

УДК 539.3

ОБ ИЗГИБЕ УПРУГИХ ПЛАСТИН
С РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРОЙ

ГРИГОЛЮК Э. И., ГРИНГАУЗ М. Г., ДОЛГИХ В. Н.,
ФИЛЬШТИНСКИЙ Л. А.

Схема решения двоякопериодических задач о растяжении и изгибе пластин с регулярной структурой развита в [1, 2]. Общие принципы осреднения регулярных структур предложены в [3-5].

Ниже двоякопериодические задачи об изгибе пластин с криволинейными отверстиями или упругими включениями сводятся к системам интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Дается алгоритм определения напряжений и эффективных жесткостных параметров. Приводятся результаты расчетов.

1. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям. В технической теории однородного изгиба пластин прогиб w , удельные изгибающие и крутящий моменты M_x, M_y, M_{xy} , удельные перерезывающие силы Q_x, Q_y выражаются через аналитические функции $\varphi(z), \psi(z)$ комплексной переменной $z=x+iy$ по формулам [6, 7]:

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)], \quad \chi(z) = \int \psi(z) dz \\ \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} &= \varphi(z) + z\overline{\Phi(z)} + \overline{\Psi(z)}, \quad \Phi(z) = \varphi'(z) \\ M_x + M_y &= -4(1+\mu)D \operatorname{Re} \Phi(z), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \\ M_y - M_x + 2iM_{xy} &= 2(1-\mu)D[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] \\ Q_x - iQ_y &= -4D\Phi'(z), \quad \Psi(z) = \psi'(z) \\ -\kappa\varphi(z) + z\overline{\Phi(z)} + \overline{\Psi(z)} &= f_1 + if_2 + icz + c_1 \end{aligned} \quad (1.4)$$

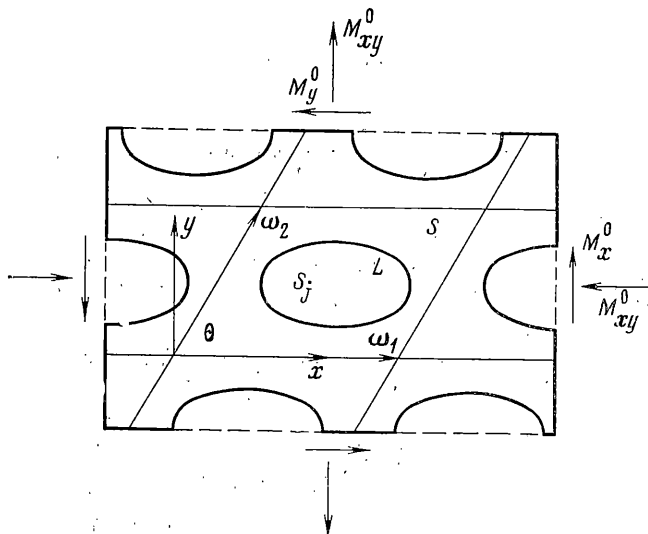
$$f_1 + if_2 = \frac{1}{D(1-\mu)} \int_{z_0}^z \left[M_n + i \int_0^s p(s) ds \right] dz$$

$$\operatorname{Im} c = 0, \quad p(s) = Q_n - \partial M_{ni} / \partial s, \quad \kappa = (3+\mu)/(1-\mu)$$

Здесь E, μ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины, h — толщина пластины, M_n, M_{ni}, Q_n — удельные изгибающий, крутящий моменты и перерезывающая сила, действующие на элемент дуги ds с нормалью \mathbf{n} , c, c_1 — некоторые постоянные, зависящие от положения точки z_0 .

Рассмотрим бесконечную пластину с двоякопериодической системой инородных включений (задача 2) или отверстий (задача 1).

Пусть ω_1, ω_2 ($\operatorname{Im} \omega_1 = 0, \operatorname{Im} \omega_2 / \omega_1 > 0, \arg \omega_2 = \theta$) — основные периоды структуры, S — область, занятая материалом пластины; в основном параллелограмме периодов включение с упругими характеристиками E_j, μ_j или отверстие занимает односвязную область S_j , ограниченную контуром L .



Фиг. 1

(фиг. 1); кривизна линии L удовлетворяет условию Гельдера [8]; контакт пластины и включения идеален.

