляющего момента, при $\tau \rightarrow 0$ — задача регулирования взаимного положения. В первом случае взаимное положение не регулируется и особые ситуации могут возникать на окружности единичного радиуса области S , во втором — управляющий момент не создается до тех пор, пока гироскопы не займут симметричное положение.

Особенностью моментных характеристик в направлении $\mathbf{r} = -\mathbf{g}$ является наличие «провалов» при $g < 1$. При $\mathbf{r} \neq -\mathbf{g}$ величина провалов уменьшается, при $\mathbf{r} = \mathbf{g}$ провалы отсутствуют. С увеличением числа гироскопов в системе влияние провалов уменьшается. Моментные характеристики системы трех гироскопов в различных направлениях ($\varphi = 0, 15, 30, 45, 60^\circ$) при $\tau = 1$ с изображены на фиг. 5.

Рассмотрим изменение кинетического момента системы гироскопов вдоль оси Ox . Если кинетический момент изменяется в направлении $\mathbf{r} = -\mathbf{g}$ от нуля до границы области S ($x = -3$) и обратно, то система гироскопов оказывается повернутой на угол $1/3\pi$ относительно своего исходного положения, изображенного на фиг. 2, а. Характер изменения управляющего момента системы трех гироскопов при изменении кинетического момента вдоль оси Ox иллюстрирует фиг. 6. Направления изменения кинетического момента указаны стрелками.

Управляющий момент системы зависит не только от кинетического момента, но и от знака его производной. Это обстоятельство является отражением того факта, что управляющий момент системы гироскопов зависит от предыстории движения.

Таким образом, предлагаемый алгоритм управления системой трех гироскопов обеспечивает изменение кинетического момента от нуля до границы области S в произвольном направлении, при этом особые ситуации в расположении гироскопов не возникают. Для сравнения укажем, что применение в качестве критерия оптимальности условия, минимизирующего сумму квадратов скоростей прецессии $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \min$, всегда приводит



Фиг. 6

к возникновению особых ситуаций при изменении кинетического момента в направлении $\mathbf{r} = -\mathbf{g}_j$.

В заключение следует отметить, что принцип регулирования взаимного положения трех гиродинов можно распространить на систему с произвольным числом гиродинов. Взаимное положение векторов \mathbf{g}_j регулируется так, чтобы углы между смежными векторами были одинаковы. Для n гиродинов, кроме двух уравнений моментов, можно записать $n-2$ уравнений регулирования взаимного положения. В каждое из них в качестве неизвестных входят скорости прецессии трех гиродинов. С увеличением числа гиродинов настолько же увеличивается число уравнений регулирования взаимного положения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Б. Н., Шереметьевский Н. Н., Данилов-Нитусов Н. Н., Вейнберг Д. М. Электромеханическая система для ориентации и стабилизации автономных модулей и лёгких орбитальных станций. — В кн.: Системы управления. М.: Наука, 1978, с. 89.
2. Васильев В. Н., Вейнберг Д. М., Шереметьевский Н. Н. Управление угловым положением долговременной орбитальной станции при помощи двухступенных силовых гироскопов. — Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5, с. 3.
3. Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 598 с.
4. Токарь Е. Н. Проблемы управления гиросиловыми стабилизаторами. — Космич. исследования, 1978, т. 16, 2, с. 179.

Москва

Поступила в редакцию
3.IX.1980