МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1982

УДК 539.374

К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

ЦВЕЛОДУБ И. Ю.

Рассматривается физически нелинейная вязкоупругая среда, для которой компоненты деформации складываются из упругой и вязкой составляющих. Упругие деформации подчиняются закону Гука, а скорости вязких деформаций являются функциями компонент напряжений. Предполагается, что для вязких компонент справедлив постулат устойчивости Друккера. Рассматриваются вопросы единственности решения краевых задач при принятых определяющих соотношениях. Показано, что распределение напряжений в теле, на поверхности которого заданы постоянные во времени нагрузки и скорости перемещения, с течением времени стремится к установившемуся.

Исследуется устойчивость (в классическом смысле) некоторых движений вязкоупругой среды по отношению к малым возмущениям исходного напряженно-деформированного состояния. Показана тесная связь условий устойчивости по Ляпунову с постулатом Друккера.

1. Рассматривается изотермический процесс деформирования физически нелинейной однородной вязкоупругой среды, для которой компоненты тензора деформаций ε_{kl} складываются из упругих $\varepsilon_{kl}{}^e$ и вязких $\varepsilon_{kl}{}^c$ составляющих

$$\varepsilon_{kl}=\varepsilon_{kl}{}^e+\varepsilon_{kl}{}^c \qquad (k,\ l=1,\ 2,\ 3) \tag{1.1}$$

Принимается, что компоненты деформаций являются малыми и выражаются через компоненты вектора перемещения известными соотношениями Коши. Будем считать, что упругие деформации подчиняются закону Гука

$$\varepsilon_{kl}{}^e=a_{klmn}\sigma_{mn} \qquad (k,\ l,\ m,\ n=1,\ 2,\ 3) \tag{1.2}$$

где σ_{kl} — компоненты тензора напряжений, $a_{klmn}=a_{mnkl}$ — компоненты тензора упругих податливостей. Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3.

Относительно компонент тензора вязких деформаций предполагается, что их скорости $\eta_{kl}=\varepsilon_{kl}{}^{\cdot c}$ являются функциями компонент напряжений и не зависят от истории нагружения

$$\eta_{kl}=\eta_{kl}(\sigma_{mn}) \qquad (k,\ l,\ m,\ n=1,\ 2,\ 3) \tag{1.3}$$

Функции (1.3) предполагаются дифференцируемыми и в общем случае могут быть произвольными, например однородными n-й степени [1]. Единственное ограничение, которое будет накладываться на эти функции, состоит в справедливости следующего неравенства:

$$\delta\sigma_{kl}\delta\eta_{kl}\geqslant 0 \tag{1.4}$$

где $\delta\sigma_{kl}$ — произвольные бесконечно малые приращения компонент тензора напряжений, $\delta\eta_{kl}$ — соответствующие им приращения компонент тензора скоростей вязких деформаций, которые определяются из (1.3). Другими словами, рассматриваемая среда должна быть устойчивой по Друккеру для вязких составляющих деформации [2].

Условие (1.4) используется в теории установившейся ползучести, т. е. в предположении, что $\sigma_{kl}{}^{\cdot}=\varepsilon_{kl}{}^{\cdot e}=0$ $(k, l=1, 2, 3)$, для потенциальных связей (1.3) при формулировке некоторых вариационных принципов, которые в этом случае совершенно аналогичны соответствующим принципам теории физически нелинейной упругости [1]. В [3—5] получены ограничения, накладываемые неравенством (1.4) на соотношения (1.3) для изотропной среды, показана возможность использования непотенциальных связей между тензорами напряжений и скоростей деформаций ползучести и рассмотрены некоторые вопросы единственности решения краевых задач.