Изучим двоякопериодическое напряженное состояние такой структуры. При этом углы поворота $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ будут квазипериодическими функциями.

Построим функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ так, чтобы условия двоякопериодичности моментов в пластине удовлетворялись автоматически. В этом случае краевые условия достаточно удовлетворить в основном параллелограмме периодов.

Эти краевые условия для задач 1 и 2 имеют, соответственно, вид

$$-\kappa\varphi(t) + t\overline{\Phi(t)} + \overline{\psi(t)} = ict + c_1 \quad (t \in L) \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) + t\overline{\Phi(t)} + \overline{\psi(t)} &= \varphi_j(t) + t\overline{\Phi_j(t)} + \overline{\psi_j(t)} \\ D(1-\mu) [-\kappa\varphi(t) + t\overline{\Phi(t)} + \overline{\psi(t)}] &= \\ = D_j(1-\mu_j) [-\kappa_j\varphi_j(t) + t\overline{\Phi_j(t)} + \overline{\psi_j(t)}] \quad (t \in L) \end{aligned} \quad (1.3)$$

В задаче 1, модифицируя представления [9] с учетом указанных выше требований, положим

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \omega(t) \zeta(t-z) dt + Az \quad (1.4)$$

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L [\kappa\overline{\omega(t)} + \overline{t\omega'(t)}] \zeta(t-z) dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \omega(t) \rho_1(t-z) dt + Bz \quad (z \in S)$$

Функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\varphi_j(z)$, $\psi_j(z)$ в задаче 2 будем разыскивать в виде [2]:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \omega(t) \zeta(t-z) dt + Az$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L [\varepsilon\overline{\omega(t)} + v\overline{q(t)} - \overline{t\omega'(t)}] \zeta(t-z) dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i} \int_L \omega(t) \rho_1(t-z) dt + Bz \quad (z \in S) \quad (1.5)$$

$$\varphi_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q(t) dt}{t-z}$$

$$\psi_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\alpha\omega(t) + \beta q(t)} - \bar{t} q'(t)}{t-z} dt \quad (z \in S_j)$$

$$\alpha = \frac{1+\kappa}{l-1}, \quad \beta = \frac{1+l\kappa_j}{1-l}, \quad \varepsilon = \frac{\kappa+l}{l-1}$$

$$v = \frac{(1+\kappa_j)l}{1-l}, \quad l = \frac{D_j(1-\mu_j)}{D(1-\mu)}, \quad \kappa_j = \frac{3+\mu_j}{1-\mu_j}$$

В (1.4), (1.5) $\zeta(z)$ — дзета-функция Вейерштрасса [10], $\rho_1(z)$ — мероморфная функция В. Я. Натансона [1], $\omega(t)$, $q(t)$ — неизвестные комплексные функции (плотности) точек контура L .

Постоянные A и B определим из статических условий

$$[-\kappa\varphi(z) + z\overline{\Phi(z)} + \overline{\Psi(z)}]_z^{z+\omega_1} = \frac{\omega_1}{D(1-\mu)} (M_2^\circ - iM_{21}^\circ) \quad (1.6)$$

$$[-\kappa\varphi(z) + z\overline{\Phi(z)} + \overline{\Psi(z)}]_z^{z+\omega_2} = \frac{\omega_2}{D(1-\mu)} (M_1^\circ + iM_{12}^\circ)$$

Механическое содержание понятия средних моментов M_1° , M_2° , M_{12}° , M_{21}° будет дано в следующем пункте.

Подставляя (1.4), (1.5) в (1.6), находим

$$A = \frac{M_x^\circ + M_y^\circ}{2D(1-\mu)(1-\kappa)} - \left(\frac{\delta_1}{\omega_1} - \frac{\pi}{F} \right) a - \frac{\pi}{F} \frac{(b+\kappa\bar{b})}{1-\kappa^2}$$

$$B = \frac{M_y^\circ - M_x^\circ + 2iM_{xy}^\circ}{2D(1-\mu)} + \kappa \frac{\pi}{F} \bar{a} + \left(\frac{\delta_1 - \gamma_1}{\omega_1} - \frac{\pi}{F} \right) a - \left(\frac{\delta_1}{\omega_1} - \frac{\pi}{F} \right) b,$$

