**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1982**

УДК 539.376

МЕТОДИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ ЯДРА НАСЛЕДСТВЕННОГО ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ ПО ДАННЫМ ДИНАМИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

ОСОКИН А. Е., ПРЯХИН Г. В.

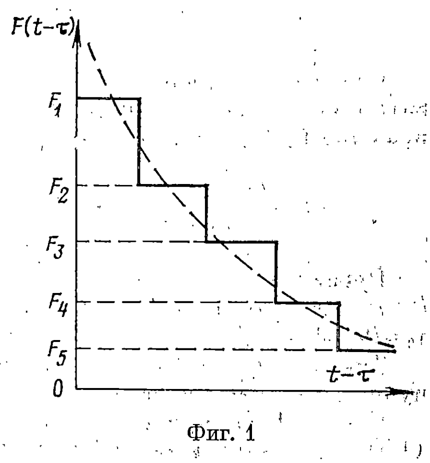
В современной технике, как известно, широко используются элементы конструкций из полимеров и композитов. При деформировании этих материалов существенны временные эффекты, для математического описания которых как в статике, так и в динамике успешно применяется нелинейная наследственная теория [1–3]. В случае одноосного нагружения наследственное определяющее уравнение можно выбрать в виде

$$\varphi[\varepsilon(t)] = \sigma(t) + \int_0^t F(t-\tau)\,\sigma(\tau)\,d\tau \tag{0.1}$$

Здесь σ – напряжение, ε – деформация, t – время, $\sigma=\varphi[\varepsilon]$ – уравнение кривой мгновенного деформирования, $F(t-\tau)$ – ядро интегрального уравнения, определяющее наследственные свойства материала.

Задачу восстановления входящих в (0.1) функций и параметров по экспериментальным данным будем, следуя [4, 5], называть обратной задачей.

В [6] поставлена и решена обратная задача для частного случая уравнения (0.1), когда $\varphi[\varepsilon]=E\varepsilon$, а $F(t-\tau)=k\vartheta_{-\alpha}(\beta,\ t-\tau)$ – дробно-экспоненциальная функция Работнова [7], при этом эксперименты представляют собой серию квазистатических испытаний при постоянных напряжениях (ползучесть). Методика, свободная от указанных ограничений, построена в [5], где обработаны результаты испытаний в режимах $\sigma=\text{const}$ и $d\sigma/dt=\text{const}$ для дробно-экспоненциального ядра и ядра Абеля $F(t-\tau)=k(t-\tau)^{-\alpha}$, проведено сравнение определяющих уравнений с разными ядрами.



Фиг. 1

Таким образом, при обработке результатов квазистатических экспериментов ядра выбирались из заранее определенных классов функций, каждая из которых содержала два или три параметра. Увеличение числа N таких параметров приводит к увеличению объема вычислений при решении обратной задачи по закону A^N, где A – число действий, необходимое для решения обратной задачи в случае однопараметрического ядра [5].

В публикуемой работе предложена методика восстановления ядра по результатам волнового эксперимента, в котором измерению подлежат напряжения в точке жесткого закрепления стержня или нити из исследуемого материала, а нагружение производится продольным растягивающим ударом с постоянной скоростью. При обработке таких экспериментальных данных оказывается возможным последовательно восстанавливать параметры ядра, заданного в виде произвольного набора ступенек. Такое ядро показано на фиг. 1 и определяется N параметрами $F_1, F_2, \ldots, F_N$. С ростом N объем вычислений, как было отмечено в [8], растет по закону AN. Методика реализована в программе, составленной на языке ФОРТРАН, при помощи которой обработаны результаты экспериментов, проведенных с капроновыми нитями.

1. Получим систему уравнений деформирования стержня при продольном ударе в нормальной характеристической форме, чтобы главная дифференциальная часть содержала производные только по характеристическим направлениям. Для этого к уравнениям движения необходимо добавить дифференциальное следствие определяющего уравнения (0.1).

Возьмем производную от (0.1) по времени. Рассмотрим сначала ядра с интегрируемой особенностью при $t=\tau$. Из результатов [9, 10] следует, что в этом случае как напряжения, так и их производные непрерывны на фронте продольной волны, и из (0.1), учитывая коммутативность свертки $F*\sigma$, получим

$$\rho\frac{\partial\varepsilon(x,t)}{\partial t}=c(\varepsilon)^{-2}\left\{\frac{\partial\sigma(x,t)}{\partial t}+\sigma(x,0)F(t)+\int_0^t\frac{\partial\sigma(x,t-\tau)}{\partial t}F(\tau)\,d\tau\right\} \tag{1.1}$$

Здесь x — пространственная лагранжева координата, ρ — плотность материала в недеформированном состоянии, $c(\varepsilon)=[d\varphi(\varepsilon)/(\rho d\varepsilon)]^{1/2}$ — скорость продольной волны (волны сжатия или растяжения).

