

УДК 539.374

ВЛИЯНИЕ ЖЕСТКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ
НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗОН
В ДВОЙКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

КУРИШИН Л. М., СУЗДАЛЬНИЦКИЙ И. Д.

Растяжение пластины, ослабленной отверстиями, при достаточно большой величине приложенных внешних усилий приводит к тому, что часть ее, прилегающая к отверстиям, переходит из упругого состояния в пластическое. В связи с этим возникает задача определения границы, разделяющей упругую и пластическую области. Эффективный метод отыскания неизвестной границы был предложен Л. А. Галиным [1], рассмотревшим упругопластическую задачу для плоскости с круговым отверстием в предположении, что пластическая область целиком охватывает отверстие. В ряде последующих работ решение [1] было обстоятельно проанализировано. Так, в [2, 3] построено поле перемещений в упругой и пластической областях и указаны ограничения, при которых найденное решение справедливо.

Обзор работ, относящихся к упругопластической задаче, выполненных до 1968 г., приведен в монографии Г. Н. Савина [4]. Дальнейшие свойства решений, связанные с поведением решений вблизи упругопластической границы, изучались в [5–8].

Интересное для практики горных выработок исследование, связанное с использованием более общего условия текучести, в частности экспоненциального, выполнено в [9], это направление было продолжено в [10, 16]. Учет особенностей в решении упругопластической задачи, связанных с возможной перестройкой механических свойств материала, был проведен в [11].

Распространение метода [1] на случай многосвязной области — плоскости, ослабленной рядом периодически расположенных отверстий, дано в [12].

Задача упругого равновесия плоскости, ослабленной двойкопериодической системой отверстий, рассматривалась в ряде работ [13, 14]. Оказалось естественным объединить развитые здесь методы с методом Л. А. Галина. В [15] предложено решение упругопластической задачи для плоскости, ослабленной двойкопериодической системой круговых отверстий, образующих треугольную решетку. Позднее тем же методом в [16, 17] получен ряд новых результатов для пластинок с двойкопериодической перфорацией.

Ниже дается оценка влияния жестких включений в плоскости с двойкопериодической системой отверстий на распространение пластических областей. Эта задача возникает при изучении пластических деформаций в деталях, выполненных в виде пластин, ослабленных системами отверстий, часть которых заполнена жестким материалом. Жесткостные характеристики включения при этом предполагаются таковыми, что их деформированием можно пренебречь.

1. Рассмотрим двойкопериодическую треугольную решетку (фиг. 1) с круговыми отверстиями радиуса λ ($\lambda < 1$) и круговыми жесткими включениями радиуса ρ ($\rho + \lambda < 2/\sqrt{3}$). Начало координат поместим в центре одного из отверстий, ось x направим вдоль линии центров, ось y — ей ортогонально. Будут использованы также полярные координаты r, θ с полюсом в том же центре и полярной осью, совпадающей с осью x . Зафиксировав центры отверстий и приняв расстояние между соседними центрами равным двум, предполагаем далее, что жесткие включения плоскопараллельных смещений не совершают. Таким образом, центры отверстий оказываются в точках

$$p_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2 \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \omega_1 = 2, \quad \omega_2 = 2e^{i\pi/3}$$

а центры включений — в точках

$$p_{mn}' = p_{mn} + 2\sqrt{3}e^{i/3\pi}, \quad p_{mn}'' = p_{mn} + 2\sqrt{3}e^{-i/3\pi}$$

Обозначим контур отверстия с центром в точке p_{mn} через L_{mn} , границу соответствующей пластической зоны — Γ_{mn} , контуры включений с центрами в точках p_{mn}' и p_{mn}'' — соответственно L_{mn}' , L_{mn}'' и внешность контуров $\Gamma_{mn} - D_z$.