С использованием неравенства (1.4) можно доказать теорему единственности решения краевых задач и для вязкоупругой среды, процесс деформирования которой определяется соотношениями (1.1) — (1.3). Рассмотрим односвязное тело объема v с поверхностью S, которое при $t<0$, т. е. до нулевого момента времени, находилось в ненапряженном состоянии с заданным распределением вязких деформаций $\varepsilon_{kl}{}^c$ (так, например, если тело находилось в естественном состоянии, то при $t<0$ деформации $\varepsilon_{kl}{}^c=0$). Затем при $t=0$ к нему прикладываются поверхностные и массовые силы, меняющиеся во времени. Считаем, что на части поверхности S_τ заданы поверхностные силы $p_k=p_k(t)$, а на остальной части S_u известны перемещения $u_k=u_k(t)$ $(k=1, 2, 3)$. При этом в теле возникнут поля напряжений и деформаций, соответствующие указанным граничным условиям. Покажем, что эти поля определяются единственным образом.

Для этого предположим, что существуют два различных решения указанной задачи: $\overset{(1)}{\sigma_{kl}}, \overset{(1)}{\varepsilon_{kl}}$ и $\overset{(2)}{\sigma_{kl}}, \overset{(2)}{\varepsilon_{kl}}$ $(k, l=1, 2, 3)$, удовлетворяющих уравнениям (1.1)—(1.3), известным уравнениям равновесия, соотношениям Коши и одним и тем же граничным условиям. Следовательно, к разности этих полей $\Delta\sigma_{kl}=\overset{(1)}{\sigma_{kl}}-\overset{(2)}{\sigma_{kl}}$, $\Delta\varepsilon_{kl}=\overset{(1)}{\varepsilon_{kl}}-\overset{(2)}{\varepsilon_{kl}}$ $(k, l=1, 2, 3)$ можно применить уравнение виртуальных работ, которое вследствие соответствующих нулевых граничных условий будет иметь вид [4]:

$$\int\limits_v \Delta\varepsilon_{kl}{}^e\Delta\sigma_{kl}\,dv+\int\limits_v \Delta\varepsilon_{kl}{}^c\Delta\sigma_{kl}\,dv=0 \tag{1.5}$$

Первый интеграл в (1.5) неотрицателен и может равняться нулю, только когда $\Delta\sigma_{kl}=0$ $(k, l=1, 2, 3)$ во всем объеме v, так как величина $\Delta\varepsilon_{kl}{}^e\Delta\sigma_{kl}$ представляет собой удвоенную потенциальную энергию упругой деформации, соответствующую полю напряжений $\Delta\sigma_{kl}$.

Покажем, что и второй интеграл в (1.5) неотрицателен. Для этого воспользуемся очевидным тождеством

$$\Delta\varepsilon_{kl}{}^c\Delta\sigma_{kl}=\int\limits_0^t \Delta\sigma_{kl}\Delta\eta_{kl}\,dt+\int\limits_0^t \Delta\varepsilon_{kl}{}^c\Delta\sigma_{kl}{}^\cdot\,dt, \quad \Delta\eta_{kl}=\Delta\varepsilon_{kl}{}^{\cdot c} \quad (k,l=1,2,3)$$

в котором учтено, что при $t=0$ $\Delta\varepsilon_{kl}{}^c=0$.

Таким образом, получим

$$\int\limits_v \varepsilon_{kl}{}^c\Delta\sigma_{kl}\,dv=I_1+I_2, \quad I_1=\int\limits_0^t\int\limits_v \Delta\sigma_{kl}\Delta\eta_{kl}\,dv\,dt, \quad I_2=\int\limits_0^t\int\limits_v \Delta\varepsilon_{kl}{}^c\Delta\sigma_{kl}{}^\cdot\,dv\,dt$$

Заметим, что из неравенства (1.4) следует аналогичное неравенство для конечных разностей [4], вследствие чего $I_1\geqslant0$. Остается показать, что и $I_2\geqslant0$. Применяя уравнение виртуальных работ к полям $\Delta\varepsilon_{kl}$ и $\Delta\sigma_{kl}{}^\cdot$, а затем к полям $\Delta\varepsilon_{kl}{}^\cdot$ и $\Delta\sigma_{kl}$, будем иметь

$$\int\limits_v \Delta\varepsilon_{kl}{}^e\Delta\sigma_{kl}{}^\cdot\,dv+\int\limits_v \Delta\varepsilon_{kl}{}^c\Delta\sigma_{kl}{}^\cdot\,dv=\int\limits_v \Delta\varepsilon_{kl}{}^{\cdot e}\Delta\sigma_{kl}\,dv+\int\limits_v \Delta\eta_{kl}\Delta\sigma_{kl}\,dv=0$$

