

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ
ДИНАМИКИ АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ

ТАРАБРИН Г. Т.

На основе метода бихарактеристик предлагается явная разностная схема второго порядка точности для численного решения многомерных краевых задач теории уравнений гиперболического типа применительно к анизотропным упругим массивам и оболочкам достаточно общей конфигурации.

Развиваемый метод был предложен в [1] для уравнений гидродинамики и обобщен в [2] на уравнения плоской, а в [3] на уравнения пространственной задачи теории упругости для изотропных тел прямоугольной формы. Ряд задач решен этим методом в [4-6].

Существенное упрощение в рассматриваемом методе возникает в результате исключения из конечно-разностной аппроксимации производных в небихарактеристических направлениях. Используя эту идею непосредственно в дифференциальных уравнениях, в [7] разработан метод решения неодномерных задач динамики упруго-пластических сред.

1. Определяющая система уравнений динамической теории упругости.

Соотношения на бихарактеристиках. Будем использовать безразмерные величины: $x^i = x_*^i/h$, $t = ct_*/h$, $v^i = v_*^i/c$, $c^{i\alpha\beta} = c_*^{i\alpha\beta}/(\rho c^2)$, $\sigma^{ij} = \sigma_*^{ij}/(\rho c^2)$, где звездочкой обозначены соответствующие размерные величины; индексы принимают значения 1, 2, 3; x^i — криволинейные координаты, t — время, $c^{i\alpha\beta}$ — тензор упругости, v^i — вектор скорости, σ^{ij} — тензор напряжения, h — характерный размер, ρ — плотность материала, c — характерная скорость.

Относительно тензора упругости будем предполагать, что он является заданной непрерывно дифференцируемой функцией координат и обладает свойством

$$c^{i\alpha\beta} = c^{j\alpha\beta} = c^{ij\beta\alpha} = c^{\alpha\beta ij} \quad (1.1)$$

Ковариантные производные условимся обозначать нижними индексами после запятой, по дважды повторяющимся греческим индексам будем подразумевать суммирование и не делать этого по повторяющимся латинским индексам.

Определяющая система уравнений в безразмерных величинах имеет вид

$$\partial v^i / \partial t - \sigma_{,\alpha}^{\alpha i} = 0, \quad \partial \sigma^{ij} / \partial t - c_{\beta}^{i\alpha} v_{,\alpha}^{\beta} = 0, \quad c_{\kappa}^{ijn} = c^{ijn} g_{\alpha\kappa} \quad (1.2)$$

где g_{ij} — метрический тензор.

Система (1.2) гиперболического типа, ее характеристические поверхности в четырехмерном многообразии пространства — времени представляют собой гиперконусы с осями, параллельными оси времени.

Бихарактеристика — линия, по которой происходит касание любых двух характеристических поверхностей. Поэтому для (1.2) бихарактеристиками являются образующие гиперконусов. Будем рассматривать бихарактеристики, лежащие на координатных поверхностях, образованных пространственной осью и осью времени. Очевидно, чтобы получить уравнения этих бихарактеристик и условия на них, достаточно в системе (1.2) поочередно зафиксировать две из трех пространственных переменных и для полученных систем двух уравнений с двумя независимыми переменными x^i , t записать дифференциальные уравнения характеристик и условия на них.

Этот прием соответствует идее расщепления многомерных систем гиперболического типа на одномерные [8].

В плане расщепления трехмерной системы (1.2) на одномерные запишем ее в виде

$$\partial v^j / \partial t - \partial \sigma^{ij} / \partial x^i = a_i^j, \quad \partial \sigma^{ij} / \partial t - \lambda_{ij}^2 \partial v^j / \partial x^i = b^{ij} \quad (1.3)$$

$$a_i^j = \sigma_{,\alpha}^{ij} - \partial \sigma^{ij} / \partial x^i, \quad b^{ij} = c_{\beta}^{ij\alpha} v_{,\alpha}^{\beta} - \lambda_{ij}^2 \partial v^j / \partial x^i, \quad \lambda_{ij} = (c_j^{ij})^{1/2} \quad (1.4)$$

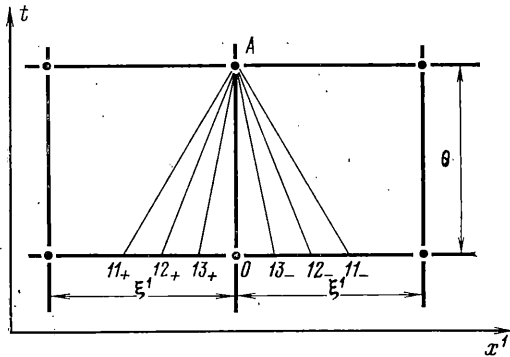
Дифференциальные уравнения бихарактеристик в плоскости x^i, t суть

$$dx^i = \pm \lambda_{ij} dt \quad (1.5)$$

а условия на них

$$d\sigma^{ij} \mp \lambda_{ij} dv^j = (b^{ij} \mp \lambda_{ij} a_i^j) dt \quad (1.6)$$

2. Численное решение задачи с начальными и граничными условиями для массивов. Тело произвольной конфигурации с кусочно-гладкими граничными поверхностями подвергается воздействию нестационарных динамических нагрузок. Начальные условия заданы напряжениями и скоростями смещений во всем теле,



Фиг. 1

а граничные условия — напряжениями на поверхности. Те и другие являются непрерывно дифференцируемыми функциями. Форма тела такова, что допускает существование локально линейной системы координат x^i , в которой граничные поверхности тела являются координатными. В каждой точке такого тела функции $x^i = x^i(y^1, y^2, y^3)$, определяющие связь между криволинейными x^i и декартовыми y^i координатами, непрерывно дифференцируемы, и $\det(\partial x^i / \partial y^j) \neq 0$. Чтобы

обеспечить непрерывность символов Кристоффеля второго рода $\Gamma_{jk}^i = (\partial^2 x^\alpha / \partial y^j \partial y^k) (\partial y^i / \partial x^\alpha)$, входящих в выражения ковариантных производных, будем требовать дважды непрерывной дифференцируемости $x^i(y^1, y^2, y^3)$, что равносильно требованию непрерывности кривизны граничных поверхностей рассматриваемого тела.

1. Координатными поверхностями $x^i = \text{const}$ рассечем данное тело на элементарные призмы с размерами ребер ξ^i . Точки пересечения координатных поверхностей являются узловыми точками, в которых ищутся значения σ^{ij} и v^i в различные моменты времени с шагом θ . Во внутренних точках будем использовать девятнадцатиточечный шаблон, состоящий из узловой точки O и точек пересечения бихарактеристик с гиперплоскостью $t = \text{const}$, обозначаемых ij_{\pm} . Например, 32_{+} — точка, лежащая на бихарактеристике, уравнение которой $dx^3 = +\lambda_{32} dt$.

На фиг. 1 показаны точки шаблона в плоскости координат x^i, t , аналогичные точки имеются в двух других плоскостях x^i, t . В неугловой точке граничная поверхность отсекает три бихарактеристики, поэтому шаблон содержит шестнадцать точек. Соответственно на ребрах — тринадцатиточечный шаблон, а в вершинах трехгранных углов — десятиточечный.