$$F = \omega_1 \operatorname{Im} \omega_2 \quad (1.7)$$

$$M_1^\circ = M_x^\circ \sin^2 \theta + M_y^\circ \cos^2 \theta - M_{xy}^\circ \sin 2\theta, \quad M_2^\circ = M_y^\circ$$

$$M_{12}^\circ = \frac{1}{2}(M_x^\circ - M_y^\circ) \sin 2\theta - M_{xy}^\circ \cos 2\theta, \quad M_{21}^\circ = M_{xy}^\circ$$

$$\delta_1 = 2\zeta(\omega_1/2), \quad \gamma_1 = 2\rho_1(\omega_1/2) - \omega_1 \rho(\omega_1/2)$$

где для задачи 1

$$a = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \omega(t) dt, \quad b = \frac{1}{2\pi i} \int_L [\kappa \overline{\omega(t)} dt - \omega(t) \bar{d}t] \quad (1.8)$$

для задачи 2

$$a = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \omega(t) dt, \quad b = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \{[\varepsilon \overline{\omega(t)} + v \overline{q(t)}] dt + \omega(t) \bar{d}t\} \quad (1.9)$$

Положим постоянную c из (1.2), равной

$$c = -\frac{\kappa+1}{2F_0} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\int_L \overline{\zeta(\tau-t)} d\tau \right] \overline{\omega(t)} \bar{d}t \right\} - (\kappa+1) \operatorname{Im} A \quad (1.10)$$

где F_0 — площадь области S_j . При этом любое решение вида (1.4) краевой задачи (1.2) удовлетворяет условию однозначности $\text{про-Re} \int \omega(t) \overline{dt} = 0$ гiba w .

В задаче 2 любое решение вида (1.5) удовлетворяет условию однозначности

$$\text{Re} \int_L [\varepsilon \overline{\omega(t)} + \sqrt{vq(t)} - \bar{t} \omega'(t)] dt = 0$$

автоматически, если только выполняется первое из краевых условий (1.3).

Краевые условия (1.2), (1.3) выполним за счет неизвестных плотностей. Полагая в (1.2) $c_1 = \frac{1}{2\pi i} \int \omega(t) ds$, подставляя вычисленные по формулам Сохоцкого — Племелья [8] предельные значения (1.4) и (1.5) в (1.2) и (1.3) соответственно, приходим к системам интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Так, для задачи 1 эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \kappa \omega(t_0) - \frac{\kappa}{2\pi i} \int_L \omega(t) d \ln \frac{\sigma(t-t_0)}{\sigma(t-t_0)} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\omega(t)} d[(t-t_0)\overline{\zeta(t-t_0)}] - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\omega(t)} \rho_1(t-t_0) dt + \Omega\{\omega(t), t_0\} = - \frac{x_0 M_y^\circ + iy_0 M_x^\circ - i\bar{t}_0 M_{xy}^\circ}{D(1-\mu)} \\ \Omega\{\omega(t), t_0\} = \left\{ (\kappa-1) \text{Re} \left[\left(\frac{\delta_1}{\omega_1} - \frac{\pi}{F} \right) a \right] - \frac{\pi}{F} \bar{b} + \frac{\kappa+1}{4F_0} \bar{d}_0 \right\} t_0 + \\ + \left\{ \kappa \frac{\pi}{F} a - \frac{\bar{y}_1}{\omega_1} \bar{a} + \left(\frac{\delta_1}{\omega_1} - \frac{\pi}{F} \right) (\bar{a} - \bar{b}) \right\} \bar{t}_0 - \frac{1}{2\pi i} \int_L \omega(t) ds \quad (t_0 \in L) \\ d_0 = \frac{-1}{\pi \bar{t}} \text{Im} \int_L \omega(t) G(t) dt, \quad G(t) = \int_L \zeta(\tau-t) \overline{d\tau} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Можно доказать [8, 9, 11], что построенные по описанному здесь алгоритму системы интегральных уравнений разрешимы единственным образом при любой правой части в классе функций, удовлетворяющих вместе со своими первыми производными условию Гельдера.