Условие пластичности принято в виде

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k_0^2$$

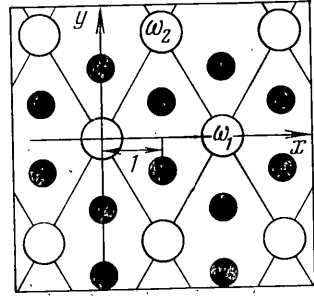
Граничные условия: $\sigma_r = -\sigma_0$, $\tau_{r\theta} = 0$ на L_{mn} ; $u = v = 0$ на L_{mn}' и L_{mn}'' .

Функции Колосова — Мухелишвили для пластической области здесь те же, что и в случае одного отверстия [1]:

$$\Phi_1(z) = (k_0 - \sigma_0)/2 + k_0 \ln(z/\lambda), \quad \Psi_1(z) = 0$$

В упругой области функции $\Phi_2(z)$, $\Psi_2(z)$ связаны с компонентами напряжений и перемещений соотношениями [18]

$$\begin{aligned} \sigma_\theta + \sigma_r &= 4 \operatorname{Re} \Phi_2(z), & \tau_{r\theta} &= 0 \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} &= 2e^{2i\theta} [\bar{z}\Phi_2'(z) + \Psi_2(z)] \\ 2G(u+iv) &= \kappa\varphi_2(z) - z\overline{\varphi_2'(z)} - \overline{\psi_2(z)} \\ \Phi_2(z) &= \varphi'(z), & \Psi_2(z) &= \psi_2'(z), & G &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned}$$



Фиг. 1

Сопрягая решения для упругой и пластической областей на границе их раздела, получим граничные условия для упругой области. На контуре Γ_{00} должны выполняться соотношения

$$\operatorname{Re} \Phi_2(z) = 1/2(k_0 - \sigma_0) + k_0 \ln(|z|/\lambda), \quad \bar{z}\Phi_2'(z) + \Psi_2(z) = k_0\bar{z}/z \quad (1.1)$$

Кроме того, на контуре L_{00}' с центром в точке $z_0 = 2\sqrt{3}e^{i/3\pi}$

$$\kappa\varphi_2(z) - z\overline{\varphi_2'(z)} - \overline{\psi_2(z)} = 0 \quad (1.2)$$

Для несжимаемого материала $\nu = 0,5$ и $\kappa = 3 - 4\nu = 0$. Решение задачи (1.1), (1.2) разыскиваем в виде

$$\varphi_2(z) = \varphi_{20}(z) + \varphi_{21}(z - z_0), \quad \psi_2(z) = \psi_{20}(z) + \psi_{21}(z - z_0) - \bar{z}_0\varphi_{21}'(z - z_0) \quad (1.3)$$

полагая при этом, что φ_{20} , ψ_{20} определяют решения упругопластической задачи при отсутствии включений, а φ_{21} , ψ_{21} — решения упругой задачи при отсутствии отверстий.

Пусть функция $z = w(\xi)$ реализует конформное отображение области D_z на область D_ξ в плоскости ξ , являющуюся внешностью окружностей γ_{mn} радиуса μ с центрами в точках p_{mn} . Искомые функции должны удовлетворять следующим условиям симметрии:

$$\Phi_{20}(ze^{i/3\pi}) = \Phi_{20}(z), \quad \Psi_{20}(ze^{i/3\pi}) = \Psi_{20}(z)e^{-2i/3\pi}, \quad \Phi_{21}((z - z_0)e^{2i/3\pi}) = \Phi_{21}(z - z_0) \quad (1.4)$$

$$\Psi_{21}((z - z_0)e^{2i/3\pi}) = \Psi_{21}(z - z_0)e^{-4i/3\pi}, \quad w(\xi e^{i/3\pi}) = w(\xi)e^{i/3\pi}$$