Условимся значения функций $\sigma^{ij}, v^j, a_i^j, b^{ij}$ в точках ij_{\pm} обозначать $\sigma_{\pm}^{ij}, v_{\pm}^j, a_{\pm}^j, b_{\pm}^{ij}$. Например, v_{+3}^2 — значение v^2 в точке 32_{+} . Значения функций в точке O — $\sigma_0^{ij}, \partial \sigma_0^{ij} / \partial t, v_0^i, \partial v_0^i / \partial t$. Значениям функций в точке A , в которой ищется решение, дополнительных индексов приписывать не будем.

2. Интегрирование уравнений (1.3) на отрезке прямой от точки O до

точки A со вторым порядком точности и последующая замена значений производных по пространственным переменным в точке O на $\partial\sigma_0^{ij}/\partial t$ и $\partial v_0^i/\partial t$ при помощи (1.3) дает

$$v^j = v_0^j + \frac{1}{2}\theta(\partial v_0^j/\partial t + \partial\sigma_0^{ij}/\partial x^i + a_i^j) \quad (2.1)$$

$$\sigma^{ij} = \sigma_0^{ij} + \frac{1}{2}\theta(\partial\sigma_0^{ij}/\partial t + \lambda_{ij}^2 \partial v^j/\partial x^i + b^{ij})$$

Конечно-разностная аппроксимация уравнений (1.5) со вторым порядком точности имеет вид

$$\sigma^{ij} - \sigma_{\pm}^{ij} \mp \lambda_{ij} (v^j - v_{\pm}^j) = \frac{1}{2}\theta [b^{ij} + b_{\pm}^{ij} \mp \lambda_{ij} (a_i^j + a_{\pm}^j)] \quad (2.2)$$

Исключая из (2.2) σ^{ij} , v^j при помощи (2.1), получим

$$\lambda_{ij}^2 \partial v^j/\partial x^i \mp \lambda_{ij} \partial\sigma^{ij}/\partial x^i = f(\pm ij) \quad (2.3)$$

$$f(\pm ij) = b_{\pm}^{ij} - \partial\sigma_0^{ij}/\partial t \pm \lambda_{ij} (\partial v^j/\partial t - a_{\pm}^j) + 2[\sigma_{\pm}^{ij} - \sigma_0^{ij} \pm \lambda_{ij} (v_0^j - v_{\pm}^j)]/\theta \quad (2.4)$$

Складывая и вычитая (2.3) с одинаковыми парами индексов, найдем

$$\partial v^j/\partial x^i = \frac{1}{2}[f(+ij) + f(-ij)]/\lambda_{ij}^2, \quad (2.5)$$

$$\partial\sigma^{ij}/\partial x^i = \frac{1}{2}[f(-ij) - f(+ij)]/\lambda_{ij}$$

Как следует из (2.4), правая часть (2.5) определяется величинами заполненного слоя времени. Это означает, что величина $\partial\sigma^{ij}/\partial x^i$ и $\partial v^j/\partial x^i$ в (2.1) можно отнести к разряду известных.

Исключив из (2.1) a_i^j и b^{ij} при помощи (1.4), относительно искомых величин σ^{ij} и v^j получим следующую систему уравнений:

$$v^i - \frac{1}{2}\theta(\Gamma_{\alpha\nu}^i \delta_{\beta}^i + \Gamma_{\alpha\beta}^i) \sigma^{\alpha\beta} = v_0^i + \frac{1}{2}\theta(\partial v_0^i/\partial t + \partial\sigma_0^{\alpha i}/\partial x^{\alpha}) \quad (2.6)$$

$$\sigma^{ij} - \frac{1}{2}\theta c_{\beta}^{ij\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} v^{\nu} = \sigma_0^{ij} + \frac{1}{2}\theta(\partial\sigma_0^{ij}/\partial t + c_{\beta}^{ij\alpha} \partial v_0^{\beta}/\partial x^{\alpha})$$

Система уравнений (2.6) имеет и притом единственное решение, инвариантное относительно выбора координатной системы.

Для доказательства этого утверждения преобразуем уравнения (2.6) к виду $v^i = v_0^i + \frac{1}{2}\theta(\partial v_0^i/\partial t + \sigma_{\alpha}^{\alpha i})$, $\sigma^{ij} = \sigma_0^{ij} + \frac{1}{2}\theta(\partial\sigma_0^{ij}/\partial t + c_{\beta}^{ij\alpha} v_{\alpha}^{\beta})$.

Отсюда следует, что они тензорные, и поэтому их решения обладают свойством инвариантности по отношению к выбору координатной системы. Воспользовавшись этим свойством и переходя к прямоугольным декартовым координатам, в которых $\Gamma_{\alpha\beta}^i = 0$, получим систему уравнений, разрешенную относительно искомых величин, и, таким образом, обнаружим существование и единственность решения.

В качестве одной из проблем при построении характеристических схем авторы обзора [9] называют отсутствие единственности и обоснованности в выборе дифференциальных характеристических соотношений. Свойство инвариантности решения системы (2.6) открывает определенную свободу при выборе бихарактеристик и делает ненужным обоснование этого выбора. Единственное требование заключается в том, чтобы выбранная совокупность бихарактеристик соответствовала какой-нибудь допустимой координатной системе.

3. В неугловых точках граничной поверхности $x^i = \text{const}$ заданы: σ^{11} , σ^{12} , σ^{13} . Поскольку взамен отсекаемых трех бихарактеристик задаются три величины, оказывается возможным получить нужную систему из разностных уравнений для внутренних точек:

$$v^i - \frac{1}{2}\theta[(\Gamma_{2\alpha}^{\alpha} \delta_2^i + \Gamma_{22}^i) \sigma^{22} + (\Gamma_{2\alpha}^{\alpha} \delta_3^i + \Gamma_{3\alpha}^i \delta_2^i + 2\Gamma_{23}^i) \sigma^{23} +$$

$$\begin{aligned}
& + (\Gamma_{3\alpha}^{\alpha} \delta_3^i + \Gamma_{33}^i) \sigma^{33} + \partial \sigma^{i1} / \partial x^1] = v_0^{i+1} / 2 \theta [\partial v_0^i / \partial t + \\
& + (\Gamma_{1\alpha}^{\alpha} \delta_1^i + \Gamma_{11}^i) \sigma^{11} + (\Gamma_{1\alpha}^{\alpha} \delta_2^i + \Gamma_{2\alpha}^{\alpha} \delta_1^i + 2\Gamma_{12}^i) \sigma^{12} + \\
& + (\Gamma_{1\alpha}^{\alpha} \delta_3^i + \Gamma_{3\alpha}^{\alpha} \delta_1^i + 2\Gamma_{13}^i) \sigma^{13} + \partial \sigma^{2i} / \partial x^2 + \partial \sigma^{3i} / \partial x^3] \\
& \delta_2^i \delta_2^j \sigma^{22} + \delta_2^i \delta_3^j \sigma^{23} + \delta_3^i \delta_3^j \sigma^{33} - 1/2 \theta (c_{\beta}^{ij\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} v^{\nu} + c_{\alpha}^{ij1} \partial v^{\alpha} / \partial x^1) = \\
& = \sigma_0^{ij} - \sigma^{ij} + \delta_2^i \delta_2^j \sigma^{22} + \delta_2^i \delta_3^j \sigma^{23} + \delta_3^i \delta_3^j \sigma^{33} + 1/2 \theta (\partial \sigma_0^{ij} / \partial t + c_{\alpha}^{ij2} \partial v^{\alpha} / \partial x^2 + \\
& + c_{\alpha}^{ij3} \partial v^{\alpha} / \partial x^3), \quad \lambda_{1i}^2 \partial v^i / \partial x^1 \mp \lambda_{1i} \partial \sigma^{i1} / \partial x^1 = f(\pm 1i)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

где $\partial \sigma^{21} / \partial x^2$ и $\partial \sigma^{31} / \partial x^3$ вычисляются дифференцированием заданных граничных функций, а остальные частные производные по x^2 и x^3 вычисляются по формулам (2.5). В последнем уравнении принимается верхний знак, если по отношению границы $x^1 = \text{const}$ точки тела располагаются при $x^1 \leq \text{const}$.