2. Эффективные жесткостные параметры пластины. Из статических условий (1.6) следует

$$\int_{z_0}^{z+\omega_1} M_n ds = \omega_1 M_2^\circ, \quad \int_{z_0}^{z+\omega_2} M_n ds = |\omega_2| M_1^\circ, \quad \int_{z_0}^{z+\omega_1} (M_{n1} - R_n) ds = \omega_1 M_{21}^\circ + g \quad (2.1)$$

$$\int_{z_0}^{z+\omega_2} (M_{n1} - R_n) ds = -|\omega_2| M_{12}^\circ + g, \quad R_n(s) = \int_{z_0}^z Q_n ds, \quad \text{Im } g = 0$$

где интегралы берутся вдоль сторон параллелограмма периодов Π с началом в произвольной точке $z_0 \in s$, g — несущественная в дальнейшем постоянная, зависящая от положения точки z_0 .

Вычисляя энергию упругих деформаций фундаментальной ячейки с учетом двоякопериодичности моментов, квазипериодичности углов поворота и (2.1), получаем

$$\begin{aligned}
 U &= -\frac{1}{2} \iint_{\Pi} \left(M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dF = \\
 &= -\frac{1}{2} \left\{ \omega_1 M_2^\circ \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_z^{z+\omega_2} + |\omega_2| M_1^\circ \left[\frac{\partial w}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial w}{\partial y} \cos \theta \right]_z^{z+\omega_1} + \right. \\
 &\quad \left. + \omega_1 M_{21}^\circ \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_z^{z+\omega_2} + |\omega_2| M_{12}^\circ \left[\frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta \right]_z^{z+\omega_1} \right\}
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Средние кривизны κ_x° , κ_y° и кручение τ° пластины с регулярной структурой имеют вид

$$\begin{aligned}
 \kappa_x^\circ &= -\frac{1}{\omega_1} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_z^{z+\omega_1}, \quad \kappa_y^\circ = \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\omega_1} \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_z^{z+\omega_1} - \frac{1}{|\omega_2| \sin \theta} \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_z^{z+\omega_2} \\
 \tau^\circ &= \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\omega_1} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_z^{z+\omega_1} - \frac{1}{\omega_1} \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_z^{z+\omega_1} - \frac{1}{|\omega_2| \sin \theta} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_z^{z+\omega_2}
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$\theta = \arg \omega_2$

Преобразовывая (2.2) с учетом (1.7) и (2.3), находим

$$U = 1/2 F (M_x^\circ \kappa_x^\circ + M_y^\circ \kappa_y^\circ + M_{xy}^\circ \tau^\circ) \quad (2.4)$$

Следовательно, величины M_1° , M_2° , M_{12}° , M_{21}° и связанные с ними M_x° , M_y° , M_{xy}° можно трактовать как средние моменты в структуре, а коэффициенты пропорциональности между средними кривизнами и средними моментами — как эффективные жесткостные параметры структуры.

Перейдем к их определению. Для этого вычислим при помощи формул (1.4), (1.4), (1.5), (1.7) правые части (2.3). Получим

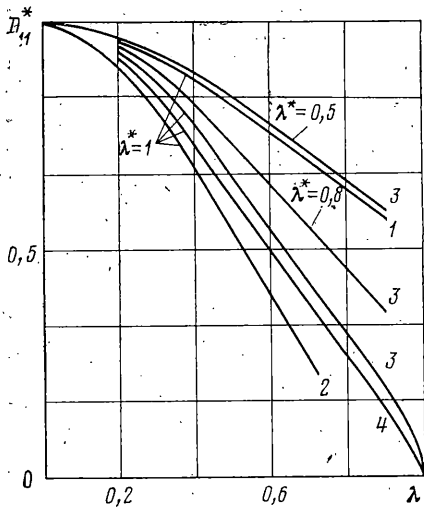
$$\begin{aligned}
 -\kappa_x^\circ &= \frac{(1+\kappa)M_x^\circ + (3-\kappa)M_y^\circ}{2D(1-\mu)(1-\kappa)} + (1+\kappa) \frac{\pi}{F} \operatorname{Re} \left(a - \frac{b}{1-\kappa} \right) \\
 -\kappa_y^\circ &= \frac{(3-\kappa)M_x^\circ + (1+\kappa)M_y^\circ}{2D(1-\mu)(1-\kappa)} - (1+\kappa) \frac{\pi}{F} \operatorname{Re} \left(a + \frac{b}{1-\kappa} \right) \\
 \tau^\circ &= 2 \left[\frac{M_{xy}^\circ}{D(1-\mu)} - (1+\kappa) \frac{\pi}{F} \operatorname{Im} a \right]
 \end{aligned} \quad (2.5)$$