Но $\Delta\varepsilon_{kl}{}^{e}\Delta\sigma_{kl}{}^{\cdot}=\Delta\varepsilon_{kl}{}^{\cdot e}\Delta\sigma_{kl}$ в силу (1.2), следовательно

$$\int\limits_v \Delta\varepsilon_{kl}{}^{c}\Delta\sigma_{kl}{}^{\cdot}\,dv=\int\limits_v \Delta\eta_{kl}\Delta\sigma_{kl}\,dv$$

откуда $I_2=I_1\geqslant 0$.

Таким образом, оба интеграла в (1.5) неотрицательны, следовательно, равенство их суммы нулю возможно только при одновременном обращении каждого из этих интегралов в нуль. Учитывая сделанное выше замечание, приходим к выводу, что $\Delta\sigma_{kl}=0$ $(k, l=1, 2, 3)$, т. е. поле напряжений в теле определяется единственным образом. Тогда на основании (1.2) и (1.3) однозначно будут определяться поля $\varepsilon_{kl}{}^{e}$ и η_{kl}, а значит, и $\varepsilon_{kl}{}^{c}$, так как распределение вязких деформаций в момент времени $t=0$ известно. Теорема доказана.

2. Пусть к односвязному телу, находящемуся при $t<0$ в ненапряженном состоянии, в момент времени $t=0$ прикладываются внешние нагрузки таким образом, что во всем объеме тела возникает однородное поле напряжений $\sigma_{kl}{}^{\circ}$ $(k, l=1, 2, 3)$. Очевидно, для реализации такого состояния достаточно распределить внешние нагрузки p_k таким образом, чтобы на поверхности тела $p_k=\sigma_{kl}{}^{\circ}n_l$, где n_k — компоненты единичного вектора внешней к S нормали $(k=1, 2, 3)$. И пусть в тот же момент $t=0$ фиксируются перемещения всех точек поверхности. Тогда во всем объеме тела деформации будут оставаться постоянными и на основании (1.1) — (1.3) получим

$$a_{klmn}\sigma_{mn}{}^{\cdot}+\eta_{kl}=0 \qquad (k, l=1, 2, 3) \tag{2.1}$$

В [6, 7] показано, что система уравнений (2.1) описывает процесс релаксации напряжений, т. е. все $\sigma_{kl}\to 0$ при $t\to\infty$. Доказательство этого факта базируется на использовании двух положительно-определенных функций: $V_1={}^1/_2 a_{klmn}\sigma_{kl}\sigma_{mn}$ и $V_2=\sigma_{kl}\eta_{kl}$, которые обращаются в нуль только при $\sigma_{kl}=0$ $(k, l=1, 2, 3)$. Необходимо отметить, что функция V_2 (удельная мощность вязкой деформации) в случае вязконесжимаемой среды, т. е. при $\eta_{nn}=0$, будет обращаться в нуль и при $\sigma_{kl}=p\delta_{kl}$, где p — произвольная величина, δ_{kl} — компоненты единичного тензора $(k, l=1, 2, 3)$. Можно показать, что в этом случае система (2.1) будет описывать процесс релаксации напряжений в теле от исходного $\sigma_{kl}{}^{\circ}$ до гидростатического $\sigma_{kl}={}^1/_3\sigma_{nn}{}^{\circ}\delta_{kl}$ [1].