2. Рассмотрим сначала задачу (1.2). Согласно (1.3), имеем

$$\varphi_{21}(\tau) - \tau\overline{\varphi_{21}'(\tau)} - \overline{\psi_{21}(\tau)} = h(\tau) \quad (2.1)$$

$$h(\tau) = -\varphi_{20}(z) + z\overline{\varphi_{20}'(z)} + \overline{\psi_{20}(z)}$$

В силу условий симметрии (1.4) $h(\theta + 2i/3\pi) = h(\theta)e^{2i/3\pi}$, а поэтому разложение в ряд Фурье должно иметь вид

$$h(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{3k+1} e^{(3k+1)i\theta}, \quad h_{3k+1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) e^{-(3k+1)i\theta} d\theta = \frac{\rho^{3k+1}}{2\pi i} \int_{L_{\infty'}} \frac{h(\tau) d\tau}{\tau^{3k+1}} \quad (2.2)$$

Этот интеграл нетрудно вычислить, воспользовавшись формулами работы [18, гл. 4]. В результате получим

$$\begin{aligned} h_1 &= \rho [\Phi_{20}(z_0) - \overline{\Phi_{20}(z_0)}], \quad h_{3k+1} = \frac{\rho^{3k+1}}{(3k+1)!} \Phi_{20}^{(3k)}(z_0) \\ h_{-3k+1} &= -\frac{\rho^{3k+1}}{(3k)!} \overline{\Phi_{20}^{(3k)}(z_0)} - \frac{\rho^{3k-1}}{(3k-1)!} \overline{\Psi_{20}^{(3k-2)}(z_0)} - \\ &\quad - \frac{z_0 \rho^{3k-1}}{(3k-1)!} \overline{\Phi_{20}^{(3k)}(z_0)} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Функции φ_{21} , ψ_{21} разыскиваются в виде рядов

$$\begin{aligned} \varphi_{21}(z-z_0) &= a_0(z-z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{3k} \rho^{3k}}{(3k-1)!} P^{(3k-3)}(z-z_0) \\ \psi_{21}(z-z_0) &= b_0(z-z_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{3k+2} \rho^{3k+2}}{(3k+1)!} P^{(3k-1)}(z-z_0) - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{3k} \rho^{3k}}{(3k-1)!} Q^{(3k-2)}(z-z_0). \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$P(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n} \left[\frac{1}{(z-p)^2} - \frac{1}{p^2} \right]$$

$$Q(z) = \sum_{m,n} \left[\frac{p}{(z-p)^2} - 2z \frac{\bar{p}}{p^3} - \frac{\bar{p}}{p^2} \right]$$

$$p = m\omega_1 + n\omega_2 \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

где $P(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, $Q(z)$ — специальная мероморфная функция.

Условие равенства нулю главного вектора сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в D_z , эквивалентно равенствам

$$\begin{aligned} g_0(z+\omega_j) - g_0(z) &= 0, \quad g_1(z-z_0+\omega_j) - g_1(z-z_0) = 0 \quad (j=1, 2) \\ g_k(z) &= \varphi_{2,k}(z) + z\varphi_{2,k}'(z) + \psi_{2,k}(z) \end{aligned} \quad (2.4)$$

откуда при $j=2$ следует соотношение [14]: $a_0 = (\pi/4\sqrt{3})\rho^2 b_2$, $b_0 = 0$.

Разложения функций (2.3) в ряды Лорана в окрестности точки $z=z_0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_{21}(z-z_0) &= a_0(z-z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3k-3} a_{3k} \rho}{3k-1} \left(\frac{\rho}{z-z_0} \right)^{3k+1} + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=0}^1 \frac{a_M \rho^{j+M}}{M-1} r_{l-4, M-3} \left(\frac{z-z_0}{\rho} \right)^j \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\psi_{21}(z-z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{3k+1} b_{3k+2} \rho}{3k+1} \left(\frac{\rho}{z-z_0} \right)^{3k+1} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=0}^4 \left[\frac{b_N}{N-1} r_{I,N-3} - a_{M+6} \rho^{4-6l} s_{I,M-3} \right] \rho^{I+N} \left(\frac{z-z_0}{\rho} \right)^I$$

