МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1982

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ БАЛКОЙ И СТРИНГЕРОМ, С УЧЕТОМ РАЗВИТИЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

КУДИШИН Ю. И.

В полуплоскости, кромка которой подкреплена балкой, нагруженной поперечной сосредоточенной силой, у концов стрингера, расположенного перпендикулярно кромке, наблюдается резкая концентрация напряжений, приводящая к возникновению пластических зон. Задача пластичности решается методом упругих решений А. А. Ильюшина. Соответствующая упругая задача решается методом линейного сопряжения. Приведены результаты вычислений, выполненных на ЭВМ для двух примеров: подкрановой балки промышленного здания и хребтовой балки ТЭЦ, изготовленных из строительных сталей.

1. Рассмотрим напряженное состояние однородной полубесконечной пластины толщиной d, прямолинейная кромка которой подкреплена бесконечным стержнем (балкой), обладающим жесткостью на изгиб $E_б J$ и на растяжение — сжатие $E_б F_б$ (фиг. 1). Перпендикулярно кромке, на конечном расстоянии от нее, пластина подкреплена другим стержнем (стрингером) конечной длины с жесткостью на растяжение — сжатие $E_р F$. На концах стрингера действуют продольные силы N_1 и N_2. Балка загружена поперечной силой P. Пластина равномерно растянута на бесконечности силами $N_x d$, направленными вдоль ее кромки.

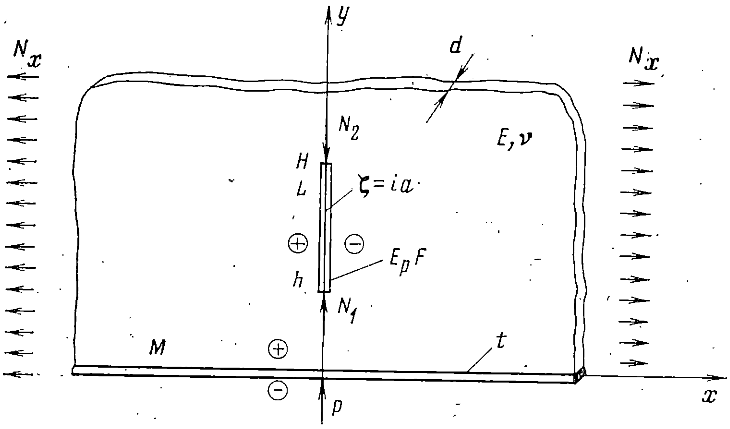
Известно [1—3], что в упругой постановке задачи у концов стрингера касательные напряжения обращаются в бесконечность, что затрудняет практическое использование результатов упругого решения. В связи с этим обычно делается ссылка на то, что в пластине, изготовленной из материала, обладающего пластическими свойствами, у концов стрингера образуются небольшие зоны пластичности, приводящие к перераспределению напряжений.

В предлагаемой работе сделана попытка проанализировать влияние указанных зон пластичности на напряженное состояние подкрепленной пластины, а также изучить форму и размеры этих зон.

Согласно методике учета развития пластических деформаций у концов стрингера, изложенной в [4] и основанной на методе упругих решений А. А. Ильюшина [5, 6], напряжения и деформации на $(k+1)$-й итерации определяются формулами

$$Y_y^{[k+1]}=Y_y^{(k+1)}-\omega^{(k+1)}(Y_y^{(k+1)}-\sigma^{(k+1)})$$
$$e_{yy}^{[k+1]}=(Y_y^{(k+1)}-\nu X_x^{(k+1)})/E \tag{1.1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\omega=1-\sigma_i/(3Ge_i),\quad \sigma=(X_x+Y_y)/3$$

$$X_x^{(k+1)}=X_{(x)}^{(k+1)}+\omega^{(k)}(X_x^{(k)}-\sigma^{(k)}),\quad X_y^{(k+1)}=X_{(y)}^{(k+1)}+\omega^{(k)}X_y^{(k)}$$
$$Y_y^{(k+1)}=Y_{(y)}^{(k+1)}+\omega^{(k)}[Y_y^{(k)}-(3-\nu)\sigma^{(k)}] \tag{1.2}$$



Фиг. 1

где $Y_{(y)}^{(k+1)}, \ldots$ — напряжения, определяемые из решения соответствующей упругой контактной задачи с некоторой пластической поправкой.

2. Положим, что пластина занимает верхнюю полуплоскость и представляет собой двухсвязную область, ограниченную контурами M (кромка полуплоскости) и L (линия контакта стрингера с пластиной). Афиксами точек пластины будут точки плоскости комплексного переменного $z=x+iy$. Точки контуров M и L обозначены соответственно буквами t и $\zeta=ia$. Величины, относящиеся к левым и правым берегам контуров, будут иметь индексы плюс и минус соответственно.

Из рассмотрения равновесия элементарного отрезка стрингера получим

$$X_y^+ - X_y^- = F\sigma_p'(\zeta)/d, \quad X_x^+ - X_x^- = 0 \quad (\zeta \in L) \tag{2.1}$$

где $\sigma_p(\zeta)$ — нормальные напряжения в стрингере [1].

В силу симметрии относительно оси y на L имеем соотношения

$$\partial v^+/\partial y = \partial v^-/\partial y, \quad \partial u/\partial y = 0 \tag{2.2}$$

Используя известные выражения напряжений и перемещений через комплексные потенциалы Колосова — Мусхелишвили [7], из первого уравнения (2.1) и второго равенства (2.2) можно получить соотношение

$$\mathrm{Jm}[\Phi(\zeta)^+ - \Phi(\zeta)^-] = F\sigma_p'/[d(1+\varkappa)] \tag{2.3}$$

Рассматривая первое равенство (2.2), нетрудно убедиться в непрерывности функции $\mathrm{Re}\,\Phi(\zeta)$ при переходе через контур L. Тогда для функции $\Phi(\zeta)$ можно записать задачу Римана:

$$\Phi(\zeta)^+ - \Phi(\zeta)^- = iF\sigma_p'/[d(1+\varkappa)] \tag{2.4}$$

Для определения второго комплексного потенциала $\Psi(z)$ введем в рассмотрение вспомогательную кусочно-голоморфную функцию $\theta(z) = -z\Phi'(z) + \Psi(z)$, для которой нетрудно получить задачу Римана. Подставляя перемещение v, выраженное через комплексные потенциалы, в первое уравнение (2.2) и учитывая определение функции $\theta(z)$, можно убедиться в непрерывности $\mathrm{Re}[\theta(\zeta)]$ при переходе через контур L. Аналогичным образом из равенства (2.2) получаем $\mathrm{Jm}\,\theta(\zeta)^\pm = (\varkappa+1)\,\mathrm{Jm}\,\Phi(\zeta)^\pm$. Подставляя последнее выражение в (2.3) и имея в виду непрерывность $\mathrm{Re}[\theta(\zeta)]$, получаем задачу Римана

$$\theta(\zeta)^+ - \theta(\zeta)^- = iF\sigma_p'/d \tag{2.5}$$

[1] Здесь и далее остальные обозначения соответствуют принятым в [7].

