

УДК 539.3

ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ,
ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ
НЕПЕРИОДИЧЕСКИ НАГРУЖЕННЫХ НАКЛОННЫХ
ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ СТРИНГЕРОВ

КАМЫШЕВА Г. А., НУЛЛЕР Б. М., РЫВКИН М. Б.

Элементы конструкций, композиты, материалы, ослабленные трещинами и включениями, часто имеют геометрически регулярную структуру с какой-либо группой симметрии. При этом они могут работать в условиях с иной группой симметрии или совсем несимметричных. Общим проблемам, связанным с постановкой и решением соответствующих краевых задач, посвящены работы [1-4]; в [5] с использованием циклической симметрии решена задача о деформации плоскости, ослабленной системой радиальных трещин; трансляционная симметрия упругой плоскости, ослабленной трещинами с наполнителем или усиленной одинаково нагруженными стрингерами, учтена в [6].

В данной работе методика [5] применяется к контактной задаче о деформации бесконечной упругой пластины, подкреплённой периодической системой полубесконечных прямолинейных стрингеров, концы которых лежат на одной прямой, полностью сцеплены с пластиной, не сопротивляются изгибу, параллельны друг другу и составляют с указанной прямой произвольный угол. К концам стрингеров приложена циклическая либо произвольная система продольных растягивающих сил. Решение получено в квадратурах. Выписана формула для коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности концов стрингеров. В результате численного анализа показана возможность использования простой приближенной формулы для коэффициента интенсивности.

Пусть упругая плоскость X, Y — пластина толщины h с коэффициентом Пуассона ν и модулем сдвига G — подкреплена периодической системой полубесконечных стрингеров (фигура), которые имеют жесткость на растяжение D , при $Y \leq 0$ полностью сцеплены с плоскостью, не сопротивляются изгибу и выходят на прямую $Y=0$ под углом α с шагом $2 \sin^{-1} \alpha$, $0 < \alpha \leq 1/2\pi$. К концу k -го стрингера приложена продольная растягивающая сила P_k ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$); предполагается, что постоянные составляющие уравновешивающего поля напряжений на бесконечности могут быть отличными от нуля только в изотропной части плоскости $Y > 0$. Требуется найти напряженно-деформированное состояние плоскости с конечной локальной энергией в окрестности концов стрингеров.

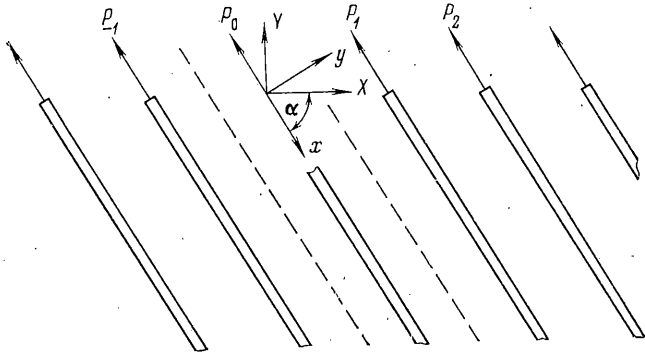
Рассмотрим вначале случай, когда одинаковая нагрузка приложена к стрингерам, номера которых кратны N , а другие стрингеры свободны

$$P_k = P(k=mN), P_k = 0 (k \neq mN) \quad (m=0, \pm 1, \dots) \quad (1)$$

Суперпозиция N решений этой задачи с аргументами X , сдвинутыми на величину $2l \sin^{-1} \alpha$ ($l=0, 1, \dots, N-1$), приводит, очевидно, к решению задачи с произвольной циклической нагрузкой при длине цикла N .

Введем в каждой полосе периодов одинаковые местные системы координат x, y так, чтобы стрингеры совпали с лучами $x \geq 0, y=0$, и, следуя [5], построим решение вспомогательной краевой задачи для нулевой полосы периодов $-\infty < x < \infty, -1 \leq y \leq 1$, показанной на фигуре пунктиром, при частной циклической нагрузке с периодом $2\pi\varphi^{-1}$:

$$P_k = P e^{i k \varphi}, \quad \varphi = 2\pi l N^{-1} \quad (l=0, 1, \dots, N-1) \quad (2)$$