$$M=6k-3l, \quad N=6k+3l+2, \quad I=6j-3l-1, \quad J=6j+3l-5$$

$$r_{jk} = \frac{(c-1)! g_c^*}{j!(k+1)! 2^c}, \quad s_{jk} = \frac{c! \rho_c^*}{j!(k+2)! 2^c}, \quad g_c^* = \sum_{m,n} \frac{1}{T^c}, \quad \rho_c^* = \sum_{m,n} \frac{\bar{T}}{T^{c+1}}$$

$$T = 1/2 p_{mn} = m + n e^{1/2 \pi i}, \quad c = j+k+1$$

Таблица значений величин $g_j = g_{2j}^*$, $\rho_j = \rho_{2j}^*$ приведена в [14].

Подставив разложения (2.2) и (2.5) в краевое условие (2.1) на контуре L_{00} и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $e^{i\theta}$, получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно a , b . В первом приближении

$$b_2 = 0, \quad a_3 - \bar{a}_3 (4\rho^6 r_{40} - 2\rho^4 s_{20}) - 0,5\bar{b}_5 \rho^6 r_{22} = 2h_{-2}/\rho$$

$$a_3 \rho^6 r_{40} + 2\bar{a}_3 - 0,5\bar{b}_5 = 2h_4/\rho \quad (2.6)$$

$$a_6 - \bar{a}_6 (7\rho^{12} r_{73} - 5\rho^{10} s_{53}) - 5/7 \bar{b}_3 r_{55} = 5h_{-5}/\rho$$

$$a_6 \rho^{12} r_{73} - 5\bar{a}_6 + 5/7 \bar{b}_3 = 5h_7/\rho$$

Анализ этой системы показывает, что

$$\operatorname{Re}(a_{6k+3}) = \operatorname{Re}(b_{6k+5}) = \operatorname{Im}(a_{6k}) = \operatorname{Im}(b_{6k+2}) = 0$$

Преобразование $z = w(\xi)$ приводит первое краевое условие (1.4) к виду

$$\operatorname{Re} \Phi_2(w(\xi)) = 1/2(k_0 - \sigma_0) + 1/2 k_0 [\ln(w(\xi)/\lambda) + \ln(\bar{w}(\xi)/\lambda)] \quad (2.7)$$

откуда следует, что

$$\Phi_2(w(\xi)) = 1/2(k_0 - \sigma_0) + k_0 \ln(w(\xi)/\lambda) - k_0 \ln(\xi/\mu)$$

или

$$\Phi_2(z) = 1/2(k_0 - \sigma_0) + k_0 \ln(z/\lambda) - k_0 \ln(w^{-1}(z)/\mu) \quad (2.8)$$

Согласовывая с условием симметрии (1.4) и граничным условием (2.7), полагаем

$$z = w(\xi) = \xi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{6k} \mu^{6k}}{(6k-1)!} P^{(6k-3)}(\xi) \quad (2.9)$$

Разложение функции (2.8) в ряд Лорана в окрестности $\xi=0$ имеет вид

$$z = \xi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{6k} \mu}{6k-1} \left(\frac{\mu}{\xi} \right)^{6k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{6k} \mu^{6k}}{6j+1} r_{6j,6k-2} \xi^{6j+1} \quad (2.10)$$

Приближенное выражение обратной функции $\xi = w^{-1}(z)$ можно получить следующим образом. Пусть

$$\xi = \mu \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k \left(\frac{\mu}{z} \right)^{6k-1} \quad (2.11)$$

Подставив в (2.11) переменную z , выраженную через ξ посредством (2.10), и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ , получим

систему алгебраических уравнений относительно B_h , приближенное решение которой: $B_2 = -C_2 - 5C_1^2$, $B_1 = -C_1 - 4C_0C_1$, $B_0 = 1 - C_0$, $B_{-1} = -C_{-1}$, $C_2 = -1/_{11}A_{12}$, $C_1 = -1/_{5}A_6$, $C_0 = A_6r_{04}\mu^6 + A_{12}r_{0,10}\mu^{12}$, $C_{-1} = 1/_{7}A_6r_{64}\mu^{12}$.