Решение задачи (2.4) сводится к определению кусочно-голоморфной функции в области, не совпадающей со всей плоскостью. Оно дается формулой (7) (см. [7] с. 387), которая в соответствии с принятыми обозначениями будет иметь вид

$$\Phi(z)=n\int\limits_L \frac{\sigma_p'}{\zeta-z}d\zeta+\Phi_0(z)+C_1,\quad n=\frac{F(1+\nu)}{8\pi d} \tag{2.6}$$

Аналогично, записывая решение задачи (2.5) и используя определение функции $\theta(z)$, получаем

$$\Psi(z)=nz\int\limits_L \frac{\sigma_p'}{(\zeta-z)^2}d\zeta+n(\varkappa+1)\int\limits_L \frac{\sigma_p'}{\zeta-z}d\zeta+\Psi_0(z)+C_2 \tag{2.7}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ — голоморфные в верхней полуплоскости функции, исчезающие на бесконечности, которые можно определить из условия контакта балки с полуплоскостью на контуре L.

Рассматривая равновесие элементарного отрезка балки, сцепленной с полуплоскостью на ее границе, можно записать уравнения

$$\frac{E_\delta J}{d}v^{\mathrm{IV}}(t)=Y_y(t)+\frac{P}{d}\delta(t),\quad X_y(t)=-\frac{F_\delta}{d}\sigma_\delta' \tag{2.8}$$

Используя эти равенства, составим комплексную комбинацию $Y_y(t)-iX_y(t)$. Выражая затем величины $v^{\mathrm{IV}}(t)$, $Y_y(t)$ и $X_y(t)$ при помощи комплексных потенциалов и используя формулы (2.6), (2.7), приходим к первой основной задаче для верхней полуплоскости с граничным условием

$$Y_y^\circ-iX_y^\circ=2K_J v'''(t)-\frac{P}{d}\delta(t)-\frac{EK_JK_F}{E_\delta(\varkappa+1)}\sigma_\delta^{\mathrm{IV}}(t)+\frac{iF_\delta}{d}\sigma_\delta'(t)+\Omega(t) \tag{2.9}$$

$$Y_y^\circ-iX_y^\circ=\Phi_0(t)+\overline{\Phi_0(t)}+t\overline{\Phi_0'(t)}+\overline{\Psi_0(t)}$$

$$K_J=2E_\delta J/(Ed),\quad K_F=2E_\delta F_\delta/(Ed),\quad v(t)=\mathrm{Jm}\,\Phi(t)$$

$$\Omega(t)=-n\int\limits_L \frac{\sigma_p'(a)}{\zeta-t}d\zeta-n(\varkappa+2)\int\limits_L \frac{\sigma_p'(a)}{\zeta+t}d\zeta+2nt\int\limits_L \frac{\sigma_p'(a)}{(\zeta+t)^2}d\zeta-C_1-\bar{C}_1-\bar{C}_2$$

Решение подобной задачи хорошо известно ([2], с. 349):

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{Y_y^\circ(t)-iX_y^\circ(t)}{t-z}dt$$

$$\Psi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{Y_y^\circ(t)+iX_y^\circ(t)}{t-z}dt-\Phi_0(z)-z\Phi_0'(z) \tag{2.10}$$

Подставляя сюда соответствующие значения из (2.9), производя интегрирование и подставляя полученный результат в формулы (2.6) и (2.7), получаем

$$\Phi(z)=-iK\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{v'''(t)}{t-z}dt-i\frac{P}{z}+iK_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_\delta^{\mathrm{IV}}(t)}{t-z}+$$

$$+K_2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_\delta'(t)}{t-z}dt+n\int\limits_L \sigma_p'(a)Q_1(\zeta,z)d\zeta+\frac{N_x}{4} \tag{2.11}$$

$$\Psi(z)=iKz\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\nu'''(t)}{(t-z)^2}dt-i\frac{P_1}{z}-iK_1z\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_\delta^{IV}(t)}{(t-z)^2}dt-$$

$$-K_2\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_\delta'(t)\left[\frac{2}{t-z}+\frac{z}{(t-z)^2}\right]dt+n\int_L\sigma_p'(a)Q_2(\zeta,z)d\zeta-\frac{N_x}{2}\qquad(2.12)$$

$$Q_1(\zeta,z)=\frac{1}{\zeta-z}-\frac{\varkappa+2}{\zeta+z}+\frac{2z}{(\zeta+z)^2},\quad Q_2(\zeta,z)=\frac{\varkappa+1}{\zeta-z}+$$

$$+\frac{\varkappa+1}{\zeta+z}+\frac{z}{(\zeta-z)^2}-\frac{(\varkappa+6)z}{(\zeta+z)^2}+\frac{4z^2}{(\zeta+z)^3}$$

$$K=\frac{K_J}{\pi},\quad K_1=\frac{(1+\nu)E_\delta JF_\delta}{2\pi Ed^2},\quad K_2=\frac{F_\delta}{2\pi d},\quad P_1=\frac{P}{2\pi d}\qquad(2.13)$$

Значения произвольных постоянных в (2.11), (2.12) были определены из условия на бесконечности: $X_x(\infty)=N_x$.