Разностные уравнения для неугловых точек на граничных поверхностях $x^2 = \text{const}$ и $x^3 = \text{const}$ получаются в результате круговой замены индексов в (2.7).

Аналогично внутренним точкам можно доказать, что если граничная поверхность тела является координатной поверхностью $x^i = \text{const}$ и шаблон для неугловых точек получен отсечением трех точек ij_{\pm} на оси x^i от шаблона, принятого для внутренних точек, то решение однозначно определяется системой вида (2.7) и инвариантно относительно выбора неграничных координатных поверхностей.

4. В точках ребра, образованного пересечением граничных поверхностей $x^1 = \text{const}$ и $x^2 = \text{const}$, заданы: σ^{11} , σ^{12} , σ^{13} , σ^{22} , σ^{23} . Непосредственно дифференцированием вычисляются $\partial \sigma^{12} / \partial x^1$, $\partial \sigma^{21} / \partial x^2$, $\partial \sigma^{31} / \partial x^3$, $\partial \sigma^{32} / \partial x^3$, после чего по формулам

$$\partial v^j / \partial x^i = [f(\pm ij) \pm \lambda_{ij} \partial \sigma^{ij} / \partial x^i] / \lambda_{ij}^2 \tag{2.8}$$

вытекающим из (2.3), можно вычислить $\partial v^1 / \partial x^2$, $\partial v^1 / \partial x^3$, $\partial v^2 / \partial x^1$, $\partial v^2 / \partial x^3$. По (2.5) вычисляются $\partial \sigma^{33} / \partial x^3$ и $\partial v^3 / \partial x^3$. Остальные неизвестные определяются из решения системы

$$\begin{aligned}
& v^{i-1} / 2 \theta [(\Gamma_{3\alpha}^{\alpha} \delta_3^i + \Gamma_{33}^i) \sigma^{33} + \delta_1^i \partial \sigma^{11} / \partial x^1 + \delta_2^i \partial \sigma^{22} / \partial x^2 + \delta_3^i (\partial \sigma^{13} / \partial x^1 + \partial \sigma^{23} / \partial x^2)] = \\
& = v_0^{i+1} / 2 \theta [\partial v_0^i / \partial t + \partial \sigma^{\alpha i} / \partial x^{\alpha} - \delta_1^i \partial \sigma^{11} / \partial x^1 - \delta_2^i \partial \sigma^{22} / \partial x^2 - \delta_3^i (\partial \sigma^{13} / \partial x^1 + \partial \sigma^{23} / \partial x^2) + \\
& + (\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} \delta_{\nu}^i + \Gamma_{\beta\nu}^i) (\sigma^{\beta\nu} - \delta_3^{\beta} \delta_3^{\nu} \sigma^{33})] \\
& \delta_3^i \delta_3^j \sigma^{33} - 1/2 \theta (c_{\beta}^{ij\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} v^{\nu} + c_1^{ij1} \partial v^1 / \partial x^1 + c_2^{ij2} \partial v^2 / \partial x^2 + c_3^{ij3} \partial v^3 / \partial x^1 + c_3^{ij2} \partial v^3 / \partial x^2) = \\
& = \sigma_0^{ij} - \sigma^{ij} + \delta_3^i \delta_3^j \sigma^{33} + 1/2 \theta (\partial \sigma_0^{ij} / \partial t + c_2^{ij1} \partial v^2 / \partial x^1 + c_1^{ij2} \partial v^1 / \partial x^2 + c_{\alpha}^{ij3} \partial v^{\alpha} / \partial x^3) \\
& \lambda_{ij}^2 \partial v^j / \partial x^i \mp \lambda_{ij} \partial \sigma^{ij} / \partial x^i = f(\pm ij) \quad (i=1, j=1,3; i=2, j=2,3)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

составленной, как и (2.7), из уравнений (2.3), (2.6). Знаки в (2.8) и (2.9) выбираются по тому же правилу, что и в (2.7).

Второе уравнение в (2.9) представляет собой шесть уравнений, из которых следует взять только пять. При этом обязательно должно быть сохранено уравнение с $i=j=3$, а остальные четыре из оставшихся пяти выбираются из соображений лишь удобства вычислений.

Система (2.9) переопределена, однако можно доказать, что она совместна и имеет единственное решение, инвариантно относительно выбора неграничной координатной поверхности $x^3 = \text{const}$.

Разностные уравнения и пояснения к ним для точек других ребер получаются круговой заменой индексов в изложенном выше.

5. Рассмотрим разностные уравнения для точек вершин трехгранных углов, образованных пересечением граничных поверхностей. Здесь заданы все компоненты тензора напряжения. Частные производные по про-

странственным переменным от компонент тензора напряжения с различными индексами вычисляются в результате дифференцирования граничных условий. После чего по формулам (2.8) можно вычислить $\partial v^i/\partial x^j$ с $i \neq j$, а затем найти остальные неизвестные из решения системы уравнений

$$\begin{aligned} v^i - 1/2 \theta \partial \sigma^{ii} / \partial x^i &= v_0^i + 1/2 \theta [\partial v_0^i / \partial t + (\Gamma_{\alpha\nu} \nu \delta_{\beta}^i + \Gamma_{\alpha\beta}^i) \sigma^{\alpha\beta} + \partial \sigma^{\alpha i} / \partial x^\alpha - \partial \sigma^{ii} / \partial x^i] \\ c_{\beta}^{ii} \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} v^\nu + c_1^{ii} \partial v^i / \partial x^1 + c_2^{ii} \partial v^2 / \partial x^2 + c_3^{ii} \partial v^3 / \partial x^3 &= 2(\sigma^{ii} - \sigma_0^{ii}) / \theta - \partial \sigma_0^{ii} / \partial t - \\ - c_1^{ii} \partial v^1 / \partial x^2 - c_2^{ii} \partial v^2 / \partial x^1 - c_3^{ii} \partial v^3 / \partial x^1 - c_3^{ii} \partial v^3 / \partial x^2 - c_2^{ii} \partial v^2 / \partial x^3 & \\ \lambda_{ii}^2 \partial v^i / \partial x^i \mp \lambda_{ii} \partial \sigma^{ii} / \partial x^i &= f(\pm ii) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь, в последнем уравнении, знаки выбираются по тому же правилу, что и в (2.7), (2.9).

В рамках принятых допущений решение системы (2.10) существует и притом единственное.

6. Для примера рассмотрим прямоугольный ортотропный параллелепипед с размерами $a=50$ см, $b=100$ см, $h=400$ см ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq h$). Параллелепипед жестко закреплен гранью $z=0$, остальные грани свободны от какого-либо воздействия. Приняты следующие соотношения упругости ($E=25\,000$ МПа):

$$E \begin{bmatrix} 0,25 & 0,07 & 0,09 \\ 0,07 & 0,25 & 0,09 \\ 0,09 & 0,09 & 1,00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \tau_{xy} &= 0,01 E \gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= 0,30 E \gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= 0,30 E \gamma_{zx} \end{aligned}$$

Исследовались свободные колебания параллелепипеда с заданными в начальный момент времени скоростями $v_{x0}=14\,000$ см/с, $v_{z0}=1400$ см/с:

$$v_x = v_{x0} [1 - \cos(z\pi/h)], \quad v_y = 0, \quad v_z = v_{z0} (1 - 2x/h) [1 - \cos(z\pi/h)]$$

Счет выполнен с сеточным отношением 0,2 до момента начала обратного движения параллелепипеда, что составляет несколько менее $2T \approx 0,003$ с (T — время прохождения продольной волны между гранями $x=0$ и $x=a$).