В силу линейности задачи

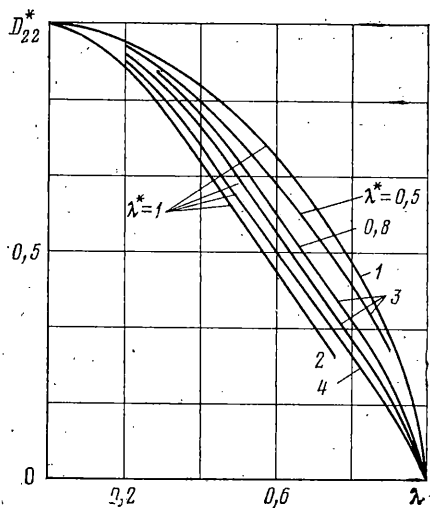
$$\begin{aligned}
 a &= a_1 M_x^\circ + a_2 M_y^\circ + a_{12} M_{xy}^\circ, \quad b = b_1 M_x^\circ + b_2 M_y^\circ + b_{12} M_{xy}^\circ \\
 a_1 &= a, \quad b_1 = b \quad \text{при } M_x^\circ = 1, \quad M_y^\circ = M_{xy}^\circ = 0 \\
 a_2 &= a, \quad b_2 = b \quad \text{при } M_y^\circ = 1, \quad M_x^\circ = M_{xy}^\circ = 0 \\
 a_{12} &= a, \quad b_{12} = b \quad \text{при } M_{xy}^\circ = 1, \quad M_x^\circ = M_y^\circ = 0
 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.5), устанавливаем связь между средними моментами и кривизнами

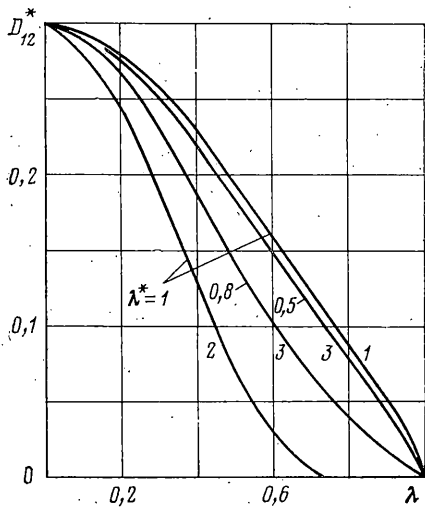
$$\begin{aligned}
 \kappa_x^\circ &= 12 \{ \langle a_{11} \rangle M_x^\circ + \langle a_{12} \rangle M_y^\circ + \langle a_{16} \rangle M_{xy}^\circ \} / h^3 \\
 \kappa_y^\circ &= 12 \{ \langle a_{21} \rangle M_x^\circ + \langle a_{22} \rangle M_y^\circ + \langle a_{26} \rangle M_{xy}^\circ \} / h^3 \\
 \tau^\circ &= 12 \{ \langle a_{61} \rangle M_x^\circ + \langle a_{62} \rangle M_y^\circ + \langle a_{66} \rangle M_{xy}^\circ \} / h^3 \\
 \langle a_{11} \rangle &= \frac{1}{E} [1 - R \operatorname{Re}(b_1 + ra_1)], \quad \langle a_{12} \rangle = \frac{-1}{E} [\mu + R \operatorname{Re}(b_2 + ra_2)] \\
 \langle a_{16} \rangle &= \frac{-R}{E} \operatorname{Re}(b_{12} + ra_{12}), \quad \langle a_{21} \rangle = \frac{-1}{E} [\mu + R \operatorname{Re}(b_1 - ra_1)]
 \end{aligned} \quad (2.7)$$