Для регулярного ядра, когда $F(0)$ ограничено, и на фронте продольной волны существуют разрывы напряжений, искомое дифференциальное следствие удобно выписать в виде

$$\rho\frac{\partial\varepsilon(x,t)}{\partial t}=c(\varepsilon)^{-2}\left\{\frac{\partial\sigma(x,t)}{\partial t}+\sigma(x,t)F(0)+\int_0^t\sigma(x,\tau)\frac{\partial F(t-\tau)}{\partial t}\,d\tau\right\} \tag{1.2}$$

Соотношения, аналогичные (1.2), использованы в [11] при построении характеристической разностной схемы для численного решения уравнений деформирования наследственно-упругой гибкой нити при поперечном ударе.

При продольном ударе с постоянной скоростью V по точке с лагранжевой координатой $x=0$ недеформированного покоящегося стержня, жестко закрепленного в точке $x=l$, для напряжений, деформаций и скоростей $v(x,t)$ следует поставить начальные и граничные условия

$$v(x,0)=\sigma(x,0)=\varepsilon(x,0)=0\qquad(0\leqslant x\leqslant l,\ t\geqslant 0) \tag{1.3}$$

$$v(0,t)=V,\qquad v(l,t)=0 \tag{1.4}$$

Слабосингулярное ядро (пунктирная кривая на фиг. 1) можно представить в виде ступенчатой функции. Добавим к уравнениям движения соотношение (1.2), которое с учетом (1.3), (1.4) перепишем в виде

$$\rho\frac{\partial\varepsilon(x,t)}{\partial t}=c(\varepsilon)^{-2}\left\{\frac{\partial\varepsilon(x,t)}{\partial t}+\int_0^t\frac{\partial\sigma(x,t-\tau)}{\partial t}F(\tau)\,d\tau\right\} \tag{1.5}$$

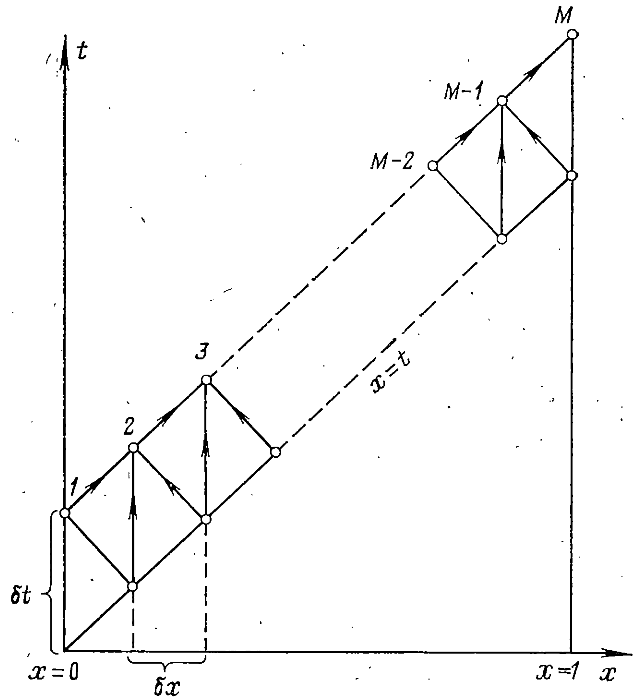
Перейдем к безразмерным независимым и зависимым переменным: $t^\circ=t/\tau_0$, $x^\circ=x/l$, $\sigma^\circ=\sigma/\sigma_0$, $v^\circ=v/c_0$, $c^\circ(\varepsilon)=c(\varepsilon)/c_0$, $F^\circ=\tau_0F$, $V^\circ=V/c_0$, $c_0=c(0)$, $\tau_0=l/c_0$, $\sigma_0=\rho c_0^2$.

Так как ниже будут встречаться только безразмерные переменные, нулик в верхнем индексе опускается.

Следуя [12], приведем систему из уравнений движения и уравнения (1.5) к нормальной характеристической форме

$$\frac{dx}{dt}=\pm c(\varepsilon),\quad c(\varepsilon)\left[\frac{dv}{dt}\right]^{\pm}\mp\left[\frac{d\sigma}{dt}\right]^{\pm}=\pm\int_0^t\frac{\partial\sigma(t-\tau)}{\partial t}F(\tau)\,d\tau \tag{1.6}$$

$$\frac{dx}{\partial t}=0,\quad c(\varepsilon)^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\int_0^t\frac{\partial\sigma(t-\tau)}{\partial t}F(\tau)\,d\tau \tag{1.7}$$



Фиг. 2

где $[dv/dt]^{\pm}=\partial v/\partial t\pm c\partial v/\partial x$ — полная производная по времени вдоль характеристик $dx=\pm c dt$, $0\leqslant x\leqslant 1$. При этом $v(1, t)=0$.