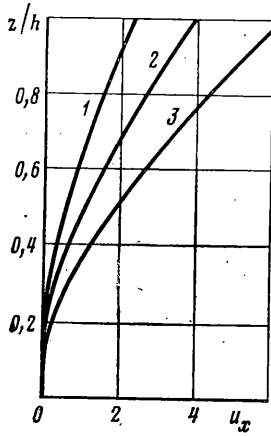
На фиг. 2 показана изогнутая ось в различные моменты времени; на фиг. 3 — перемещения u_z точек прямой $y=b/2$, $z=h/2$; на фиг. 4, 5 — нормальные σ_z и касательные τ_{zx} напряжения в тех же точках (кривые 1—3 соответствуют следующим моментам времени $t=0,6 T$; T ; $1,6 T$).

Полученные результаты хорошо подтверждают гипотезу плоских сечений. Распределение касательных напряжений также близко к тому, что принимается при изгибе балок.

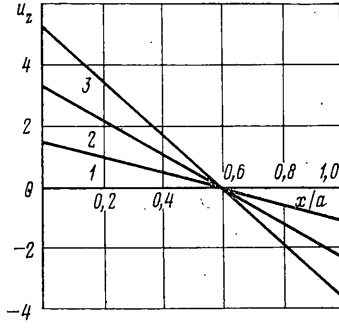
3. Задача о распространении трехмерных волн. Будем рассматривать бесконечное с полостью или полубесконечное тело. Криволинейные координаты x^i примем такими, в которых $x^i = \text{const}$ — уравнения граничной поверхности и последовательных положений граничной волны, отделяющей возмущенную область от невозмущенной. Остальные две координатные поверхности могут быть выбраны по соображениям удобства расчетов или использования их результатов. Как показано ранее, такая свобода в выборе координат допустима. В таких координатах непрерывность кривизны граничной поверхности является необходимым условием непрерывности символов Кристоффеля.

В случае, когда нагрузка прикладывается только к граничной поверхности и непрерывно дифференцируема по всем независимым переменным, построение разностной схемы мало отличается от задачи п. 2.

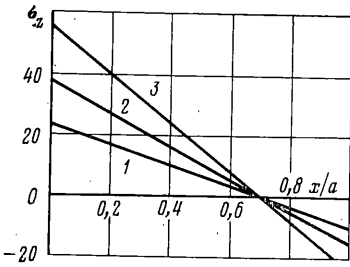
Разрывное нагружение индуцирует в теле волны слабых и сильных разрывов. Запишем соотношения скачков на волнах, которые должны быть учтены в разностной схеме. Пусть H — скорость распространения волн непрерывных упругих деформаций, а n_i — единичный вектор волновой нормали.



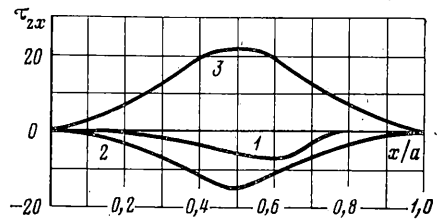
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Применительно к гармоническим волнам [10] было установлено, что H^2 — собственное значение матрицы $\mu_j^i = c_j^{i\alpha\beta} n_\alpha n_\beta$, характеристическое уравнение которой

$$\det(H^2 \delta_\alpha^i - \mu_\alpha^i) = 0 \quad (3.1)$$

в общем случае для каждой волновой нормали имеет три различных вещественных корня, а соответствующие собственные векторы вследствие (1.1) взаимно ортогональны.

Рассмотрение волн слабых и сильных разрывов деформаций [11, 12] позволяет установить, что скачки ускорения $[\partial v^i / \partial t]$ и скорости $[v^i]$ являются собственными векторами матрицы μ_j^i . Обозначив e^i — единичный вектор названных скачков, можно записать

$$(H^2 \delta_\alpha^i - \mu_\alpha^i) e^\alpha = 0 \quad (3.2)$$

На волнах слабых разрывов перемещения u^i и их первые производные непрерывны, а вторые производные испытывают разрыв. При этом скачки вторых производных связаны соотношениями

$$[u^i,_{;jk}] = n_i n_j H^{-2} (\partial v^i / \partial t) \quad (3.3)$$

Перейдя к скачкам в ковариантной производной от закона Гука

$$\sigma^{ij} = c_\beta^{i\alpha} u_{,\alpha}^\beta \quad (3.4)$$

и воспользовавшись (3.3), (3.2), получим соотношения скачков на волнах слабых разрывов: $[\sigma_j^{i\alpha}] n_\alpha = [\partial v^i / \partial t] n_j$.

Скорости распространения волн сильных разрывов в линейно-деформируемом упругом материале равны скоростям соответствующих волн слабых разрывов [13]. На волнах сильных разрывов перемещения непрерывны, а деформации и скорости смещений испытывают разрывы, удов-

детворяющие равенству

$$[u_{,j}^i] = -n_j H^{-1} [v^i] \quad (3.5)$$

Записав уравнения скачков, вытекающие из (3.4), и исключив из них $[u_{,j}^i]$ при помощи (3.5), с учетом (3.2) получим уравнения

$$[\sigma^{i\alpha}] n_\alpha + H [v^i] = 0$$

представляющие собой динамические условия совместности на волнах сильных разрывов.

Задача об изменении интенсивности скачков на волнах сильных разрывов была решена вначале для изотропной упругой среды [14], а потом, по существу тем же методом, для анизотропной среды [15]. Запишем следствия, вытекающие из этих решений, предполагая среду однородной и имея в виду, что в случае неоднородной среды результаты справедливы для близких друг к другу положений волны.

Луч — линия, пересекающая семейство поверхностей, представляющих собой волну разрывов в различные моменты времени, обладает тем свойством, что во всех его точках волновые нормали параллельны между собой. Таким образом, на луче

$$e^i = \text{const}, \quad n_i = \text{const}, \quad H = \text{const} \quad (3.6)$$

Вдоль луча скачок деформации $[u_{,j}^i]$ и гауссова кривизна волны k связаны соотношением $[u_{,\beta}^\alpha] n_\alpha e^\beta |k|^{-1/2} = \text{const}$.

Отсюда в силу (3.6) и линейной независимости $[u_{,j}^i]$ заключаем, что $[u_{,j}^i] |k|^{-1/2} = \text{const}$. Переходя в этих равенствах от деформаций к напряжениям и скоростям при помощи (3.4) и (3.5) соответственно, получим

$$[\sigma^{ij}] = [\sigma_0^{ij}] (k/k_0)^{1/2}, \quad [v^i] = [v_0^i] (k/k_0)^{1/2}$$

где индексом нуль отмечены величины, относящиеся к какому-то фиксированному положению волны.

4. Волны упругих деформаций в анизотропных оболочках. Волны данного класса менее изучены [16], чем трехмерные. Поэтому вышолним подробное исследование общих закономерностей их распространения.