Для определения среднего нормального напряжения в балке σ_δ, входящего в выражения (2.11), (2.12), воспользуемся условием равенства продольных деформаций балки и полуплоскости по линии их контакта $\varepsilon_\delta=\partial u/\partial t$. Выражая $\partial u/\partial t$ через комплексные потенциалы (2.11) и (2.12), а также имея в виду соотношение $\varepsilon_\delta=\sigma_\delta/E_\delta$, получаем

$$2\pi K(1-\nu)\nu'''(t)=\frac{E}{E_\delta}\sigma_\delta(t)+2\pi K_1(1-\nu)\sigma_\delta^{IV}(t)-$$

$$-4K_2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_\delta'(t_0)}{t_0-t}dt_0-n\int_L\sigma_p'(a)R_3(a,t)\,da-N_x+2P_1\pi(1-\nu)\delta(t)\qquad(2.14)$$

$$R_3(a,t)=-\frac{4(\varkappa+1)a}{a^2+t^2}+\frac{16at^2}{(a^2+t^2)^2}$$

Переходя в (2.11) к пределу при $y\to+0$ и выделяя мнимую часть, получим

$$\nu(t)=-K\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\nu'''(t_0)}{t_0-t}dt_0-\frac{P_1}{t}+K_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_\delta^{IV}(t_0)}{t_0-t}dt_0+$$

$$+\pi K_2\sigma_\delta'(t)+n\int_L\sigma_p'(a)J_1(a,t)\,da\qquad(2.15)$$

$$J_1(a,t)=-\frac{(\varkappa+3)t}{a^2+t^2}+\frac{2t(t^2-a^2)}{(a^2+t^2)^2}$$

Выражения (2.14), (2.15) можно рассматривать как систему уравнений относительно $\sigma_\delta(t)$, $\nu(t)$. Решая эту систему при помощи преобразования Фурье, получаем

$$\nu'''(t)=\frac{P_1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\alpha^3[2+(1+\nu)K_F\alpha]}{D(\alpha)}\cos\alpha t\,d\alpha+$$

$$+n\int_L\sigma_p'(a)\int_0^{\infty}\frac{\alpha^3}{D(\alpha)}\left\{1+\varkappa+2a\alpha+\frac{K_F\alpha}{2}\left[4-K_J(1+\nu)^2a\alpha^4\right]\right\}e^{-a\alpha}\cos\alpha t\,d\alpha\,da\qquad(2.16)$$

$$\sigma_\delta'(t)=\frac{2(1-\nu)E_\delta}{E}P_1\int_0^\infty\frac{\alpha\sin\alpha t}{D(\alpha)}d\alpha+$$

$$+\frac{4E_\delta n}{E}\int_L\sigma_p'(a)\int_0^\infty\frac{\alpha}{D(\alpha)}[\varkappa-1+2a\alpha+(1+\nu)K_Ja\alpha^4]e^{-a\alpha}\sin\alpha t d\alpha da \tag{2.17}$$

$$D(\alpha)=1+K_F\alpha+K_J\alpha^3+CK_JK_F\alpha^4,\quad C=(1+\nu)(3-\nu)/4$$

Для определения функции $\sigma_p'(a)$ используем контактное условие на контуре L, выражающееся в равенстве продольных деформаций стрингера ε_p и полуплоскости. При этом деформации полуплоскости с учетом развития пластичности у концов стрингера определятся для $(k+1)$-й итерации метода упругих решений по формуле (1.1) с подстановкой в нее соответствующих значений из (1.2). Принимая во внимание соотношение $\varepsilon_p=\sigma_p/E_p$, определяющее продольные деформации стрингера, и выражая величины $X_{(x)}$ и $Y_{(y)}$ через комплексные потенциалы, равенство $\varepsilon_p=e_{yy}^{[k+1]}$ можно записать в следующем виде:

$$\frac{2\mu}{E_p}\sigma_p(y)=(\varkappa-1)\operatorname{Re}\Phi(\zeta)+\operatorname{Re}\theta(\zeta)+\frac{X_k}{1+\nu}$$

$$X_k=\omega^{(k)}[(2+3\nu+\nu^2)Y_y^{(k)}-(1-\nu^2)X_x^{(k)}]/3$$

Подставляя в предыдущее соотношение значения $\operatorname{Re}\Phi(\zeta)$ и $\operatorname{Re}\theta(\zeta)$, найденные из формул (2.11) и (2.12) с учетом определения функции $\theta(z)$, получаем сингулярное интегродифференциальное уравнение относительно $\sigma_p(y)$:

$$\sigma_p(y)-\frac{\lambda}{\pi}\int_L\frac{\sigma_p'(a)}{a-y}da-\frac{\lambda_1}{\pi}\int_L\sigma_p'(a)K(a,y)da=f_1(y) \tag{2.18}$$

$$\lambda=CE_pF/(Ed),\quad \lambda_1=E_pF(1+\nu)^2/(8Ed)$$

$$f_1(y)=-P\frac{(1+\nu)E_p}{2\pi Ed}\int_0^\infty\{\varkappa-1+[2(1-\nu)K_F+2y+(1+\nu)K_F\alpha y]\alpha\}\frac{e^{-\alpha y}}{D(\alpha)}d\alpha-$$

$$-\frac{E_p}{E}(\nu N_x-X_k)$$

$$K(a,y)=\frac{b_{13}}{a+y}-\frac{12y}{(a+y)^2}+\frac{8y^2}{(a+y)^3}+\int_0^\infty\frac{B_k(a,y,\alpha)}{D(\alpha)}e^{-\alpha(a+y)}d\alpha$$

$$B_k(a,y,\alpha)=\alpha[b_1+(b_2a+2b_3y)\alpha+(b_4+2b_5ay)\alpha^2+$$
$$+(b_6+b_7a+2b_8y)\alpha^3+(b_9a+2b_{10}y+2b_{11}ay)\alpha^4+4b_{12}ay\alpha^5]$$

$$b_1=(\varkappa-1)(\varkappa-3)K_F,\quad b_2=2(\varkappa-3)K_F,\quad b_3=(\varkappa-1)K_F,\quad b_4=(\varkappa^2-1)K_J,$$
$$b_5=2K_F,\quad b_6=(\varkappa-1)(3-\nu)K_JK_F,\quad b_7=2(\varkappa-1)K_J,\quad b_8=(\varkappa+1)K_J$$
$$b_9=2(1-3\nu)K_JK_F,\quad b_{10}=(3-\nu)K_JK_F,\quad b_{11}=2K_J,\quad b_{12}=(1+\nu)K_JK_F$$
$$b_{13}=(\varkappa+1)-(\varkappa-1)(\varkappa+2)$$

Уравнение (2.18) следует решать при граничных условиях

$$\sigma_p(h)=-p_1=-N_1/F,\quad \sigma_p(H)=-p_2=-N_2/F \tag{2.19}$$

Уравнение (2.18) относится к хорошо изученному классу сингулярных уравнений. Для приближенного решения его разработаны удобные и эффективные методы (см. [2, 8, 9]).