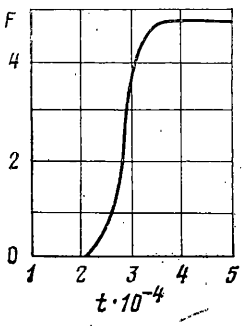
Заменяя дифференциальные соотношения на характеристиках разностными, получим оператор пересчета во внутренних точках области на плоскости независимых переменных, в которой ищем решение. Явное выражение этого оператора можно найти в [12]. В точке удара $x=0$ и точке закрепления $x=1$ из трех соотношений (1.6), (1.7) следует оставить только два, соответствующих характеристикам, идущим внутрь области $0\leqslant x\leqslant 1$ (см. фиг. 2), дополняя их граничными условиями (1.4).

2. Построенная схема является вариантом схемы Куранта — Изаксона — Рисса [12—14], и достаточное условие устойчивости имеет вид [12]: $c_m\delta t\leqslant\delta x$, где δt и δx — шаги дискретизации по времени и лагранжевой координате, $c_m=\text{mix}\,|c(\varepsilon)|$.

Отметим некоторые особенности организации счета при программной реализации метода. Массивы σ и v располагались не по временным слоям, как в [12], а по характеристикам, так что в элементах массива $\sigma(1)$, $\sigma(2)$, ..., $\sigma(M)$, где $M=1/\delta x+1$, находились значения напряжений в точках плоскости t, x, отмеченных цифрами 1, 2, 3, ..., $M-1$, M на фиг. 2.

Методика решения обратной задачи основана на следующей особенности решения разностных уравнений, отмеченной в [8] — это решение на характеристике *1* (см. фиг. 2) определяется только значением F_1, на характеристике *2* — значениями F_1 и F_2, на характеристике *3* — F_1, F_2 и F_3, и т. д. вплоть до F_N. Это дает возможность построить для вычисления $F_1, F_2, \ldots, F_N$ такой алгоритм: полученная при эксперименте зависимость $\sigma=\psi(t)$, где $\psi(t)$ — напряжения в точке жесткой заделки, разбивается с шагом δt на последовательность $\sigma_k=\psi(k\delta t)$. Затем, варьируя F_1 и проводя численный просчет по первой характеристике с каждым из этих значений, выбираем такое F_1, при котором реализуется минимум невязки $|\sigma_1-\sigma(1, M\delta t)|$. Для поиска этого минимума можно воспользоваться любым из известных методов (градиентного спуска, случайного поиска, формального поиска).

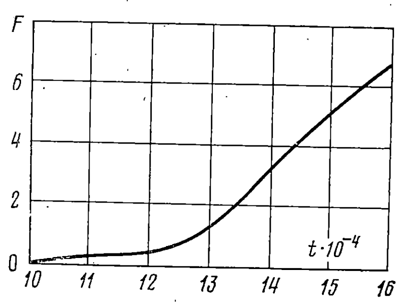
На второй характеристике, исходя из известного решения на первой характеристике, аналогично ищем F_2, на третьей — F_3 и т. д. С ростом числа параметров N объем вычислений возрастает линейно.



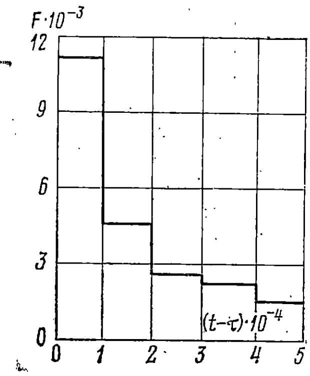
Фиг. 3

Если совокупность параметров ядра $(F_1, F_2, \ldots, F_N)$ и массив $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N)$ рассматривать как векторы евклидова пространства E_N размерности N и обозначить F и σ, то построенный алгоритм определяет некоторый оператор A: $E_N \to E_N$, а процесс поиска оптимального ядра есть решение операторного уравнения $A(F) = \sigma$ методом выбора решения по минимальной невязке $\|A(F) - \sigma\|$ [4].

Программа, реализующая методику, составлена на языке ФОРТРАН-4 ЕС ЭВМ. В качестве тесто-



Фиг. 4



Фиг. 5

вой задачи было проведено вычисление ядер наследственности по зависимостям напряжение — время, полученным при решении уравнений движения совместно с известным определяющим уравнением по программе, описанной в [12]. При $\delta x = 0{,}01$ максимальное уклонение восстановленного ядра от исходного не превышало 1,7%.