Введем обозначения: x^i — гауссовы координаты на срединной поверхности, h — толщина оболочки, a_{ij} и b_{ij} — коэффициенты первой и второй фундаментальных форм срединной поверхности, N^{ij} — тангенциальные внутренние силы, M^{ij} — моменты внутренних сил, Q^i — перерезывающие силы, u^i и V^i — тангенциальные смещения и скорости этих смещений срединной поверхности, γ^i и Ω^i — углы поворота и скорости вращения срединной поверхности, w и W — прогиб и скорость прогиба, $c^{ij\alpha\beta}$ — тензор упругости от тангенциальных сил, s^{ij} — тензор упругости от перерезывающих сил, p^i и q — интенсивность внешних тангенциальных и нормальных сил. Здесь латинские и греческие индексы принимают значения 1, 2.

Вместо перечисленных выше размерных величин будем использовать безразмерные параметры. Для этого разделим x^i , u^i , w на h ; t на h/c ; V^i и W на c ; Ω^i на c/h ; $c^{ij\alpha\beta}$, s^{ij} , p^i , q на ρc^2 ; N^{ij} и Q^i на $\rho c^2 J$; M^{ij} на $\rho c^2 I/h$, где

$$J = \sqrt{a} h (1 + Kh^2/12), \quad I = \sqrt{a} (h^3/12) (1 + 3Kh^2/20)$$

K — гауссова кривизна срединной поверхности, $a = \det a_{ij}$.

1. Будем исходить из соотношений упругости

$$N^{ij} = c_\beta^{ij\alpha} u_{,\alpha}^\beta - c^{ij\alpha\beta} b_{\alpha\beta} w, \quad M^{ij} = -c_\beta^{ij\alpha} \gamma_{,\alpha}^\beta \quad (4.1)$$

$$Q^i = s^{i\alpha} w_{,\alpha} - s_\alpha^i \gamma^\alpha, \quad c_n^{ijk} = c^{ij\alpha k} a_{\alpha n}, \quad s_j^i = s^{i\alpha} a_{\alpha j} \quad (4.2)$$

где тензор $c^{ij\alpha\beta}$ обладает свойством (1.1), а компоненты тензора s^{ij} образуют матрицу положительно-определенной квадратичной формы; оба тен-

зора упругости являются непрерывно дифференцируемыми функциями пространственных переменных.

Определяющая система дифференциальных уравнений линейной теории динамики анизотропных оболочек типа Тимошенко [17] расщепляется на три связанных между собой системы:

$$\begin{aligned} \partial V^i / \partial t - N_{,\alpha}{}^{\alpha i} &= (\ln J)_{,\alpha} N^{\alpha i} - k_{\alpha}{}^i Q^{\alpha} + p^i, \quad k_j{}^i = a^{i\alpha} b_{\alpha j} \\ \partial N^{ij} / \partial t - c_{\beta}{}^{ij\alpha} V_{,\alpha}{}^{\beta} &= -c^{ij\alpha\beta} b_{\alpha\beta} W \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \partial \Omega^i / \partial t + M_{,\alpha}{}^{\alpha i} &= \kappa Q^i - (\ln I)_{,\alpha} M^{\alpha i}, \quad \kappa = h^2 J / I \\ \partial M^{ij} / \partial t + c_{\beta}{}^{ij\alpha} \Omega_{,\alpha}{}^{\beta} &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\partial W / \partial t - Q_{,\alpha}{}^{\alpha} = b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + (\ln J)_{,\alpha} Q^{\alpha} + q, \quad \partial Q^i / \partial t - s^{i\alpha} W_{,\alpha} = -s_{\alpha}{}^i \Omega^{\alpha} \quad (4.5)$$

где a^{ij} и a_{ij} — взаимобратные тензоры.

2. Для волн слабых разрывов внутренние силовые факторы и соответствующие им скорости смещений непрерывны, а их частные производные скачкообразно изменяются. Соотношения между величинами скачков производных по пространственным переменным $[X_{,i}]$ и скачков производных по времени $[\partial X / \partial t]$ определяются кинематическим условием совместности

$$[X_{,i}] = -n_i H^{-1} [\partial X / \partial t] \quad (4.6)$$

где, как и ранее, n_i — орт волновой нормали, а H — скорость смещения волны по нормальной траектории.

Перейдя к скачкам в (4.3), (4.4), (4.5) и заменив при помощи (4.6) скачки производных по пространственным переменным на скачки производных по времени, относительно последних получим три системы линейных однородных уравнений, каждая из которых расщепляется на две системы:

$$(H^2 \delta_{\alpha}{}^i - \mu_{\alpha}{}^i) [\partial U^{\alpha} / \partial t] = 0, \quad (H^2 \delta_{\alpha}{}^i - \mu_{\alpha}{}^i) [\partial R^{\alpha\beta} / \partial t] n_{\beta} = 0, \quad \mu_j{}^i = c_j{}^{i\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \quad (4.7)$$

$$(H^2 - s^{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta}) [\partial W / \partial t] = 0, \quad (H^2 - s^{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta}) [\partial Q^{\lambda} / \partial t] n_{\lambda} = 0 \quad (4.8)$$

где под U^i, R^{ij} можно подразумевать как V^i, N^{ij} , так и Ω^i, M^{ij} .

Согласно (4.7)

$$(H^2)^2 - I_1 H^2 + I_2 = 0, \quad I_1 = \mu_{\alpha}{}^{\alpha}, \quad I_2 = \det \mu_j{}^i \quad (4.9)$$

где I_1, I_2 — инварианты тензора $\mu_j{}^i$. Матрица $\mu_j{}^i$ вещественна, так как характеризует упругие свойства материала, и симметрична по условию (1.1). Отсюда корни характеристического уравнения (4.9) вещественны, и поэтому $1/4(I_1)^2 - I_2 \geq 0$.

Внутреннее умножение первого уравнения (4.7) на $[\partial U_{\alpha} / \partial t]$ дает

$$H^2 [\partial U^{\alpha} / \partial t] [\partial U_{\alpha} / \partial t] = \mu_{\beta}{}^{\alpha} [\partial U_{\alpha} / \partial t] [\partial U^{\beta} / \partial t]$$

где слева — скачок кинетической энергии при переходе через волну, а справа — квадратичная форма. Следовательно, $\mu_j{}^i$ — матрица положительно определенной квадратичной формы. По условию Сильвестра все ее диагональные миноры положительны. А это значит, что $I_1 > 0, I_2 > 0$.

Полученная система неравенств позволяет сделать вывод, что оба корня характеристического уравнения (4.9) H^2 положительны и что в общем случае существует два типа волн слабых разрывов V^i, N^{ij} и два типа волн слабых разрывов Ω^i, M^{ij} . На этих волнах перемещения u^i, γ^i и их первые производные непрерывны, а вторые производные испытывают разрыв. При этом скачки вторых производных связаны соотношением

$$[Y_{,ij}] = n_i n_j H^{-2} [\partial^2 Y / \partial t^2] \quad (4.10)$$

Переходя в ковариантных производных от (4.1) к скачкам и используя (4.10), (4.7), (4.6), получим соотношения скачков на волнах слабых разрывов V^i , N^{ij} и Ω^i , M^{ij} :

$$\begin{aligned} [N_{,j}^{i\alpha}] n_\alpha &= -H[V_{,j}^i] = -H^{-1}[\partial N^{i\alpha}/\partial t] n_\alpha n_j = [\partial V^i/\partial t] n_j \\ [M_{,j}^{i\alpha}] n_\alpha &= H[\Omega_{,j}^i] = -H^{-1}[\partial M^{i\alpha}/\partial t] n_\alpha n_j = -[\partial \Omega^i/\partial t] n_j \end{aligned}$$

Представив вектор ускорения в виде суммы $\partial U^i/\partial t = \partial U_{(1)}^i/\partial t + \partial U_{(2)}^i/\partial t$, слагаемые которой являются собственными векторами матрицы μ_j^i , приходим к выводу, что на данной волне испытывает разрыв одно из слагаемых, скачок которого в совокупности с квадратом скорости этой волны удовлетворяет первому из уравнений (4.7); и что

$$[\partial U_{(h)}^i/\partial t] = e_{(h)}^i a_{\alpha\beta} e_{(h)}^\alpha [\partial U^\beta/\partial t]$$

где $e_{(h)}^i$ — собственный вектор волны — единичный собственный вектор матрицы μ_j^i .

