**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1982**

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ УПРУГАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ТОНКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

ПАНАСЮК В. В., СИЛОВАНЮК В. П., СТАДНИК М. М.

Предлагается эффективный подход приближенного решения задачи об определении концентрации напряжений в полупространстве возле тонкого упругого включения, ограниченного гладкой выпуклой поверхностью. С помощью интегральных преобразований Ханкеля задача сводится к двум интегральным уравнениям Фредгольма, которые можно решать методом последовательных приближений или численно. В частности, рассмотрен случай включения, имеющего форму сплющенного эллипсоида вращения, для которого построены кривые, показывающие изменение концентрации напряжений при различных геометрических и механических параметрах задачи. Сделан анализ полученных результатов.

1. Рассматривается упругое равновесие полупространства, содержащего тонкое упругое включение, ограниченное гладкой выпуклой поверхностью вращения Σ. Включение и полупространство сопряжены вдоль всей области общей границы. Цилиндрическую систему координат $Or\varphi z$ выбираем таким образом, чтобы плоскость $z=0$ была параллельна границе полупространства, а ось Oz направим во внутрь полупространства. Включение ориентировано так, что ось его вращения совпадает с осью Oz, а плоскость $z=0$ проходит через наибольшее поперечное сечение включения S. Расстояние от плоскости $z=0$ до граничной поверхности полупространства принимается равным l. Пусть к границе полупространства приложена система осесимметричных растягивающих нормальных усилий $F(r)$. Задача заключается в определении концентрации напряжений в окрестности включения.

Предположение о малой толщине включения и достаточной гладкости его поверхности Σ позволяет моделировать указанную неоднородность полостью, ограниченной поверхностью Σ с некоторым распределением напряжений на ее поверхности [1]. Представим эти напряжения приближенно такими зависимостями [1, 2]:

$$f_{zz}^{(b)}(r)=\Delta u E_b/h(r),\qquad f_{rz}^{(b)}(r)=\Delta v G_b/h(r) \tag{1.1}$$
$$\Delta u=u^{(1)}-u^{(2)},\qquad \Delta v=v^{(1)}-v^{(2)}$$

индексы 1, 2 означают величины при $z\geqslant 0$, $-l\leqslant z\leqslant 0$, $h(r)$ — толщина включения, E_b, G_b — модули упругости и сдвига материала включения, $u^{(i)}$ $v^{(i)}$ — компоненты вектора смещений точек поверхности Σ на оси Oz и Or.

Приближенные соотношения (1.1) получены на основании закона Гука для тонкого включения и выражают собой усредненные по толщине напряжения. При этом смещения $u^{(i)}$, $v^{(i)}$ представляются в виде суммы $u^{(i)}\approx u_i+u_i^{(0)}$, $v^{(i)}\approx v_i+v_i^{(0)}$, где u_i, v_i — компоненты вектора смещения точек поверхности математического разреза S, к берегам которого приложены напряжения $f_{zz}^{(b)}-f_{zz}^{(0)}$ и $f_{rz}^{(b)}-f_{rz}^{(0)}$, $f_{zz}^{(0)}$, $f_{rz}^{(0)}$ — напряжения, возникающие в плоскости разреза S в случае однородного полупространства при заданных на его границе усилиях $F(r)$, $u_i^{(0)}, v_i^{(0)}$ — компоненты вектора смещения точек поверхности Σ в случае однородного тела ($E_b=E$, $G_b=G$) при действии на его границе усилий $F(r)$. Представление смещений точек поверхности Σ приведенной суммой следует из разбиения рассматриваемой задачи на однородную и неоднородную, как это делается в теории трещин, а также исходя из тонкости включения [2].

Известно [2, 3], что напряженное состояние в окрестности наиболее опасных (с точки зрения концентрации напряжений) точек тонких полостей может быть приближенно определено через решения соответствующих задач теории трещин, т. е.

$$\sigma_{zz}=f_{zz}^{(0)}+2K_{\mathrm{I}}/\sqrt{\pi\rho}, \qquad \sigma_{rz}=f_{rz}^{(0)}+K_{\mathrm{II}}/\sqrt{\pi\rho} \quad (z=0) \tag{1.2}$$

где K_{I}, K_{II} — коэффициенты интенсивности напряжений для трещины S, когда на ее берегах заданы напряжения $\sigma_{zz}=-f_{zz}^{(0)}+f_{zz}^{(b)}$ и $\sigma_{rz}=-f_{rz}^{(0)}+f_{rz}^{(b)}$, ρ — радиус кривизны контура меридианного сечения неоднородности при $z=0$.