Исследуем устойчивость процесса релаксации, описываемого системой (2.1), относительно бесконечно малых возмущений $\delta\sigma_{kl}$ $(k, l=1, 2, 3)$. Из (2.1) получим систему уравнений возмущенного движения

$$a_{klmn}\delta\sigma_{mn}{}^{\cdot}+\delta\eta_{kl}=0 \qquad (k, l=1, 2, 3) \tag{2.2}$$

Заметим, что система (2.2) неавтономна, так как компоненты $\delta\eta_{kl}$ в общем случае зависят от компонент σ_{kl} невозмущенного движения, которые являются функциями времени. Однако вопрос об устойчивости указанного выше процесса решается элементарно. Действительно, выберем функцию Ляпунова вида $V={}^1/_2 a_{klmn}\delta\sigma_{kl}\delta\sigma_{mn}$, которая является положительно-определенной и обращается в нуль только при $\delta\sigma_{kl}=0$ $(k, l=1, 2, 3)$. Ее производная по времени, вычисленная в силу системы (2.2), есть $V^{\cdot}=a_{klmn}\delta\sigma_{kl}\delta\sigma_{mn}{}^{\cdot}=-\delta\sigma_{kl}\delta\eta_{kl}\leqslant 0$ вследствие (1.4). Таким образом, все условия известной теоремы Ляпунова [8] выполнены, следовательно, процесс релаксации, описываемый системой (2.1), будет устойчивым. Если знак равенства в (1.4) имеет место только при $\delta\sigma_{kl}=0$ $(k, l=1, 2, 3)$, то указанный процесс будет асимптотически устойчивым.

Таким образом, постулат устойчивости Друккера в форме (1.4) является достаточным условием устойчивости в классическом смысле процесса релаксации напряжений в вязкоупругих средах.

3. При решении некоторых частных задач с использованием определяющих соотношений типа (1.1) — (1.3) было замечено, что с ростом времени

распределение напряжений в теле стремится к установившемуся, если внешние нагрузки постоянны [9]. Это установившееся распределение соответствует решению аналогичной задачи без учета скоростей изменений упругих деформаций, т. е. по схеме установившейся ползучести [1]. Доказательство этого факта для общего случая типичной краевой задачи для односвязного тела до недавнего времени отсутствовало. В [10] такое доказательство приведено для частного вида функций (1.3), когда для скоростей вязких деформаций существует потенциал, являющийся степенной функцией интенсивности напряжений.

Нетрудно показать, что указанная закономерность действительно имеет место при любом законе связи (1.3), удовлетворяющем неравенству (1.4). Предположим, что односвязное тело в момент $t=0$ нагружается таким образом, что на части его поверхности S_T имеем $\sigma_{kl}n_l=p_k=\text{const}$, а на остальной поверхности S_u компоненты вектора скорости перемещения $u_k^{\cdot}=\text{const}$. При указанном внешнем воздействии в теле возникнут поля напряжений σ_{kl} и деформаций ε_{kl}, зависящие, вообще говоря, от времени. На основании (1.1) — (1.3) имеем

$$\varepsilon_{kl}^{\cdot}(x_i, t)=a_{klmn}\sigma_{mn}^{\cdot}(x_i, t)+\eta_{kl}(x_i, t) \qquad (k, l=1, 2, 3) \tag{3.1}$$

где x_i $(i=1,2,3)$ — координаты точек тела в некоторой выбранной системе координат.

Обозначим через $\sigma_{kl}^*(x_i)$, $\eta_{kl}^*(x_i)$ поля напряжений и скоростей деформаций в теле, соответствующие решению указанной задачи по схеме установившейся ползучести. Заметим, что эти поля не зависят от времени [1]. Введем следующие обозначения:

$$\Delta\sigma_{kl}(x_i, t)=\sigma_{kl}(x_i, t)-\sigma_{kl}^*(x_i), \qquad \Delta\eta_{kl}(x_i, t)=\eta_{kl}(x_i, t)-\eta_{kl}^*(x_i) \tag{3.2}$$