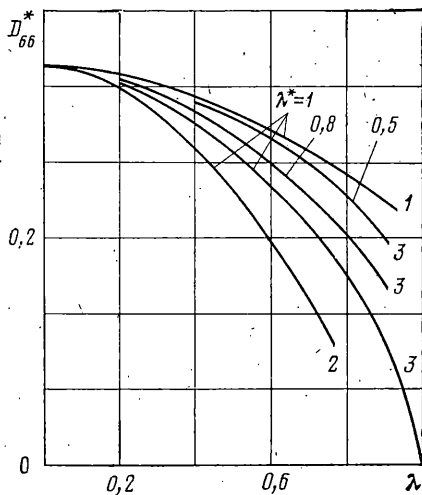
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

$$\begin{aligned}
 \langle a_{22} \rangle &= \frac{1}{E} [1 - R \operatorname{Re}(b_2 - r a_2)], & \langle a_{26} \rangle &= -\frac{R}{E} \operatorname{Re}(b_{12} - r a_{12}) \\
 \langle a_{61} \rangle &= -\frac{2R}{E} r \operatorname{Im} a_1, & \langle a_{62} \rangle &= -\frac{2R}{E} r \operatorname{Im} a_2, & R &= \frac{2\pi(1-\mu)D}{F}
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

$$r = 2(1+\mu)/(1-\mu), \quad D = E h^3 / [12(1-\mu^2)] \quad \langle a_{66} \rangle = \frac{1}{E} [2(1+\mu) - 2Rr \operatorname{Im} a_{12}]$$

Из (2.4) и теоремы взаимности Бетти следует симметричность и положительная определенность матрицы коэффициентов $\langle a_{ij} \rangle$:

Разрешая систему (2.7) относительно средних моментов, получаем

$$\begin{aligned}
 M_x^\circ &= \langle D_{11} \rangle \kappa_x^\circ + \langle D_{12} \rangle \kappa_y^\circ + \langle D_{16} \rangle \tau^\circ \\
 M_y^\circ &= \langle D_{12} \rangle \kappa_x^\circ + \langle D_{22} \rangle \kappa_y^\circ + \langle D_{26} \rangle \tau^\circ \\
 M_{xy}^\circ &= \langle D_{16} \rangle \kappa_x^\circ + \langle D_{26} \rangle \kappa_y^\circ + \langle D_{66} \rangle \tau^\circ
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

где $\langle D_{ij} \rangle$ — эффективные жесткостные параметры структуры.

На фиг. 2–5 приведены результаты расчетов величин $D_{11}^* = \langle D_{11} \rangle / D$, $D_{22}^* = \langle D_{22} \rangle / D$, $D_{12}^* = \langle D_{12} \rangle / D$, $D_{66}^* = \langle D_{66} \rangle / D$, $D = Eh^3 / [12(1 - \mu^2)]$ для стальной пластины ($E = 2 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu = 0,3$), ослабленной эллиптическими отверстиями. Относительные размеры отверстия в фундаментальной ячейке характеризуются параметрами $\lambda^* = b/a$, $\lambda = 2a/\omega_1$ (a , b — полуоси эллипса). Кривые 1 соответствуют прямоугольной решетке ($\omega_2 = 2i\omega_1$), 2 — параллелограммной ($\omega_2 = \omega_1 \exp(i\pi/4)$), 3 — квадратной ($\omega_2 = i\omega_1$), 4 — треугольной ($\omega_2 = \omega_1 \exp(i\pi/3)$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.
2. Фильштинский Л. А. К теории упругих неоднородных сред с регулярной структурой. — ПММ, 1973, т. 37, вып. 2, с. 262–273.
3. Вахвалов Н. С. Осреднение уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами. — В кн.: Проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1977, с. 34–51.
4. Бердичевский В. Л. Об осреднении периодических структур. — ПММ, 1977, т. 41, вып. 6, с. 993–1006.
5. Дюво Ж. Функциональный анализ и механика сплошной среды. Приложение к изучению композиционных упругих материалов с периодической структурой — гомогенизация. — В кн.: Теоретическая и прикладная механика. М.: Мир, 1979, с. 323–345.
6. Лехницкий С. Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит. — ПММ, 1938, т. 2, вып. 2, с. 181–210.
7. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. М.—Л.: Гостехиздат, 1951. 496 с.
8. Мухомелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 599 с.
9. Шерман Д. И. К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных на границе смещениях. — Докл. АН СССР, 1940, т. 27, № 9, с. 911–913.
10. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968. 648 с.
11. Шерман Д. И. Плоская деформация в изотропной неоднородной среде. — ПММ, 1943, т. 7, вып. 4, с. 301–309.

Москва, Сумы

Поступила в редакцию
1.IV.1980