Выражения для комплексных потенциалов (2.11), (2.12) с учетом (2.16), (2.17) позволяют получить формулы для вычисления всех компонент напряжений в полубесконечной пластине.

Для точек, принадлежащих кромке полуплоскости (контур M):

$$Y_y(t) = -\frac{P}{\pi d}\int_0^\infty \frac{1+K_F\alpha}{D(\alpha)}\cos\alpha t\,d\alpha + 2K_J n\int_L \sigma_p'(a)M(a,t)\,da$$

$$X_x(t) = -\frac{P}{\pi d}\int_0^\infty \frac{2+(1+\nu)K_F\alpha}{D(\alpha)}\cos\alpha t\,d\alpha + 4n\int_L \sigma_p'(a)Q(a,t)\,da - Y_y(t) + N_x$$

(2.20)

$$X_y(t) = -\frac{(1-\nu)K_F P}{2\pi d}\int_0^\infty \frac{\alpha\sin\alpha t}{D(\alpha)}\,d\alpha - 2K_F n\int_L \sigma_p'(a)L(a,t)\,da$$

Для точек, принадлежащих линии контакта стрингера с полуплоскостью (контур L):

$$Y_y(y) = \frac{2\nu}{3-\nu}\left[-\frac{P}{2\pi d}\int_0^\infty \frac{M_y(\alpha,y)}{D(\alpha)}e^{-\alpha y}\,d\alpha + n\int_L \sigma_p'(a)K_y(a,y)\,da\right] + \frac{3+\nu}{4C}\left[\frac{E}{E_p}\sigma_p(y) + \nu N_x + X_k\right]$$

(2.21)

$$X_x(y) = \frac{1}{\nu}\left[Y_y(y) - \frac{E}{E_p}\sigma_p(y) - X_k\right], \quad X_y(y)^{\pm} = \pm\frac{F_p}{2}\sigma_p'(y)$$

Для произвольной внутренней точки полуплоскости

$$Y_y(x,y) = -\frac{P}{2\pi d}\int_0^\infty \frac{2+2(K_F+y)\alpha + (1+\nu)K_F y\alpha^2}{D(\alpha)}e^{-\alpha y}\cos\alpha x\,d\alpha + n\int_L \sigma_p'(a)B_y(a,x,y)\,da$$

(2.22)

$$X_x(x,y) = -\frac{P}{\pi d}\int_0^\infty \frac{2+(1+\nu)K_F\alpha}{D(\alpha)}e^{-\alpha y}\cos\alpha x\,d\alpha + 4n\int_L \sigma_p'(a)B_x(a,x,y)\,da - Y_y(x,y) + N_x$$

$$X_y(x,y) = -\frac{P}{2\pi d}\int_0^\infty \frac{[2y+(1-\nu)K_F + (1+\nu)K_F y\alpha]\alpha}{D(\alpha)}e^{-\alpha y}\sin\alpha x\,d\alpha + n\int_L \sigma_p'(a)B_{xy}(a,x,y)\,da$$

В формулах (2.20)—(2.22) функции, составляющие ядра интегралов, имеют следующие значения:

$$M(a,t) = \int_0^\infty [b_{14} + (b_{15}+2a)\alpha + b_{16}a\alpha^2]\alpha^3\frac{e^{-a\alpha}}{D(\alpha)}\cos\alpha t\,d\alpha$$

$$Q(a,t) = -\frac{b_{14}a}{a^2+t^2} + \frac{4at^2}{(a^2+t^2)^2} + \int_0^\infty [b_3 + b_5 a\alpha + b_8\alpha^2 + (b_{10}+b_{11}a)\alpha^3 + 2b_{12}a\alpha^4]\alpha\frac{e^{-a\alpha}}{D(\alpha)}\cos\alpha t\,d\alpha$$

$$L(a,t)=\int_0^\infty (b_{17}+2a\alpha+b_{18}a\alpha^4)\frac{e^{-a\alpha}}{D(\alpha)}\sin\alpha t\,d\alpha$$

$$M_y(\alpha,y)=b_{14}+[b_{16}(1-\alpha y)-2y]\alpha$$

$$K_y(a,y)=-\frac{(\varkappa+1)(\varkappa+3)}{a+y}+\frac{4(\varkappa+3)y}{(a+y)^2}-\frac{8y^2}{(a+y)^3}+\int_0^\infty\frac{G_y(a,\alpha,y)}{D(\alpha)}e^{-\alpha(a+y)}\,d\alpha$$

$$G(a,\alpha,y)=\{b_{19}+(b_{20}a-2b_3y)\alpha+(b_{21}-2b_5ay)\alpha^2+[b_{22}+$$
$$+2b_8(a-y)]\alpha^3+(b_{23}a-2b_{10}y-2b_{11}ay)\alpha^4-4b_{12}ay\alpha^5\}\alpha$$

$$B_y(a,x,y)=R_y(a,x,y)+2\int_0^\infty\frac{G_{yy}(a,y,\alpha)}{D(\alpha)}e^{-\alpha(a+y)}\cos\alpha x\,d\alpha$$

$$R_y(a,x,y)=-\frac{(\varkappa+3)(y-a)}{x^2+(y-a)^2}-\frac{(\varkappa+3)(y+a)}{x^2+(y+a)^2}+\frac{4x^2(y-a)}{[x^2+(y-a)^2]^2}+$$
$$+2\frac{(\varkappa+3)y[x^2-(y+a)^2]+2x^2(y+a)}{[x^2+(y+a)^2]^2}+8y\frac{y(y+a)^3+3x^2a(y+a)-x^4}{[x^2+(y+a)^2]^3}$$