Поля σ_{kl}, σ_{kl}^* статически допустимы, т. е. удовлетворяют уравнениям равновесия и граничным условиям на S_T, в то время как поля $\varepsilon_{kl}^{\cdot}$, η_{kl}^* являются кинематически возможными, т. е. удовлетворяют соотношениям Коши и граничным условиям на S_u. Применяя к разности этих полей уравнение виртуальных работ, с учетом (3.1) и (3.2) получим

$$\int\limits_v (\varepsilon_{kl}^{\cdot}-\eta_{kl}^*)(\sigma_{kl}-\sigma_{kl}^*)\,dv=\int\limits_v (\varepsilon_{kl}^{\cdot e}+\Delta\eta_{kl})\Delta\sigma_{kl}\,dv=0 \tag{3.3}$$

Из (1.2), (3.2) следует, что $\varepsilon_{kl}^{\cdot e}=a_{klmn}\sigma_{mn}^{\cdot}=a_{klmn}\Delta\sigma_{mn}^{\cdot}$, и из (3.3) имеем

$$\int\limits_v a_{klmn}\Delta\sigma_{kl}\Delta\sigma_{mn}^{\cdot}\,dv=-\int\limits_v \Delta\sigma_{kl}\Delta\eta_{kl}\,dv\leqslant 0 \tag{3.4}$$

Неравенство в (3.4) следует из (1.4). Рассмотрим функцию

$$U(t)=\frac{1}{2}\int\limits_v a_{klmn}\Delta\sigma_{kl}\Delta\sigma_{mn}\,dv$$

Очевидно, что $U(t)\geqslant 0$. Для ее производной получим $U^{\cdot}(t)\leqslant 0$, как следует из (3.4). На основании известной теоремы о пределе ограниченной монотонной функции приходим к выводу, что при $t\to\infty$ функция $U(t)\to c=\text{const}$, следовательно, $U^{\cdot}(t)\to 0$. Из (3.4) имеем

$$\int\limits_v \Delta\sigma_{kl}\Delta\eta_{kl}\,dv\to 0 \quad \text{при} \quad t\to\infty$$

откуда следует $\Delta\sigma_{kl}\to 0$, если в (1.4) знак равенства имеет место только при $\delta\sigma_{kl}=0$ $(k, l=1,2,3)$.

Видно, что для вязконесжимаемой среды $\Delta\sigma_{kl}\Delta\eta_{kl}=0$ при $\Delta\sigma_{kl}=\Delta p\delta_{kl}$, т. е. при $t\to\infty$ распределение напряжений в теле будет отличаться от установившегося лишь на величину гидростатического давления Δp. Из уравнений равновесия вытекает, что $\Delta p=\text{const}$. Если при этом поверхность S_T ненулевая, то на основании граничных условий $\Delta p=0$. Утверждение доказано.

Если под действием внешних сил в теле возникнет поле напряжений, не зависящее от времени (например, однородное поле), то оно будет совпадать с установившимся, хотя бы с точностью до гидростатического давления в указанном выше смысле (отсюда, в частности, следует, что установившееся распределение напряжений в теле единственно [4]). Действительно, в этом случае $U(t)\equiv\text{const}$ и

$$\int\limits_v \Delta\sigma_{kl}\Delta\eta_{kl}\,dv=0$$

а в остальном доказательство аналогично предыдущему.

4. Исследуем устойчивость процесса установившейся ползучести относительно некоторых малых возмущений исходного напряженно-деформированного состояния. Рассмотрим тело, находящееся в условиях установившейся ползучести, причем напряженное состояние в теле однородно. Предположим, что в момент времени $t=0$ на поверхности прикладываются дополнительные нагрузки δp_k так, что возникающее при этом поле дополнительных напряжений $\delta\sigma_{kl}$ также однородно (для этого достаточно, чтобы внешние нагрузки $\delta p_k=\delta\sigma_{kl}n_l$). И пусть в тот же момент $t=0$ возникающие от этих нагрузок дополнительные перемещения точек поверхности фиксируются так, что точки поверхности продолжают перемещаться с прежней скоростью, соответствующей исходному процессу установившейся ползучести. Следовательно, дополнительные деформации $\delta\varepsilon_{kl}=a_{klmn}\delta\sigma_{mn}$ остаются постоянными, и для величин $\delta\sigma_{kl}$ имеем систему уравнений, аналогичную (2.2)

$$a_{klmn}\delta\sigma_{mn}^{\boldsymbol{\cdot}}+b_{klmn}\delta\sigma_{mn}=0,\qquad b_{klmn}=\partial\eta_{kl}/\partial\sigma_{mn}\quad (k,\,l,\,m,\,n=1,\,2,\,3)\qquad(4.1)$$