Обозначим через $u_{j1}(x, y)$ и $u_{j2}(x, y)$ перемещения вдоль x и y , через $u_{j3}(x, y)$ и $u_{j4}(x, y)$, $u_{j5}(x, y)$ — касательные и нормальные по осям y и x напряжения, индексом $j=1$ ($j=2$) обозначим принадлежность к полосе $0 \leq y \leq 1$ ($-1 \leq y \leq 0$). Учитывая характер сцепления стрингеров с пластиной и вид их дифференциального уравнения, получим следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} u_{1s}^{k2}(x, 0) &= u_{2s}^{k2}(x, 0) \quad (s=1, 2, 4) \quad (-\infty < x < \infty) \\ \tau^k(x) &= u_{13}^{k2}(x, 0) - u_{23}^{k2}(x, 0) = 0 \quad (x < 0) \\ \eta^k(x) &= D \partial^2 u_{11}^{k2}(x, 0) / \partial x^2 + h \tau^k(x) = 0 \quad (x \geq 0) \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь верхние индексы $k2$ соответствуют номеру k -й полосы периодов и номеру условия нагружения (2). Условие равновесия k -го стрингера с учетом (2) и условия на бесконечности приводит к равенству

$$h \int_0^{\infty} \tau^k(x) dx = P_k \quad (4)$$

Благодаря тому, что область в направлении X обладает трансляционной, а нагрузка — циклической симметрией (2), на границе k -й полосы периодов в силу линейности задачи должны выполняться условия

$$u_{1s}^{k2}(x+a, 1) = e^{i\varphi} u_{2s}^{k2}(x-a, -1), \quad a = \text{ctg } \alpha \quad (s=1, 2, 3, 4) \quad (5)$$

Решение краевой задачи (3) — (5) при $k=0$ будем искать в форме Папковича — Нейбера с использованием интегрального преобразования Лапласа. Удовлетворив семи основным условиям (3), (5), получим

$$u_{js}^{02}(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_L C(p) U_{js}(p, y) e^{px} dp \quad (6)$$

$$\begin{aligned} U_{j1}(p, y) &= [\varepsilon + (-1)^j \kappa \delta q_j] \sin py - (\rho_j + \kappa \delta \sin 2p) \cos py \\ U_{j2}(p, y) &= \rho_j \sin py + \varepsilon \cos py \\ \delta &= \delta(p) = \text{ch}(2ap + i\varphi) - \cos 2p \\ q_j &= \exp[(-1)^j (2ap + i\varphi)] - \cos 2p \\ \varepsilon &= p \sin 2p [\delta y - 2 \text{sh}(2ap + i\varphi)] \\ \rho_j &= p \{ (-1)^{j+1} y \delta q_j - 2 [1 - \text{ch}(2ap + i\varphi) \cos 2p] \} \\ \kappa &= (3 - \nu) (1 + \nu)^{-1} \end{aligned}$$

где контур L расположен левее мнимой оси. Удовлетворив смешанным условиям (3), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \tau^+(p) &= -4G\kappa_1 p \delta^2(p) C(p), \quad \eta^-(p) = -4G\kappa_1 p R(p) C(p) \\ R(p) &= \delta^2(p) + \kappa F p \sin 2p \delta(p) - 2F p^2 [1 - \text{ch}(2ap + i\varphi) \cos 2p] \end{aligned} \quad (7)$$

$$F=D(4Gh)^{-1}, \quad \kappa_1=2(1-\nu), \quad (7)$$

$$\tau^+(p)=\int_0^{\infty} \tau^{\circ}(x)e^{-px}dx, \quad \eta^-(p)=\int_{-\infty}^0 \eta^{\circ}(x)e^{-px}dx$$

эквивалентную скалярному уравнению Винера — Хопфа [7]:

$$\tau^+(p)=M(p)\eta^-(p), \quad M(p)=\delta^2(p)R^{-1}(p) \quad (p \in L) \quad (8)$$

Здесь $M(p)$ — мероморфная функция, четная при $\varphi=0$, не имеющая полюсов и нулей на мнимой оси ни при каких φ . Ее комплексные двукратные нули a_n ($n=0, 1, 2, \dots$) определяются формулами

$$\begin{aligned} a_n &= (n\pi \pm 1/2\varphi)(1 \mp ai)(1+a^2)^{-1} \\ a_n &= (n\pi \pm 1/2\varphi)(-1 \mp ai)(1+a^2)^{-1} \end{aligned} \quad (9)$$

в которых берутся одновременно верхние либо нижние знаки. При больших n асимптотика полюсов b_n функции $M(p)$ имеет вид

$$\begin{aligned} b_n &= (n\pi \pm 1/2\varphi)(1 \mp ai)(1+a^2)^{-1} + O(\ln n) \\ b_n &= (n\pi \pm 1/2\varphi)(-1 \mp ai)(1+a^2)^{-1} + O(\ln n) \end{aligned} \quad (10)$$