Эксперименты состояли в измерении напряжений, возникающих в точке жесткого закрепления капроновых нитей при нагружении продольным ударом с постоянной скоростью от 0,1 до 1,5 м/с. Длина нитей изменялась в пределах от 0,5 до 1,8 м. Для измерения усилий использовался пьезокерамический датчик из титаната бария [15—17]. Сигнал выводился на экран осциллографа С 8-13. Для оценки «размазывания» импульса усилий в точке жесткого закрепления из-за немгновенного характера нагружения и инерционности измерительной аппаратуры был проведен тестовый эксперимент, при котором продольным ударом нагружалась стальная проволока ОВС-0,3. Осциллограмма, полученная при таком нагружении, показана на фиг. 3. По осям абсцисс и ординат отложены значения времени в секундах и усилия в ньютонах. Несколько более подробное описание экспериментальной установки можно найти в [18].

Осциллограмма, полученная на той же установке для капроновой нити, показана на фиг. 4. Эта осциллограмма и была обработана на ЭВМ. При дискретизации нить разбивалась на 100 участков, т. е. сохранилось то же разбиение, что и при решении тестовых задач. Разбиение экспериментальной зависимости усилие — время проводилось с шагом по времени $\delta t = 0{,}01$ на 20 участков ($N=20$). Полученная в результате такого разбиения ступенчатая функция обрабатывалась по изложенной выше методике, т. е. служила вектором σ при вычислении невязки $\|A(F)-\sigma\|$.

Исследуемый материал в рассматриваемом диапазоне нагрузок полагали линейно-наследственным, т. е. $\varphi(\varepsilon)=E\varepsilon$, причем $E=\rho c_0^2$, а c_0 нетрудно определить измеряя на той же установке время прохождения сигнала по нити. Полученное ядро приведено на фиг. 5. Значения по оси ординат даны в обратных секундах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
3. *Shuler K. W.* Propagation of steady shock waves in polymethylmetacrylate.— J. Mech. Phys. Solids, 1970, v. 18, p. 277–293.
4. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 233 с.
5. *Осокин А. Е., Суворова Ю. В.* Нелинейное определяющее уравнение наследственной среды и методика определения его параметров.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 6, с. 1107–1114.
6. *Звонов Е. Н., Малинин Н. И., Паперник Л. Х., Цейтлин Б. М.* Определение характеристик ползучести линейных упруго-наследственных материалов с использованием ЭЦВМ.— Инж. ж. МТТ, 1968, № 5, с. 76–82.
7. *Работнов Ю. Н., Паперник Л. Х., Звонов Е. Н.* Таблицы дробно-экспоненциальной функции отрицательных параметров и интеграла от нее. М.: Наука, 1969. 132 с.
8. *Осокин А. Е.* Методика расчета определяющего уравнения наследственной теории по данным динамического эксперимента.— Тр. Моск. физ.-техн. ин-та. Сер. аэрофиз. и прикл. матем., 1978, с. 71–72.
9. *Локшин А. А., Рок В. Е.* Фундаментальные решения волновых уравнений с запаздывающим временем.— Докл. АН СССР, 1978, т. 239, № 6, с. 1305–1308.
10. *Локшин А. А.* Волновые уравнения с сингулярно запаздывающим временем.— Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 1, с. 43–46.
11. *Рахматуллин Х. А., Осокин А. Е.* О поперечном ударе по вязкоупругой гибкой нити.— Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1977, № 4, с. 90–95.
12. *Суворова Ю. В., Осокин А. Е.* Распространение одномерных волн в нелинейной наследственной среде.— Механика полимеров, 1978, № 3, с. 425–429.
13. *Courant R., Isacson E., Rees M.* On the solution of nonlinear hyperbolic differencial equations by finite differences.— Communs pure and Appl. Math., 1952, v. 5, No. 3, p. 243–254.
14. *Кукуджанов В. Н.* Одномерные задачи распространения волн напряжений в стержнях.— Сообщ. по прикл. матем. ВЦ АН СССР, 1977, вып. 7. 54 с.
15. *Кудрявцев Б. А.* Механика пьезокерамических материалов.— В кн.: Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела, т. 11. М.: ВИНИТИ, 1978, с. 5–66.
16. *Малов В. В.* Пьезорезонансные датчики. М.: Энергия, 1978. 248 с.
17. *Домбровский Г. А., Литвинов Г. В., Малышев Б. М.* Продольный растягивающий удар по натянутой проволоке.— Инж. ж. МТТ, 1968, № 2, с. 106–110.
18. *Осокин А. Е., Пряхин Г. В.* Методика измерения напряжений в точке жесткого закрепления нити при продольных ударах с малой скоростью.— Тр. Моск. физ.-техн. ин-та. Сер. аэрофиз. и прикл. матем., 1980, с. 21–22.

Москва

Поступила в редакцию 18.II.1980