Коэффициенты b_{klmn} — функции исходного напряженного состояния и не зависят от времени. Таким образом, система (4.1) в отличие от (2.2) является автономной. Для устойчивого исходного состояния величины $\delta\sigma_{kl}$ не могут возрастать с течением времени. И это действительно имеет место, если справедливо неравенство (1.4) — доказательство этого факта совершенно аналогично рассмотренному выше для системы (2.2).

Более того, можно показать, что в частном случае потенциальных зависимостей (1.3), когда $b_{klmn}=b_{mnkl}$, нарушение условия (1.4) влечет неустойчивость исходного процесса установившейся ползучести. Действительно, предположим, что в некоторой окрестности точки $\delta\sigma_{kl}=0$ имеет место неравенство $\delta\sigma_{kl}\delta\eta_{kl}=b_{klmn}\delta\sigma_{kl}\delta\sigma_{mn}<0$.

Выберем функцию Ляпунова в виде $V=-{}^1\!/_2 b_{klmn}\delta\sigma_{kl}\delta\sigma_{mn}$. В указанной окрестности $V>0$. Для ее производной по времени, вычисленной в силу системы (4.1), с использованием равенств $b_{klmn}=b_{mnkl}$ получим

$$V^{\boldsymbol{\cdot}}=-b_{klmn}\delta\sigma_{kl}^{\boldsymbol{\cdot}}\delta\sigma_{mn}=a_{klmn}\delta\sigma_{kl}^{\boldsymbol{\cdot}}\delta\sigma_{mn}^{\boldsymbol{\cdot}}\geqslant 0$$

причем знак равенства имеет место только при $\delta\sigma_{kl}^{\boldsymbol{\cdot}}=0$, когда, согласно (4.1), $V=0$, т. е. в рассматриваемой окрестности $V^{\boldsymbol{\cdot}}>0$. Тогда на основании известной теоремы Четаева [8] приходим к выводу, что исходное движение будет неустойчивым относительно указанных выше возмущений.

Таким образом, неравенство (1.4) обеспечивает единственность решения краевых задач вязкоупругости при любом законе связи (1.3). Кроме того, существует достаточно тесная связь между условиями устойчивости по Ляпунову и постулатом устойчивости Друккера (1.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. *Drucker D. C.* On the postulate of stability of material in the mechanics of continua.— В кн.: Тез. докл. 2-го Всес. съезда по теор. и прикл. механ. М.: Наука, 1964, с. 84.— Рус. перев.: Механика. Сб. перев. иностр. статей, 1964, № 3, с. 115—128.

3. *Цвелодуб И. Ю.* Устойчивость в малом и ее приложения к исследованию определяющих уравнений ползучести.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 2, с. 125–128.
4. *Цвелодуб И. Ю.* О построении определяющих уравнений установившейся ползучести.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 3, с. 104—110.
5. *Цвелодуб И. Ю.* О формах связи между тензорами напряжений и скоростей деформаций ползучести в изотропных устойчивых средах.— Проблемы прочности, 1979, № 9, с. 27—30.
6. *Бажанов В. Л., Гольденблат И. И.* Термодинамика необратимых процессов и метод функций Ляпунова.— ПМТФ, 1972, № 4, с. 99—107.
7. *Гольденблат И. И., Бажанов В. Л.* Некоторые вопросы вязкоупругости. В кн.: Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975, с. 129—134.
8. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 207 с.
9. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 455 с.
10. *Leckie F. A., Martin J. B.* Deformation bounds for bodies in a state of creep.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1967, v. 34, No. 2, p. 411—417.— Рус. перев.: Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е. Прикл. механика, 1967, № 2, с. 169—177.

Новосибирск

Поступила в редакцию
28.XII.1979