Положим $M(p)=M_1(p)M_2(p)$, $M_1(p)=(\gamma p)^{-1} \operatorname{tg} \pi p$, $\gamma=\kappa F$, $\tau^+(p)=\tau_1^+(p)\tau_2^+(p)$, $\eta^-(p)=\eta_1^-(p)\eta_2^-(p)$. Тогда уравнение (8) распадается на две задачи Римана

$$\tau_1^+(p)=M_1(p)\eta_1^-(p) \quad (p \in L); \quad \tau_2^+(p)=M_2(p)\eta_2^-(p), \quad \operatorname{Re} p=0$$

первая из которых решается элементарно, при помощи факторизации отношения четырех гамма-функций, а вторая — с равным нулю индексом коэффициента на мнимой оси — по формуле Ф. Д. Гахова [8]. Произведение этих решений дает

$$\begin{aligned} \tau^+(p) &= \frac{A\Gamma(p+1/2)}{\gamma\Gamma(p+1)} \exp I(p, \varphi), \\ I(p, \varphi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln M_2(t) dt}{t-p} \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения Коши. В этом смысле при $|t| \rightarrow \infty$ и $p=0$ он сходится экспоненциально, при $p \neq 0$ — как $-|t^3|$, что следует из оценки $M_2(t)=1+|\gamma t|^{-1}+O(te^{-2|t|})$ ($|t| \rightarrow \infty$).

Решение (11) построено в соответствии с условием конечности локальной энергии деформаций в окрестности точки $x=y=0$. Постоянная $A=A(\varphi)$ определяется из условия равновесия (4), т. е. из условия $\tau^+(0)=Ph^{-1}$, и согласно (11), (6) — (8) выражается равенствами

$$\begin{aligned} A &= Ph^{-1}\gamma^{1/2} \exp [I(0, \varphi)] \quad (\varphi \neq 0) \\ A &= Ph^{-1}\gamma^{1/2} [1+F \sin^2 \alpha (\kappa + \cos 2\alpha)]^{1/2} \quad (\varphi = 0) \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку $\lim I(0, \varphi)=0$ при $\varphi \rightarrow 0$, функция $A(\varphi)$ при $\varphi=0$ терпит разрыв первого рода. С точки зрения механики это объясняется разрывом в величине постоянных составляющих поля напряжений на бесконечности: при любом $\varphi \neq 0$ приложенная к стрингерам общая нагрузка самоуравновешена, если же $\varphi=0$ [6], то постоянные составляющие напряжений σ_x и τ_{xy} отличны от нуля при $Y \rightarrow \infty$, что связано с выбором контура L слева от мнимой оси.

Для вычисления значений функций (6) часто пользуются разложением интегралов в ряды по вычетам в полюсах функции $C(p)$, т. е. в точках a_n при $x < 0$ и b_n при $x > 0$. В данном случае, как и в [6], нужно иметь

в виду, что указанные ряды сходятся только в точках (x, y) , лежащих вне треугольников с вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(a, 1)$ и $(0, 0)$, $(0, -1)$, $(-a, -1)$. Это можно показать, учитывая равенства (6), (9), (10).

Определим характер особенности и коэффициент интенсивности $K_j^{02}(\varphi)$ напряжений $u_{j3}^{02}(x, y)$ в окрестности точки раздела типов граничных условий $x=y=0$. Разбив поле перемещений на симметричное и косимметричное относительно оси $y=0$, легко видеть, что в первом случае $u_{13}^{02}(x, 0) = -u_{23}^{02}(x, 0)$, $x \in (0, \infty)$ и, следовательно, в силу (7), (3) имеем

$$\int_0^{\infty} u_{13}^{02}(x, 0) e^{-px} dx = \frac{1}{2} \tau^+(p) \quad (13)$$

В случае косимметричного поля $u_{13}^{02}(x, 0) = u_{23}^{02}(x, 0)$, $x \in (0, \infty)$, поэтому первое условие (3) выполняется для всех $s=1, 2, 3, 4$, стрингер не взаимодействует с пластиной, точка $x=y=0$ не является точкой раздела, и напряжения в ней непрерывны.