Согласно (4.8), существует один тип волн слабых разрывов W , Q^i , которые распространяются со скоростью $H = (s^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta)^{1/2}$. На этих волнах справедливы следующие соотношения скачков:

$$[Q_{,\alpha}^\alpha] = -H^{-1}[\partial Q^\alpha/\partial t] n_\alpha = [\partial W/\partial t], \quad [W_{,i}] = -n_i H^{-1}[\partial W/\partial t]$$

Обнаружение волн перерезывающих сил оказалось возможным в результате введения по методу С. П. Тимошенко соотношений упругости (4.2). Первые исследования одномерных волн изгиба стержней и осесимметричного изгиба изотропных пластин с учетом влияния на прогиб перерезывающей силы по методу С. П. Тимошенко выполнены в [18], где методом интегральных преобразований были найдены скорости волн изгибающих моментов и перерезывающих сил и получены решения волновых задач от сосредоточенных источников возмущения. Позже эти результаты были повторены и проверены экспериментально в [19].

3. Волны сильных разрывов характеризуются тем, что на них перемещения непрерывны, а силовые факторы, деформации и скорости смещений испытывают разрыв.

На волнах слабых разрывов V^i , N^{ij} и Ω^i , M^{ij} имеем $(H^2 \delta_\alpha^i - \mu_\alpha^i) U_{(k)}^i = 0$, где $U_{(k)}^i$ — компоненты разложения U^i по базису $e_{(k)}^i$. Записав последнее равенство для волн слабых разрывов, прилегающих к волне сильных разрывов с одной и с другой стороны как угодно близко, и произведя вычитание соответствующих пар уравнений, получим

$$(H^2 \delta_\alpha^i - \mu_\alpha^i) [U_{(h)}^\alpha] = 0 \quad (4.11)$$

Отсюда аналогично волнам слабых разрывов заключаем, что на данной волне сильных разрывов V^i , N^{ij} или Ω^i , M^{ij} испытывает разрыв одно из слагаемых скорости $U^i = U_{(1)}^i + U_{(2)}^i$ и, следовательно

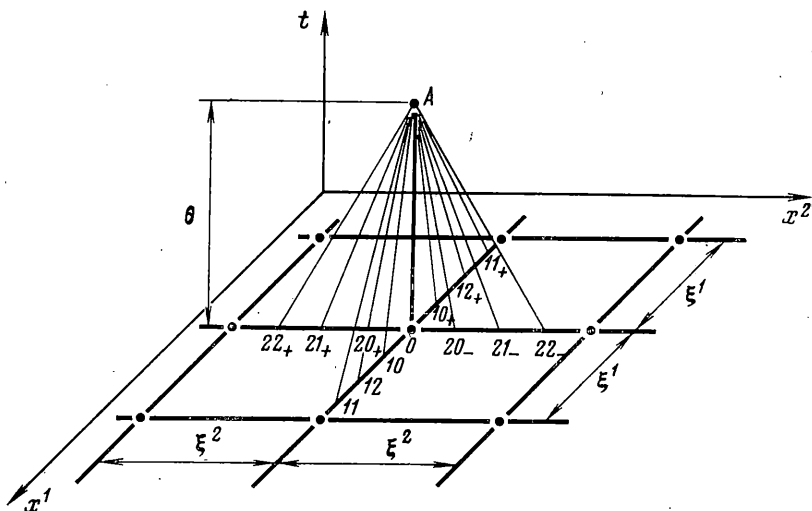
$$[U_{(h)}^i] = e_{(h)}^i a_{\alpha\beta} e_{(h)}^\alpha [U^\beta].$$

Записав уравнения скачков, вытекающие из (4.1), (4.2), и применив к ним (4.6), получим динамические условия совместности на волнах сильных разрывов

$$\begin{aligned} H[N^{ij}] + c_\beta^{ij} n_\alpha [V^\beta] &= 0, \quad H[M^{ij}] - c_\beta^{ij} n_\alpha [\Omega^\beta] = 0 \\ H[Q^i] + s^{\alpha i} n_\alpha [W] &= 0 \end{aligned}$$

Их проекции на нормаль n_i и касательную τ_i к волнам с учетом (4.11)

$$\begin{aligned} [N^{\alpha\beta}] n_\alpha n_\beta + H[V^\alpha] n_\alpha &= 0, \quad [M^{\alpha\beta}] n_\alpha n_\beta - H[\Omega^\alpha] n_\alpha = 0 \\ [N^{\alpha\beta}] n_\alpha \tau_\beta + H[V^\alpha] \tau_\alpha &= 0, \quad [M^{\alpha\beta}] n_\alpha \tau_\beta - H[\Omega^\alpha] \tau_\alpha = 0 \\ [Q^\alpha] n_\alpha + H[W] &= 0 \end{aligned}$$



Фиг. 6

представляют собой условия непрерывности нормального, тангенциально-го и перерезывающего потоков импульсов.

4. Волны в изотропных оболочках рассмотрим как частный случай анизотропии, приняв в качестве характерной скорости волн сдвига $c = [E / (2\rho(1+\nu))]^{1/2}$, а тензоры упругости изотропными

$$c^{ij\alpha\beta} = a^{i\alpha}a^{j\beta} + a^{i\beta}a^{j\alpha} + \nu a^{ij}a^{\alpha\beta} / (1-\nu), \quad s^{ij} = 2a^{ij} / 3$$

где ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга.

Решение уравнения (4.9) дает $H_{(1)} = [2 / (1-\nu)]^{1/2}$, $H_{(2)} = 1$. Вычисляя собственные векторы волн, соответствующие этим скоростям, получаем $e_{(1)} = a^{i\alpha}n_{\alpha}$, $e_{(2)} = n_{\alpha} = 0$. Эти равенства означают, что волны, распространяющиеся со скоростью $H_{(1)}$, являются продольными волнами, на них $[\partial U^i / \partial t]$, $[U^i]$ направлены по нормали, а волны, распространяющиеся со скоростью $H_{(2)}$, являются поперечными, на них $[\partial U^i / \partial t]$, $[U^i]$ направлены по касательной. Эти результаты согласуются с [20].

По формуле $H = (s^{\alpha\beta}n_{\alpha}n_{\beta})^{1/2}$ находим, что скорость распространения волн разрывов перерезывающих сил равна $(2/3)^{1/2}$. Этот результат является следствием предположения, что угол поворота срединной поверхности от действия только перерезывающих сил равен относительной деформации сдвига от соответствующих максимальных касательных напряжений, которые, как и в балке, в полтора раза больше средних.