$$G_{yy}(a,y,\alpha)=\alpha^2[b_3y+(b_8+b_5ay)\alpha+(b_{10}+b_{11}a+b_8y)\alpha^2+(b_{10}y+b_{12}a+b_{11}ay)\alpha^3+2b_{12}ay\alpha^4]$$

$$B_x(a,x,y)=R_x(a,x,y)+\int_0^\infty\frac{G_{xx}(a,\alpha)}{D(\alpha)}e^{-\alpha(y+a)}\cos\alpha x\,d\alpha$$

$$R_x(a,x,y)=-\frac{y-a}{x^2+(y-a)^2}-\frac{(\varkappa+2)(y+a)}{x^2+(y+a)^2}+2\frac{2x^2(y+a)+y(y+a)^2-x^2y}{[x^2+(y+a)^2]^2}$$

$$G_{xx}(a,\alpha)=\alpha[b_3+b_5a\alpha+b_8\alpha^2+(b_{10}+b_{11}a)\alpha^3+2b_{12}a\alpha^4]$$

$$B_{xy}(a,x,y)=R_{xy}(a,x,y)+2\int_0^\infty\frac{G_{xy}(a,y,\alpha)}{D(\alpha)}e^{-\alpha(y+a)}\sin\alpha x\,d\alpha$$

$$R_{xy}(a,x,y)=-\frac{b_{14}x}{x^2+(y-a)^2}+\frac{b_{14}x}{x^2+(y+a)^2}+\frac{2x[x^2-(y-a)^2]}{[x^2+(y-a)^2]^2}-$$
$$-2x\frac{x^2+(y+a)[2(\varkappa+5)y-(y+a)]}{[x^2+(y+a)^2]^2}+8xy\frac{3y(y+a)^2+3x^2(y+a)-(y+a)^3-x^2y}{[x^2+(y+a)^2]^3}$$

$$G_{xy}(a,y,\alpha)=\alpha[-b_3+(b_3y-b_5a)\alpha+b_5ay\alpha^2+b_8y\alpha^3+(b_{10}y-b_{12}a+b_{11}ay)\alpha^4+2b_{12}ay\alpha^5]$$
$$b_{14}=\varkappa+1,\quad b_{15}=(3-\nu)K_F,\quad b_{16}=(1+\nu)K_F,\quad b_{17}=\varkappa-1,\quad b_{18}=(1+\nu)K_J$$
$$b_{19}=(\varkappa-1)(\varkappa+3)K_F,\quad b_{20}=2(\varkappa+3)K_F,\quad b_{21}=(\varkappa+1)^2K_J$$
$$b_{22}=(\varkappa+1)(3-\nu)K_JK_F,\quad b_{23}=2(5+\nu)K_JK_F$$

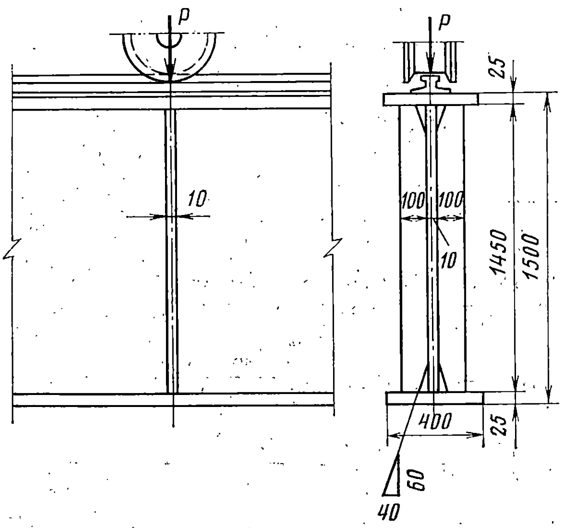
Из приведенного решения нетрудно получить несколько частных случаев, хорошо известных в литературе.

Полагая в (2.11), (2.12), (2.22) $J=0$, $F_6=0$, $P=0$, $N_x=0$, $\sigma_p'(a)=T(a)/F$ и стягивая контур L в точку, сохраняя при этом равнодействующую касательных сил T постоянной, получим известное решение Мелана [10] для полуплоскости с приложенной внутри сосредоточенной силой [2].

Полагая в формулах (2.20) $n=0$, $N_x=0$, приходим к результатам, полученным в [11] для балки, загруженной сосредоточенной силой и жестко скрепленной с упругой полуплоскостью.

Полагая дополнительно в этих же формулах $K_F=0$, приходим к известному решению о балке, прикрепленной к упругой полуплоскости без трения [12].

[2] Подробнее см. [13].



Фиг. 2

Полагая в (2.11), (2.12), (2.18) $J=0$, $F_б=0$, $P=0$, $N_2=0$, $N_x=0$, $h=0$, $X_k=0$, получаем решение для полуплоскости загруженной через стрингер конечной длины, расположенный перпендикулярно кромке [3].

Переходя в (2.18) к пределу при $h\to\infty$, перенеся предварительно начало координат в точку $[0, (H+h)/2]$, а также полагая $N_x=0$, получим уравнение задачи о бесконечной плоскости, подкрепленной стрингером конечной длины [8].

В приведенных частных случаях следует ограничиться первой итерацией, дающей упругое решение.

3. При вычислениях по полученным формулам удобно перейти к безразмерным параметрам: $y=l(y^\circ+e)$, $t=lt^\circ$, $a=l(a^\circ+e)$, $\alpha=\alpha^\circ/l$, $K_J=K_J{}^\circ l^3$, $K_F=K_F{}^\circ l$, $x=x^\circ l$, $N_1=N_1{}^\circ F\sigma_s$, $N_2=N_2{}^\circ F\sigma_s$, $P=P^\circ ld\sigma_s$, $N_x=N_x{}^\circ\sigma_s$, $\lambda=\lambda^\circ l$, $\lambda_1=\lambda_1{}^\circ l$, $J=J^\circ dl^3$, $F_б=F_б{}^\circ ld$, $F=F^\circ ld$, $l=(H-h)/2$, $e=1+h/l$. При этом интервал интегрирования $[h, H]$ перейдет в отрезок $[-1, 1]$ оси y°. В дальнейшем нулик в верхнем индексе опускается.