Таким образом, согласно (13) и теореме, связывающей асимптотику оригинала и трансформанты ([7], стр. 48), касательные контактные напряжения у конца стрингера целиком определяются поведением функции $\tau^+(p)$ при $p \rightarrow \infty$. Учитывая (13), (11), при $x \rightarrow +0$ получим

$$u_{j3}^{02}(x, 0) = K_j^{02}(\varphi) x^{-1/2} + O(1), \quad K_j^{02}(\varphi) = A(\varphi) (-1)^{j+1} (2\sqrt{\pi} \gamma)^{-1} \quad (14)$$

Используя решение $u_{js}^{k2} = u_{js}^{02} e^{ikh\varphi}$ вспомогательной задачи (2) и формулу [9] разложения единицы на неприводимые взаимно-ортогональные представления группы циклической симметрии $e^{ikh\varphi}$ ($k=0, 1, \dots, N-1$), нетрудно выписать решение задачи (1) в k -й полосе периодов

$$u_{js}^{h1}(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} u_{js}^{02}(x, y) e^{ikh\varphi} \quad (h=0, \pm 1, \dots) \quad (15)$$

Решение в k -й полосе периодов для случая произвольной циклической нагрузки P_k с длиной цикла N имеет вид

$$u_{js}^{h1}(x, y) = P^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} P_n u_{js}^{h-n, 1}(x, y) \quad (16)$$

Коэффициенты интенсивности касательных напряжений (15) и (16) выражаются соответственно формулами

$$K_j^{h1} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} K_j^{02}(\varphi) e^{ikh\varphi}, \quad K_j^h = P^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} P_n K_j^{h-n, 1} \quad (17)$$

В решениях (15), (16) постоянные составляющие поля напряжений на бесконечности определяются слагаемыми, для которых $\varphi=0$, поэтому они могут быть отличными от нуля только при $Y \rightarrow \infty$. Если по условию задачи требуется, чтобы поле напряжений при $Y \rightarrow \pm \infty$ имело какой-либо иной вид, то к решениям (15), (16) следует добавить полученное в [6] трехпараметрическое решение однородной задачи $P_k=0$.

Перейдем к случаю нециклического, произвольного распределения сил P_k . Учитывая связь (2) между φ и N , из (15) получим

$$u_{js}^{h1}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{N-1} u_{js}^{02}(x, y) e^{ikh\varphi} \Delta\varphi, \quad \Delta\varphi = 2\pi N^{-1} \quad (18)$$

Правая часть выражения (18) представляет собою интегральные суммы Римана функций $u_{js}^{02}(x, y) e^{ikh\varphi}$ параметра φ в интервале $(0, 2\pi)$ и, как

Таблица 1

a	$k=-2$	$k=-1$	$k=0$	$k=1$	$k=2$
0	0	0	0,399	0	0
0,1	-0,000	-0,001	0,399	0,001	0,000
1,0	-0,009	-0,018	0,398	0,017	0,008
10,0	-0,005	-0,010	0,398	0,009	0,004

Таблица 2

k	$F=1$	$F=4$	$F=6$	$F=10$	$F=20$	$F=40$
0	0,399	0,199	0,163	0,126	0,089	0,063
0	0,398	0,197	0,160	0,124	0,087	0,061
-1	-0,018	-0,018	-0,017	-0,015	-0,012	-0,009
1	0,017	0,015	0,014	0,012	0,010	0,007

видно из (6), (7), (11); эти функции интегрируемы по φ . Таким образом, в пределе при $N \rightarrow \infty$, когда полоса цикличности, расширяясь, превращается в плоскость, из (18) следует

$$u_{js}^{k*}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{js}^{02}(x, y) e^{ikh\varphi} d\varphi, \quad K_j^{k*} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_j^{02}(\varphi) e^{ikh\varphi} d\varphi \quad (19)$$

Это решение для k -й полосы периодов подкрепленной пластины естественно назвать функцией Грина рассматриваемой задачи, так как оно соответствует нагружению одного стрингера с номером $k=0$.

Для исследования коэффициента K_j^{k*} , играющего важную роль в теории разрушения, были проведены численные расчеты по формулам (19), (14), (12), (11). В табл. 1 даны значения коэффициента K_1^{k*} при $\nu=1/3$, $F=1$, $Ph^{-1}=2$ для некоторых углов наклона стрингеров и для $k=0, \pm 1, \pm 2$. Если положить $\alpha=1/2\pi$ ($a=0$), то функция $M_2(t)$ станет четной, следовательно, $I(0, \varphi) \equiv 0$; учитывая ортогональность функций $e^{ih\varphi}$ в интервале $(0, 2\pi)$, в силу (19), (14), (12) получим

$$K_1^{0*} = 1/2\pi^{-1/2} Ph^{-1} \gamma^{-1/2}, \quad K_1^{k*} = 0 \quad (k \neq 0) \quad (20)$$