При решении краевой задачи (1.1) потребуется зависимость $\bar{z} = \bar{z}(z)$ при $z, \bar{z} \in \Gamma_{00}$. Полагая

$$\bar{z} = \mu \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \left(\frac{\mu}{z} \right)^{6k+1} \quad (2.12)$$

и учитывая, что

$$\xi = \frac{\mu^2}{\zeta}, \quad \bar{z} = \frac{\mu^2}{\zeta} + \mu \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \left(\frac{\zeta}{\mu} \right)^{6k-1} \quad \text{при } z \in \Gamma_{00} (\zeta \in \gamma_{00})$$

получаем

$$D_2 = C_2 + 6C_1, \quad D_1 = C_1 + C_{-1} - 5C_1C_2 - 15C_1^3 + 7C_0C_1 \\ D_0 = 1 + 2C_0 - 5C_1^2, \quad D_{-1} = C_1 + C_{-1} - 11C_1C_2 - 5C_0C_1, \quad D_{-2} = C_2$$

3. Используя (1.3), (2.8), второе краевое условие (1.1) преобразуем к виду

$$\Psi_{20}(z) - k_0 \bar{z} \frac{[w^{-1}(z)]'}{w^{-1}(z)} = -\Psi_{21}(z - z_0) \quad (3.1)$$

Полагаем

$$\Phi_{20}(z) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{6k}\mu^{6k}}{(6k-1)!} P^{(6k-2)}(z) \quad (3.2)$$

$$\Psi_{20}(z) = \beta_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_{6k+2}\mu^{6k+2}}{(6k+1)!} P^{(6k)}(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{6k}\mu^{6k}}{(6k-1)!} Q^{(6k-1)}(z)$$

Первое равенство (2.4) приводит к соотношениям $\alpha_0 = (\pi/4\sqrt{3})\mu^2\beta_2$, $\beta_0 = 0$. Разложения функций (3.2) в ряды по степеням z/μ имеют вид (2.5), если заменить $a, b, \rho, z - z_0$ соответственно на α, β, μ, z и опустить суммирование по l , положив $l=0$.

Дальнейшее решение краевой задачи (3.1) выполняется аналогично решению задачи (2.1), причем в силу условий симметрии

$$\Psi_{21}(z - z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi_{21}^{(6k+4)}(z_0)}{(6k+4)!} z^{6k+4}$$

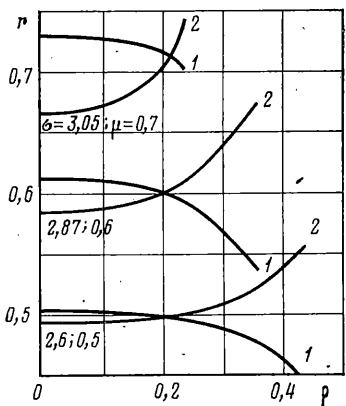
Получаемая при этом система алгебраических уравнений относительно α, β, C в первом приближении имеет вид

$$\beta_2 = 1 + 2C_0 + C_1^2, \quad \beta_8 = 7C_1 + 49C_0C_1 + C_{-1} + 21C_1^3 \quad (3.3)$$

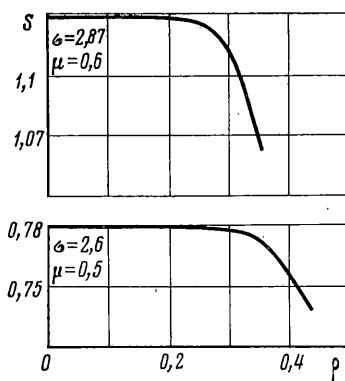
$$\beta_2\mu^6r_{40} + \beta_8\mu^{12}r_{46} - 6\alpha_6s_{44}\mu^{10} = C_1 - 5C_{-1} - 5C_0C_1 - \Psi_{21}^{(4*6)}(z_0)\mu^{10}/10!$$