Удовлетворяя граничным условиям (2.19), которые теперь будут иметь вид $\sigma_p(-1)=-p_1=-N_1/(F\sigma_s)$, $\sigma_p(1)=-p_2=-N_2/(F\sigma_s)$, представим искомую функцию уравнения (2.18) в следующем виде:

$$\sigma_p(y)=W(y)+y(p_1-p_2)/2-(p_1+p_2)/2 \tag{3.1}$$

где $W(y)$ — новая неизвестная функция, удовлетворяющая нулевым граничным условиям $W(\pm1)=0$.

Подставляя (3.1) в уравнение (2.18) и применяя к регулярному интегралу правило интегрирования по частям, получаем

$$W(y)-\frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{W'(a)}{a-y}da+\frac{\lambda_1}{\pi}\int_{-1}^{1}W(a)B(a,y)\,da=f(y) \tag{3.2}$$

$$f(y)=f_1(y)+\frac{p_1-p_2}{2}\left(\frac{\lambda_1}{\pi}\int_{-1}^{1}K(a,y)\,da+\frac{\lambda}{\pi}\ln\frac{1-y}{1+y}-y\right)+\frac{p_1+p_2}{2}$$

$$B(a,\ y)=K'(a,\ y)_a$$

Следуя [9], представим искомую функцию W в виде интерполяционного полинома Лагранжа по узлам полиномов Чебышева второго рода порядка n, который после некоторых преобразований будет иметь вид [3]

[3] См. также [8].

$$W(\theta)\approx\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}W_k\sum_{m=1}^{n}\sin m\theta_k\sin m\theta \tag{3.3}$$

$$\theta=\arccos y,\quad \theta_k=k\pi/(n+1)\quad {\scriptstyle (k=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,n)}$$

Подставляя (3.3) в (3.2), производя известные преобразования и придавая аргументу θ значения $\theta_i=i\pi/(n+1)$ $(i=1,2,3,\ldots,n)$, приходим к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n}W_k b_{ik}=f_i\quad {\scriptstyle (i,k=1,2,3,\ldots n)} \tag{3.4}$$

$$b_{ii}=1+\frac{\lambda(n+1)}{2\sin\theta_i}+d_{ii},\quad b_{ik}=d_{ik}\quad {\scriptstyle (|i-k|=2,4,6,\ldots)}$$

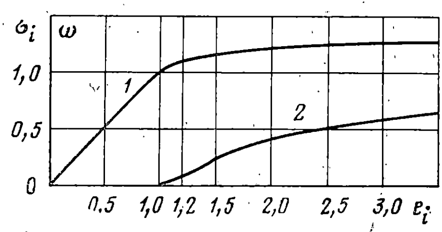
$$b_{ik}=d_{ik}-\frac{\lambda}{2(n+1)\sin\theta_i}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\theta_k-\theta_i}{2}-\operatorname{ctg}^2\frac{\theta_k+\theta_i}{2}\right)\quad {\scriptstyle (|i-k|=1,2,3\ldots)}$$

$$d_{ik}=\frac{\lambda_1\sin\theta_k}{n+1}B(\cos\theta_k,\cos\theta_i),\quad f_i=f(\cos\theta_i)$$

Для решения системы (3.4) и вычислений по формулам (2.20)–(2.22), а также (1.1) и (1.2) была составлена ФОРТРАН-программа, реализованная на ЭВМ ЕС. При вычислении интегралов, входящих в указанные формулы, использовались соответствующие квадратурные формулы наивысшей степени точности [14].

4. В качестве примера рассмотрим локальное напряженное состояние стальной подкрановой балки в месте подкрепления ее стенки ребром жесткости (фиг. 2). Нагрузка от колеса $P=758$ кН, подкрановый рельс типа КР–100. В расчетной схеме этого узла рельс с верхним поясом можно представить в виде балки, стенку – в виде полуплоскости, ребро жесткости – в виде стрингера, представляющего собой одномерный континуум. В целях упрощения положим, что ребро находится вблизи опоры подкрановой балки, где напряжения от общего изгиба несущественны.

В соответствии с фиг. 2 исходные параметры задачи будут иметь следующие значения: $P=0{,}57$, $J=0{,}01$, $F_6=3{,}21$, $F=0{,}30$, $e=1{,}09$, $N_1=N_2=N_x=0$.