Этот несколько неожиданный результат показывает, что при $\alpha=1/2\pi$ касательные напряжения неограниченно растут только в окрестности конца нагруженного стрингера. Из табл. 1 видно, что значения K_1^{0*} почти не зависят от α (как и коэффициент интенсивности в задаче об одиночном стрингере [10]) и на порядок превосходят значения K_1^{k*} ($k=\pm 1$). В первой строке табл. 2 выписаны по формуле (20) коэффициенты K_1^{0*} при $\alpha=1/2\pi$, $\nu=1/3$, $Ph^{-1}=2$ и разных значениях F . Следующие строки, соответствующие углу $\alpha=1/4\pi$ и тем же ν , Ph^{-1} , F , показывают типичную для всех α зависимость коэффициентов K_1^{k*} от жесткости F . Уже в соседних (третья и четвертая строки) к нагруженному (вторая строка) стрингерах коэффициенты интенсивности оказываются на порядок меньше, чем коэффициенты K_1^{0*} , которые, как показывает сопоставление первой и второй строк, мало отличаются от K_1^{0*} при $\alpha=1/2\pi$. Таким образом, с достаточной степенью приближения во всем диапазоне изменения параметров F и α вместо (19) можно пользоваться более простыми формулами (20).

Общее решение при произвольно заданных силах P_k без учета условий на бесконечности строится суперпозицией решений (19), сдвинутых в направлении X

$$u_{js}^k(x, y) = P^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n u_{js}^{k-n,*}(x, y), \quad K_j^k = P^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n K_j^{k-n,*} \quad (21)$$

В отличие от (15), (16) решение (21) может порождать при соответствующей нагрузке однородные поля напряжений как при $Y \rightarrow \infty$, так и при $Y \rightarrow -\infty$, поскольку на значение интеграла (19) скачок функции $A(\varphi)$ в одной точке $\varphi=0$ влияния не оказывает. Например, если $\alpha = \pi/2$, $P_h = P$ и $F \rightarrow 0$, то $\sigma_x \rightarrow \mp P/4$ при $Y \rightarrow \pm \infty$ (что легко проверить суммированием решений задачи о сосредоточенной силе в плоскости), периодическая система сил уравнивается на бесконечности однородными и одинаковыми по модулю сжимающими при $Y \rightarrow \infty$ и растягивающими при $Y \rightarrow -\infty$ нормальными напряжениями. При произвольной жесткости F модули напряжений σ_x не остаются одинаковыми, когда $Y \rightarrow \pm \infty$; условия на бесконечности становятся по существу неконтролируемыми.

Для того чтобы удовлетворить этим условиям, целесообразно выделить среднюю в полосе периодов постоянную составляющую нагрузки

$$Q = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \sum_{n=-s}^s P_n$$

и решить задачу для периодической системы сил Q с требуемыми условиями на бесконечности по формулам [6]. Решение задачи с самоуравновешенной нагрузкой $P_n - Q$ (вместо P_n) в форме (21) не дает постоянных составляющих в напряжениях на бесконечности и, следовательно, в сумме с первым решением соответствует всем поставленным условиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурьшкин М. Л. О статических и динамических расчетах одномерных регулярных систем. — ПММ, 1975, т. 39, вып. 3, с. 513–519.
2. Бурьшкин М. Л. Применение теории представлений групп к линейным задачам механики консервативных систем. — Изв. АН АрмССР. Механика, 1975, т. 28, с. 68–75.
3. Бурьшкин М. Л. Обобщенная периодическая задача теории упругости. — ПММ, 1978, т. 42, вып. 3, с. 521–531.
4. Бурьшкин М. Л. О функциях Колосова — Мухелишвили в обобщенных симметричных задачах теории упругости. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1979, № 5, с. 344–348.
5. Нуллер Б. М., Рыбкин М. Б. Об одном методе решения циклических краевых задач. — Изв. н.-и. ин-та гидротехники, 1979, т. 129, с. 9–13.
6. Камышева Г. А., Нуллер Б. М. Об одном классе смешанных периодических задач теории упругости, разрешимых в квадратурах. — Докл. АН СССР, 1979, т. 249, № 2, с. 311–314.
7. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 639 с.
9. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике. М.: Физматгиз, 1957. 354 с.
10. Нуллер Б. М., Рыбкин М. Б. Передача усилий на упругую клиновидную пластинку через впаянный в нее стержень. — Прикл. механика, 1976, т. 12, № 10, с. 129–133.

Ленинград

Поступила в редакцию
24.VII.1980