Остается найти зависимости для коэффициентов разложения $\Phi_{20}(z)$. Подставив (1.3), (2.10), (2.12), (3.2) в краевое условие (2.7), умножим обе части полученного выражения на $1/_{2}\pi iz^{\sigma m+1}$ и проинтегрируем по контуру Γ_{00} . Формулы (70.3'), (70.4') [18] позволяют упростить вычисление интегралов. При $m=0$; 1 будем иметь (при $m=1$ сохранены члены первого приближения)

$$\alpha_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{6j}\mu^{6j}r_{0,6j-2} + \Phi_{21}(z_0) = \frac{k_0 - \sigma_0}{2} - k_0 \ln \frac{\lambda}{\mu} \left[1 + \sum_{j=0}^{\infty} A_{6j}r_{0,6j-2}\mu^{6j} \right], \\ \alpha_6 = C_1 + 5C_0C_1 \quad (3.4)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Система (2.6), (3.3), (3.4) является полной для вычисления первого приближения поставленной задачи. Таблицы значений функций $P(z)$ и $Q(z)$ и их производных в точке $z_0 = 2/\sqrt{3}e^{i\alpha}$ даны в [14]. Приводимые здесь числовые значения и графики получены при сохранении первых двух приближений (параметр k_0 в условии пластичности полагался равным единице).

В [15], где решение краевой задачи выполнялось в плоскости ζ , функция $g(z)$, фигурирующая в условии (2.4), записывалась в виде $g(\zeta) = \varphi(\zeta) + \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} + \psi(\zeta)$, тогда как после преобразования $z = w(\zeta)$ следовало записать¹

$$g(\zeta) = \varphi(\zeta) + w(\zeta)\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)}$$

Вместе с тем заметим следующее. Оценка, полученная на основании анализа уравнений (3.3), показывает, что $|A_6| = 5r_{40}\mu^6 + O(\mu^{12})$ и, следовательно, различие в выборе коэффициента, когда отображающая функция имеет вид (2.9), составляет

$$|\zeta - w(\zeta)\overline{\varphi'(\zeta)}| = \mu A_6 + O(\mu^7|A_6|) = 2,29\mu^7 + O(\mu^{13})$$

Ниже приведены результаты, полученные при решении системы (3.3), (3.4) ($\rho=0$), и данные из [15] (соответственно, вторая и третья строки)

μ	0,2	0,4	0,6	0,7	0,8
$-A_6$	$147 \cdot 10^{-5}$	$937 \cdot 10^{-5}$	0,1023	0,2241	0,347
	$147 \cdot 10^{-5}$	$937 \cdot 10^{-5}$	0,1024	0,2257	0,364

Из сравнения этих результатов следует приемлемость методики [15] и в случаях, когда при конформном преобразовании деформирование области незначительно, ее можно рекомендовать как приближенную. Это относится и к публикациям [16, 17].

4. Полагая в (2.9) $\zeta = \mu e^{i\theta}$, получим уравнение границы пластической области $r = r(\theta) = |w(\mu e^{i\theta})|$. В первом приближении

$$r^2 = \mu^2 [(1+C_0)^2 + C_1^2 + 2(C_1 + C_{-1} + C_0 C_1) \cos 6\theta]$$

Отсюда следует

$$r_1 = r(0) = \mu(1 + C_1 + C_0 + C_{-1}), \quad r_2 = r(\pi/6) = \mu(1 - C_1 + C_0 - C_{-1})$$

В случае отсутствия включений $r_1 = r_{\max}$, $r_2 = r_{\min}$. Площадь внутри упругопластической границы определяется выражением

$$S = \pi\mu^2 [(1 + A_6 r_{04} \mu^6)^2 - 0,2A_6^2].$$

На фиг. 2 даны характеризующие пластическую область графики r_1 (кривые 1) и r_2 (кривые 2) при $\lambda=0,2$. Кривые на фиг. 3 иллюстрируют влияние включения на величину площади пластической области.