5. Численное решение динамической задачи теории анизотропных оболочек. Результаты п. 4 позволяют заключить, что система дифференциальных уравнений (4.3), (4.4), (4.5) гиперболического типа. При этом системы (4.3), (4.4) имеют по две попарно совпадающие характеристики, а система (4.5) — одну. В координатах x^1 , x^2 , t характеристики являются коноидами с осями, параллельными оси времени, образующие которых есть бихарактеристики и представляют собой в силу непрерывной дифференцируемости $c^{ij\alpha\beta}$, s^{ij} — гладкие кривые.

Рассматриваются оболочки, у которых линии граничного контура являются координатными линиями некоторой допустимой гауссовой системы координат на срединной поверхности. Кривизна оболочки произвольная, удовлетворяющая условию непрерывности второй фундаментальной формы b_{ij} .

Оболочка подвергается воздействию тангенциальных p^i и нормальных q динамических сил. В начальный момент времени во всех внутренних и

граничных точках заданы все внутренние силовые факторы и скорости смещений. Граничные условия заданы соответствующими силовыми факторами или способами закрепления.

Линии $x^i = \text{const}$ с шагом ξ^i образуют сетку, в узловых точках которой ищутся решения с шагом по времени θ . На фиг. 6 ij_{\pm} , $i0_{\pm}$, O — точки шаблона, A — точка, в которой ищется решение; отрезки наклонных прямых — бихарактеристики, используемые в разностной схеме. Уравнения бихарактеристик, проходящих через точки ij_{\pm} , $i0_{\pm}$, и условия на них имеют вид

$$\begin{aligned} dx^i &= \pm \lambda_{ij} dt, & dN^{ij} \mp \lambda_{ij} dV^j &= (B^{ij} \mp \lambda_{ij} A_i^j) dt, & dM^{ij} \pm \lambda_{ij} d\Omega^j &= (F^{ij} \pm \lambda_{ij} E_i^j) dt \\ dx^i &= \pm v_i dt, & dQ^i \mp v_i dW &= (K^i \mp v_i C_i) dt \\ A_i^j &= (\ln J)_{,\alpha} N^{\alpha j} + N_{,\alpha} \alpha^j - \partial N^{ij} / \partial x^i - k_{\alpha}^j Q^{\alpha} + p^i, & B^{ij} &= c_{\beta}^{ij\alpha} V_{,\alpha} \beta - \lambda_{ij}^2 \partial V^j / \partial x^i - c^{ij\alpha\beta} b_{\alpha\beta} W \\ E_i^j &= \kappa Q^j - (\ln I)_{,\alpha} M^{\alpha j} - M_{,\alpha} \alpha^j + \partial M^{ij} / \partial x^i, & F^{ij} &= \lambda_{ij}^2 \partial \Omega^j / \partial x^i - c_{\beta}^{ij\alpha} \Omega_{,\alpha} \beta \\ C_i &= b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + (\ln J)_{,\alpha} Q^{\alpha} + Q_{,\alpha} \alpha^i - \partial Q^i / \partial x^i + q \\ K^i &= s^{i\alpha} W_{,\alpha} - v_i^2 \partial W / \partial x^i - s_{\alpha}^i \Omega^{\alpha}, & \lambda_{ij} &= (c_j^{ij})^{1/2}, & v_i &= (s^{ii})^{1/2} \end{aligned}$$

Условимся обозначать: N_{\pm}^{ij} , M_{\pm}^{ij} , V_{\pm}^j , Ω_{\pm}^j , A_{\pm}^j , B_{\pm}^{ij} , E_{\pm}^j , F_{\pm}^{ij} — значения функций в точках ij_{\pm} ; Q_{\pm}^i , K_{\pm}^i , W_{\pm}^i , C_{\pm}^i — значения функций в точках $i0_{\pm}$. Значения функций в точке O будем обозначать нижним индексом нуль.

Применив метод построения разностной схемы, описанный в п. 2, получим, что во внутренних точках силовые факторы и скорости смещений определяются из решения системы уравнений

$$\begin{aligned} V^{i-1/2} \theta \{ [(\ln J)_{,\alpha} + \Gamma_{\alpha\nu} \nu] \delta_{\beta}^i + \Gamma_{\alpha\beta}^i] N^{\alpha\beta} - k_{\alpha}^i Q^{\alpha} \} &= V_0^{i+1/2} \theta (\partial V_0^i / \partial t + \partial N^{\alpha i} / \partial x^{\alpha} + p^i) \\ N^{ij-1/2} \theta (c_{\beta}^{ij\alpha} \Gamma_{\alpha\nu} \nu^{\beta} V^{\nu} - c^{ij\alpha\beta} b_{\alpha\beta} W) &= N_0^{ij+1/2} \theta (\partial N_0^{ij} / \partial t + c_{\beta}^{ij\alpha} \partial V^{\beta} / \partial x^{\alpha}) \\ \Omega^{i+1/2} \theta \{ [(\ln I)_{,\alpha} + \Gamma_{\alpha\nu} \nu] \delta_{\beta}^i + \Gamma_{\alpha\beta}^i] M^{\alpha\beta} - \kappa Q^i \} &= \Omega_0^{i+1/2} \theta (\partial \Omega_0^i / \partial t - \partial M^{\alpha i} / \partial x^{\alpha}) \\ M^{ij+1/2} \theta c_{\beta}^{ij\alpha} \Gamma_{\alpha\nu} \nu^{\beta} W &= M_0^{ij+1/2} \theta (\partial M_0^{ij} / \partial t - c_{\beta}^{ij\alpha} \partial \Omega^{\beta} / \partial x^{\alpha}) \\ W^{-1/2} \theta \{ b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + [(\ln J)_{,\alpha} + \Gamma_{\alpha\nu} \nu] Q^{\alpha} \} &= W_0^{i+1/2} \theta (\partial W_0 / \partial t + \partial Q^{\alpha} / \partial x^{\alpha} + q) \\ Q^{i+1/2} \theta s_{\alpha}^i \Omega^{\alpha} &= Q_0^{i+1/2} \theta (\partial Q_0^i / \partial t + s^{i\alpha} \partial W / \partial x^{\alpha}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

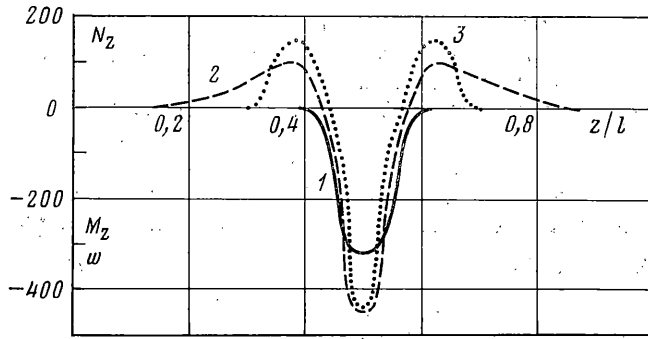
в которой частные производные, входящие в правые части, по времени вычисляются по формулам, вытекающим из (4.3), (4.4), (4.5), а по пространственным переменным — из решения уравнений