Фиг. 3

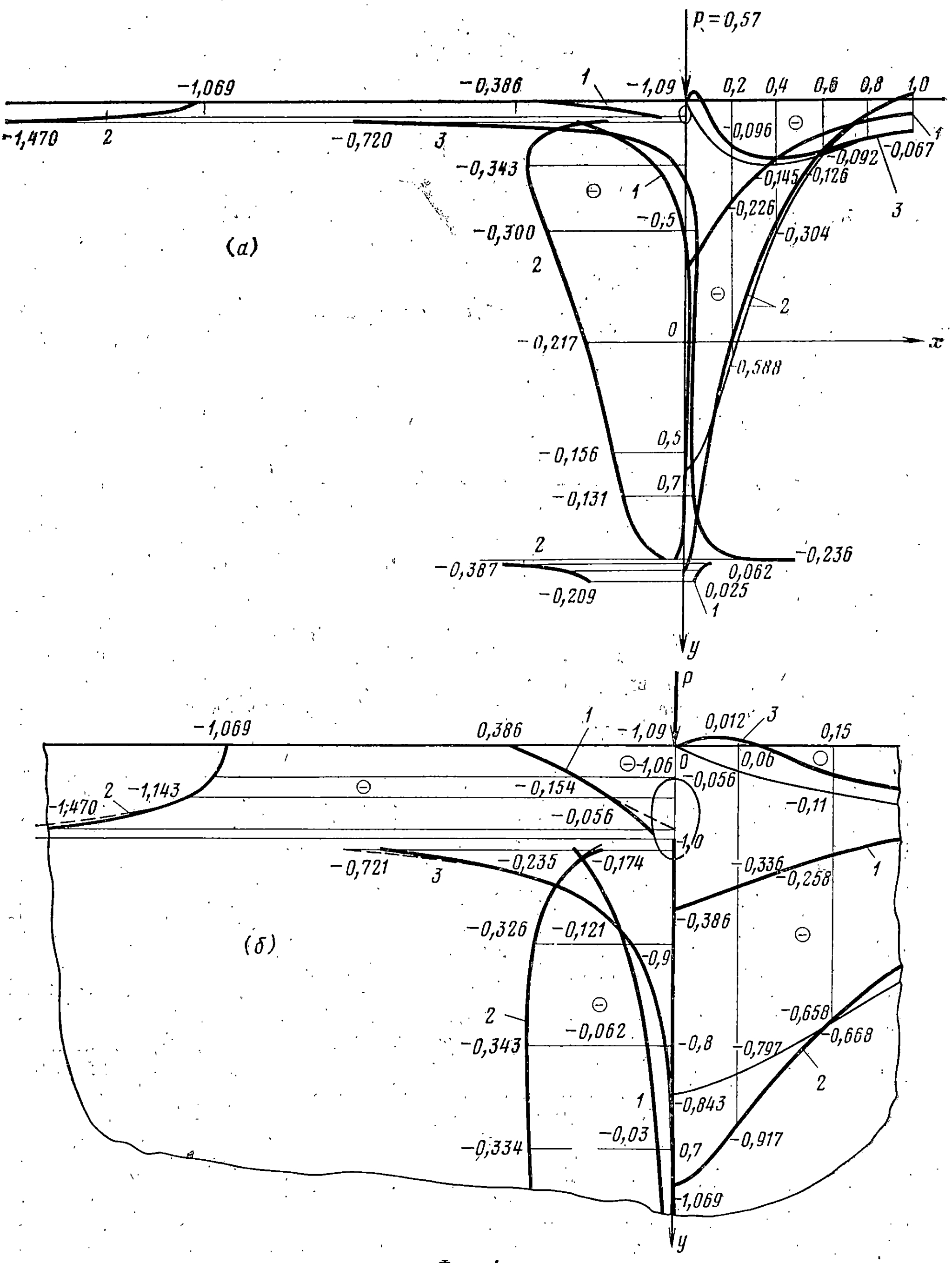
Положим, что балка изготовлена из мягкой строительной стали марки В Ст 3 сп 5, ГОСТ 380–71, $\sigma_s=200$ мПа, диаграмма работы которой в относительных координатах приведена на фиг. 3 (кривая *1*). Здесь же показана кривая $\omega(e_i)$, которая для расчетов аппроксимировалась полиномами (кривая *2*).

На фиг. 4, *а*, *б* представлены общий вид и увеличенный фрагмент распределения напряжений на кромке полуплоскости (под балкой) и на вертикальной оси. Сплошной линией показаны результаты пластического решения, штриховой – упругого. Справа от оси y показано распределение напряжений на кромке полуплоскости, слева – вдоль оси y (кривые *1* соответствуют напряжениям X_x, *2* – Y_y, *3* – X_y). Овальный контур вокруг верхнего конца ребра соответствует границе пластической зоны, построенной по условию $e_i=(X_x^2-X_xY_y+Y_y^2+3X_y^2)^{1/2}=1$.

Тонкими линиями справа от оси y показаны эпюры распределения касательных (X_y) и нормальных (Y_y) напряжений под балкой при отсутствии ребра жесткости на стенке.

Следует отметить, что ребро жесткости вызывает резкую концентрацию напряжений у его концов, особенно у верхнего. Возникновение зон пластичности у концов ребра заметно влияет на распределение напряжений только в пределах этих зон.

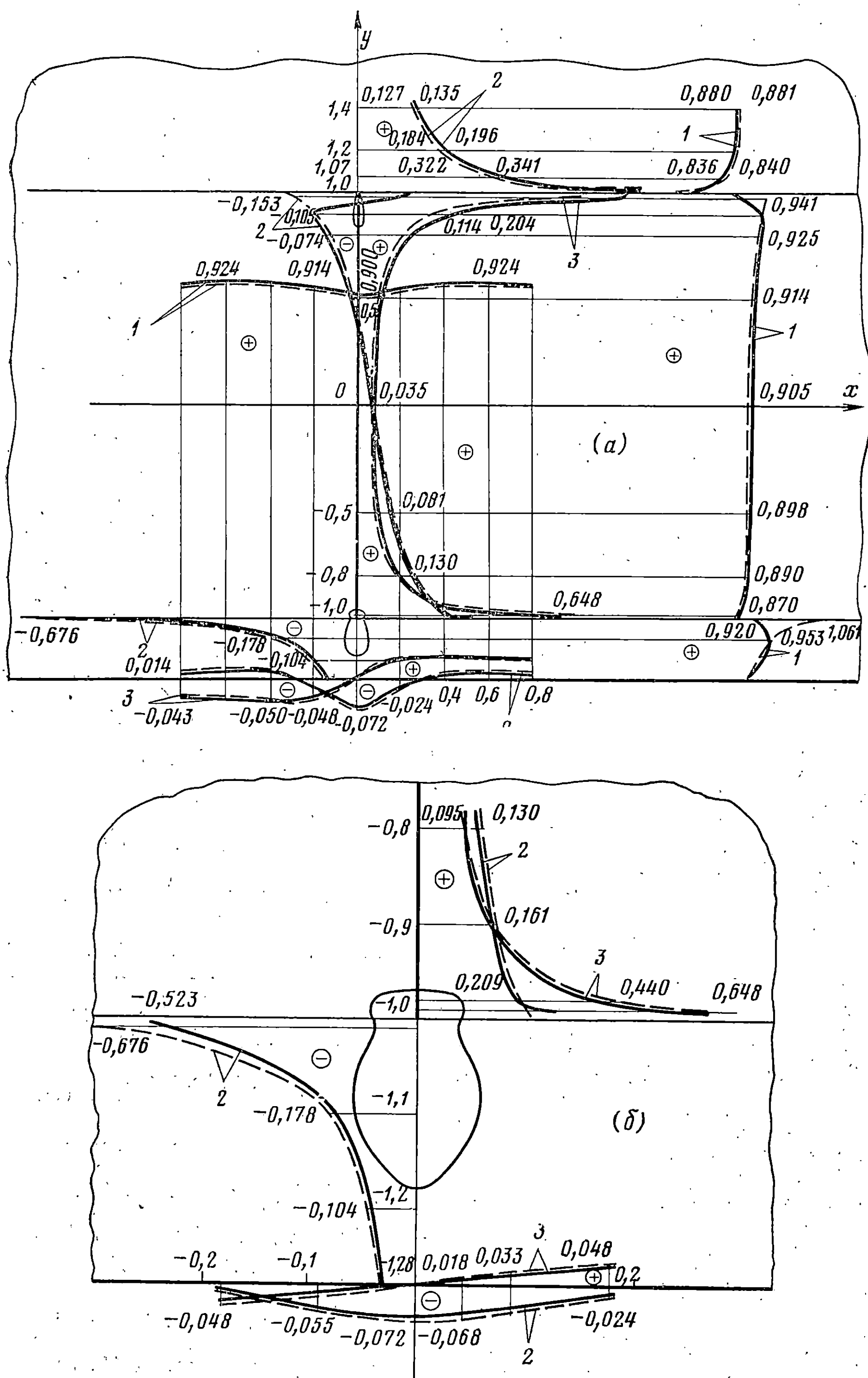
Результаты многочисленных обследований состояния подкрановых балок промышленных зданий показывают, что в большинстве случаев усталостные трещины в верхнем поясном шве балки и околошовной зоне зарождаются в местах подкрепления стенки балки ребрами жесткости. Выявленная в приведенном примере концентрация