¹ Внимание авторов на это обстоятельство обратили В. Е. Кац и Л. А. Фильшинский.

Перестройка пластической области, связанная с введением жесткого включения достаточно большого радиуса, приводит к уменьшению площади этой области. Однако первоначально вытянутая в сторону соседних отверстий пластическая область с ростом радиуса включения ρ распространяется по направлению к включению. Например, при $\mu=0,5$ и $\rho=0$ величина r_1 превышает средний радиус пластической области μ на 0,3% и r_2 меньше μ на 0,4%, тогда как при $\rho=0,44$ величина r_1 меньше μ на 5,3% и r_2 больше μ на 5,8%. Это обстоятельство проявляется еще более отчетливо с ростом приложенных усилий и, следовательно, параметра μ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Плоская упругопластическая задача.— ПММ, 1946, т. 10, вып. 3, с. 367–386.
2. Ислев Д. Д. Об определении перемещений в задаче Л. А. Галина.— ПММ, 1957, т. 21, вып. 5, с. 716–718.
3. Ислев Д. Д. К определению перемещений в задаче Л. А. Галина.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 5, с. 987–988.
4. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наукова думка, 1968. 887 с.
5. Tuba I. S. Plane strain distribution in perfectly plastic regions around circular holes due to unequal biaxial loads.— J. Strain Anal., 1966, v. 1, No. 5, p. 394–397.
6. Христианович С. А., Шемякин Е. И. О плоской деформации пластического материала при сложном нагружении.— Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 5, с. 138–149.
7. Эрлихман Ф. М., Машуков В. И. О поведении решения в окрестности упругопластической границы в случае плоской деформации.— Динамика сплошной среды: Сб. статей. Новосибирск: СО АН СССР, 1970, вып. 4, с. 120–130.
8. Эрлихман Ф. М. О плоской упругопластической задаче.— Динамика сплошной среды: Сб. статей. Новосибирск: СО АН СССР, 1971, вып. 6, с. 69–75.
9. Аннин Б. Д. Одна плоская упругопластическая задача при экспоненциальном условии текучести.— Инж. ж. МТТ, 1966, № 3, с. 122–123.
10. Рева Т. Л. О бигармонических решениях задач для упругопластических тел.— Прикл. механика, 1971, т. 7, вып. 4, с. 130–133.
11. Алимжанов М. Т. Упругопластическая задача, учитывающая неоднородность механических свойств материала.— Докл. АН СССР, 1978, т. 242, № 6, с. 1281–1284.
12. Космодамианский А. С. Упругопластическая задача для изотропного массива, ослабленного бесконечным рядом одинаковых круговых выработок.— Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1961, № 4, с. 187–188.
13. Куршин Л. М., Фильштинский Л. А. Определение приведенного модуля изотропной плоскости, ослабленной двоякопериодической системой круглых отверстий.— Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1961, № 6, с. 110–114.
14. Григolloк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.
15. Куршин Л. М., Суздальницкий И. Д. Упругопластическая задача для плоскости, ослабленной двоякопериодической системой круглых отверстий.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 3, с. 463–467.
16. Мирсалимов В. М. Некоторые упругопластические задачи для плоскости, ослабленной двоякопериодической системой круглых отверстий.— ПМТФ, 1974, № 4, с. 133–138.
17. Мирсалимов В. М. Об оптимальной форме отверстий для перфорированной пластины при изгибе.— ПМТФ, 1974, № 6, с. 133–136.
18. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
21.I.1980