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}^2 \partial V^j / \partial x^i \mp \lambda_{ij} \partial N^{ij} / \partial x^i &= D(\pm ij), & \lambda_{ij}^2 \partial \Omega^j / \partial x^i \pm \lambda_{ij} \partial M^{ij} / \partial x^i &= G(\pm ij), \\ v_i^2 \partial W / \partial x^i \mp v_i \partial Q^i / \partial x^i &= L(\pm i) \\ D(\pm ij) &= B_{\pm}^{ij} - \partial N_0^{ij} / \partial t \pm \lambda_{ij} (\partial V_0^j / \partial t - A_{\pm}^j) + 2 [N_{\pm}^{ij} - N_0^{ij} \pm \lambda_{ij} (V_0^j - V_{\pm}^j)] / \theta \\ G(\pm ij) &= \partial M_0^{ij} / \partial t - F_{\pm}^{ij} \pm \lambda_{ij} (\partial \Omega_0^j / \partial t - E_{\pm}^j) + 2 [M_0^{ij} - M_{\pm}^{ij} \pm \lambda_{ij} (\Omega_0^j - \Omega_{\pm}^j)] / \theta \\ L(\pm i) &= K_{\pm}^i - \partial Q_0^i / \partial t \pm v_i (\partial W_0 / \partial t - C_{\pm}^i) + 2 [Q_{\pm}^i - Q_0^i \pm v_i (W_0 - W_{\pm})] / \theta \end{aligned} \quad (5.2)$$

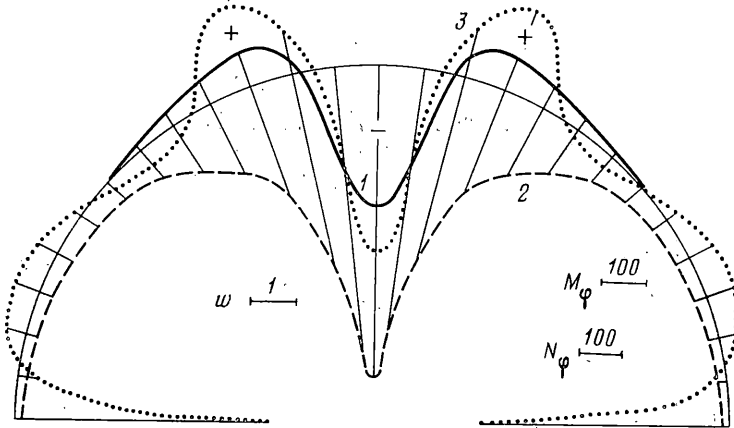
Граничная линия от схемы фиг. 6 отсекает три бихарактеристики и, таким образом, уменьшает на пять количество уравнений в (5.2). Однако на границе заданы пять величин, что делает очевидным возможность использования (5.1), (5.2) для отыскания решения и в граничных точках. Подчеркнем, что при этом в отличие от классической теории оболочек здесь удовлетворяются все пять граничных условий.

Рассмотрим прямоугольную в плане полукруговую цилиндрическую оболочку (r , φ , z — цилиндрические координаты). По длине дуг направляющего круга края оболочки $z=0$ и $z=l$ свободные, а по длине образующих $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$ — абсолютно заделанные. Размеры оболочки: $l=650$ см, $r=166$ см, $h=1$ см. Материал ортогруппный, компоненты упругости, отнесенные к $\rho s^2=2,5 \cdot 10^5$ МПа, следующие: $c_{zzzz}=1,00$, $c_{\varphi\varphi\varphi\varphi}=0,64$, $c_{zz\varphi\varphi}=0,36$, $s_{zz}=0,16$, $s_{\varphi\varphi}=0,09$, остальные равны нулю. В центре оболочки на прямоугольном участке $2/13 l \times 2/13 l$ приложена нормальная нагрузка, распределенная в виде горба полусинусоиды. Максимальная интенсивность нагрузки — 1 МПа, время действия нагрузки $T=0,00091$ с, время роста — 0,1 Т.

На фиг. 7 показаны эпюры прогибов w (кривая 1), нормальных сил N_z (кривая 2) и изгибающих моментов M_z (кривая 3) по длине центральной образующей $\varphi=\pi/2$ в момент времени $t=T$; на фиг. 8 показаны эпюры прогибов w (кривая 1), нормальных сил N_{φ} (кривая 2) и изгибающих моментов M_{φ} (кривая 3) по длине



Фиг. 7



Фиг. 8

центральной дуги $z=l/2$ в тот же момент времени $t=T$. Выбранный для иллюстрации момент времени $t=T$ характерен тем, что фронт возмущений уже отразился от краев оболочки, но еще не достиг центральных линий, и поэтому процесс интерференции волн в них еще не начался.

ЛИТЕРАТУРА

1. Butler D. S. The numerical solution of hyperbolic system of partial differential equations in three independent variables.—Proc. Roy. Soc. London, 1960, v. A255, No. 1281, p. 232–252.
2. Clifton R. J. A difference method for plane problems in dynamic elasticity.—Quart. Appl. Math., 1967, v. 25, No. 1, p. 97–116.—Рус. перев.: Механика: Сб. перев. иностр. статей. М.: Мир, 1968, № 1, с. 103–122.
3. Recker W. W. A numerical solution of threedimensional problems in dynamic elasticity.—Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1970, v. 37, No. 1, p. 116–122.—Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. сер. E., 1970, т. 37, № 1, с. 124–129.
4. Сабодаш П. Ф., Чередниченко Р. А. Применение метода пространственных характеристик к решению осесимметричных задач по распространению волн.—ПМТФ, 1971, № 4, с. 101–109.
5. Сабодаш П. Ф., Чередниченко Р. А. Применение метода пространственных характеристик к решению задачи о распространении волны в упругой полуполосе.—Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 6, с. 180–185.
6. Чередниченко Р. А. Поперечное воздействие импульса давления на плиту бесконечной длины.—Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 2, с. 113–119.
7. Кондауров В. И., Кукуджанов В. Н. Численное решение неодномерных задач динамики упругопластических сред.—В кн.: Избранные проблемы прикладной механики. М.: ВИНТИ, 1974, с. 421–430.
8. Багриновский К. А., Годунов С. К. Разностные схемы для многомерных задач.—Докл. АН СССР, 1957, т. 115, № 3, с. 431–433.
9. Кукуджанов В. Н., Кондауров В. И. Численное решение неодномерных задач динамики твердого деформируемого тела.—В кн.: Проблемы динамики упругопластических сред. М.: Мир, 1975, с. 39–84.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.

11. *Труsdale К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Наука, 1975. 592 с.
12. *Петрашень Г. И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1980. 280 с.
13. *Галин Г. Я.* Об условиях на поверхности сильных разрывов для упругих и пластических тел.— ПММ, 1955, т. 19, вып. 3, с. 368—370.
14. *Бабич В. М.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов.— Докл. АН СССР, 1956, т. 110, № 3, с. 355—357.
15. *Nariboli G. A.* Wave propagation in anisotropic elasticity.— J. Math. Anal. Appl., 1966, v. 16, No. 1, p. 108—122.
16. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек.— Механика твердых деформируемых тел. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
17. *Рикардс Р. Б., Тетерс Г. А.* Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига: Зинатне, 1974. 310 с.
18. *Уфлянд Я. С.* Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин.— ПММ, 1948, т. 12, вып. 3, с. 287—300.
19. *Dengler M.* Transversale Wellen in Stäben und Platten unter stoßformiger Belastung.— Osterr. Ingr-Arch., 1956, B. 10, Nr. 1, S. 39—66.
20. *Cohen H., Berkal A. B.* Wave propagation in elastic shells.— J. Elasticity, 1972, v. 2, No. 1, p. 35—44.

Волгоград

Поступила в редакцию
9.VI.1980