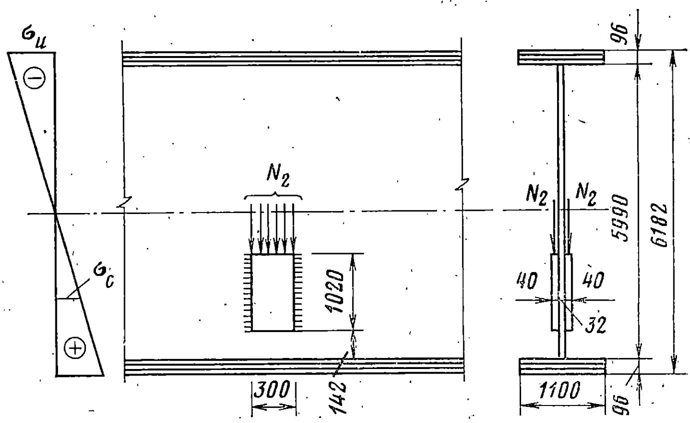
Фиг. 4

напряжений в указанной зоне определенным образом объясняет результаты наблюдений.

На фиг. 5 представлен фрагмент хребтовой балки котельного отделения ТЭЦ, изготовленной из низколегированной стали марки 16Г2АФ по ГОСТ 19282—73 с пределом пропорциональности 320 мПа. К хребтовым балкам пролетом 30 м и высотой ~6 м подвешены котлы массой ~250 т. Передача нагрузки на такую балку осуществляется при помощи накладок, приваренных в нижней части стенки, N_2=1880 кН. Пренебрегая взаимовлиянием фланговых швов, расчетную схему данного узла можно принять согласно фиг. 1 со следующими параметрами: $N_2=0{,}49$, $N_x=0{,}9$, $J=0{,}19$, $F_б=6{,}47$, $F=0{,}74$, $e=1{,}28$, $P=N_1=0$. Здесь влияние нормальных напряжений от общего



Фиг. 6



Фиг. 5

изгиба балки учтено приближенно, оно принято равным среднему напряжению по высоте накладки σ_c=288 мПа.

Распределение напряжений в рассматриваемом узле показано на фиг. 6, *а*, *б*. Кроме высокой концентрации напряжений у концов ребра здесь следует обратить внимание на различие форм зон пластичности и влияние этих зон на распределение напряжений. У нижнего конца ребра форма зоны пластичности напоминает форму аналогичной зоны у верхнего конца ребра в предыдущем примере. У верхнего же конца зона пластичности практически не имеет ширины, т. е. пластический сдвиг происходит в основном по линии контакта ребра со стенкой, что сопровождается высокими градиентами деформаций в направлении, перпендикулярном оси ребра. При этом возникает опасность появления трещин в этой зоне от исчерпания пластических свойств металла.

В обоих приведенных примерах размеры зон пластичности относительно невелики (~10% от длины ребра), что обусловливает незначительную разницу (доли процента) величин напряжений вне пластических зон, полученных по упругому и пластическому решениям. При увеличении нагрузок размеры зон резко возрастают и тогда эта разница становится существенной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 4, с. 632–646.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. Изд. 2-е. М.: Физматгиз, 1962. 599 с.
3. *Muki R., Sternberg E.* On the diffusion of load from a transverse tension bar into a semi-ifinite elastic sheet.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1968, v. 35, No. 4, p. 737–746.— Рус. перев.: Тр. Амер. об-ва инж.-механ., сер. E, 1968, т. 35, № 4, с. 124–135.
4. *Кудишин Ю. И.* Контактная задача о подкреплении бесконечной плоскости стрингером с учетом пластических свойств материала.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 4, с. 83–92.
5. *Ильюшин А. А.* Пластичность М.— Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
6. *Панферов В. М.* Концентрация напряжений при упругопластических деформациях.— Изв. АН СССР. ОТН, 1954, № 4, с. 47–66.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5-е. М.: Наука, 1966. 707 с.
8. *Каландия А. И.* Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 303 с.
9. *Multhoop H.* Die Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflugeln.— Luftfahrforschung, 1938, B. 15, No. 4, S. 153–166.
10. *Melan E.* Der Spannungszustand der durch eine Einzelkraft im Innern beanspruchten Halbscheibe.— ZAMM, 1932, B. 12, H. 6, S. 343–346.
11. *Шереметьев М. П.* Пластинки с подкрепленным краем. Львов: Изд-во Львовск. ун-та, 1960. 258 с.
12. *Коренев Б. Г.* Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. М.: Госстройиздат, 1954. 232 с.
13. *Кудишин Ю. И.* Напряженное состояние упругой полуплоскости при действии на нее внутри сосредоточенной силы. Строительство и архитектура.— Изв. вузов, 1979, № 8, с. 35–41.
14. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. М.: Физматгиз, 1959. 327 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.V.1981