Таким образом, приближенное решение рассматриваемой задачи о неоднородности сводится к следующей смешанной краевой задаче теории упругости для полупростанства

$$\sigma_{zz}^{(2)}|_{z=-l}=0, \qquad \sigma_{rz}^{(2)}|_{z=-l}=0 \quad (0\leqslant r<\infty) \tag{1.3}$$

$$\sigma_{zz}^{(1)}=\sigma_{zz}^{(2)}, \qquad \sigma_{rz}^{(1)}=\sigma_{rz}^{(2)} \quad (z=0,\ 0\leqslant r<\infty) \tag{1.4}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{zz}^{(1)}=\sigma_{zz}^{(2)}=-f_{zz}^{(0)}+f_{zz}^{(b)} \quad (z=0,\ 0\leqslant r\leqslant a)\\ \sigma_{rz}^{(1)}=\sigma_{rz}^{(2)}=-f_{rz}^{(0)}+f_{rz}^{(b)} \quad (z=0,\ 0\leqslant r\leqslant a)\\ u_1=u_2,\ \ v_1=v_2 \quad (z=0,\ a<r<\infty)\end{gathered} \tag{1.5}$$

где a — радиус круговой области S.

В случае осевой симметрии напряженное состояние в теле можно определить двумя гармоническими функциями:

$$\begin{gathered}2Gu_i=-\frac{\partial\psi_i}{\partial z}-(3-4\mu)\varphi_i-z\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\\ 2Gv_i=-\frac{\partial\psi_i}{\partial r}-z\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}\\ \sigma_{zz}^{(i)}=-\frac{\partial^2\psi_i}{\partial z^2}+2(1-\mu)\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}-z\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial z^2}\\ \sigma_{rz}^{(i)}=-\frac{\partial^2\psi_i}{\partial r\,\partial z}+(1-2\mu)\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}-z\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial r\,\partial z}\end{gathered} \tag{1.6}$$

где μ — коэффициент Пуассона для полупространства.

Представим функции φ_i, ψ_i в виде следующих интегральных преобразований Ханкеля [4]:

$$\begin{gathered}\varphi_1=\int_0^\infty C_1e^{-\xi z}J_0(\xi r)\,d\xi, \qquad \psi_1=-\int_0^\infty C_2e^{-\xi z}J_0(\xi r)\frac{d\xi}{\xi}\\ \varphi_2=\int_0^\infty [A_1\operatorname{ch}\xi(l+z)+B_1\operatorname{sh}\xi(l+z)]J_0(\xi r)\frac{d\xi}{\operatorname{sh}\xi l}\\ \psi_2=\int_0 [A_2\operatorname{sh}\xi(l+z)+B_2\operatorname{ch}\xi(l+z)]J_0(\xi r)\frac{d\xi}{\xi\operatorname{sh}\xi l}\end{gathered} \tag{1.7}$$

где A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 — неизвестные функции, J_0 — функции Бесселя первого рода.

Удовлетворяя краевым условиям (1.3)—(1.5) и учитывая выражения (1.6) и (1.7), приходим к двум парам интегральных уравнений относительно некоторых неизвестных функций H, Q:

$$\int_0^\infty H(\xi)J_0(\xi r)\,d\xi=0,\quad \int_0^\infty Q(\xi)J_1(\xi r)\,d\xi=0\quad (r>a) \tag{1.8}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty H(\xi)J_0(\xi r)\xi\,d\xi=\int_0^\infty\Big\{H(\xi)\Big[\Big(\frac{1}{2}+\xi l+\xi^2l^2\Big)e^{-2\xi l}-\frac{2(1-\mu^2)\varepsilon}{\xi h(r)}\Big]+$$
$$+Q(\xi)\xi^2l^2e^{-2\xi l}\Big\}J_0(\xi r)\xi\,d\xi-f_{zz}^{(0)}+\frac{\Delta u^{(0)}}{h(r)}E_b,\qquad \varepsilon=\frac{E_b}{E}\quad (r\leqslant a)$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty Q(\xi)J_1(\xi r)\xi\,d\xi=\int_0^\infty\Big\{Q(\xi)\Big[\Big(\frac{1}{2}-\xi l+\xi^2l^2\Big)e^{-2\xi l}-\frac{(1-\mu)\varkappa}{h(r)\xi}\Big]+$$
$$+H(\xi)\xi^2l^2e^{-2\xi l}\Big\}J_1(\xi r)\xi\,d\xi-f_{rz}^{(0)}-\frac{\Delta v^{(0)}}{h(r)}G_b,\qquad \varkappa=\frac{G_b}{G}\quad (r\leqslant a) \tag{1.9}$$

Решение парных уравнений (1.8) и (1.9) ищется в виде следующих конечных синус- и косинус-преобразований Фурье:

$$H(\xi)=\int_0^a\varphi(t)\sin\xi t\,dt,\quad Q(\xi)=\int_0^a\psi(t)\cos\xi t\,dt \tag{1.10}$$

Здесь функции φ и ψ — непрерывные вместе с первыми производными в замкнутом промежутке $[0, a]$, $\varphi(0)=0$.

Непосредственная проверка показывает, что первое из уравнений (1.8) удовлетворяется тождественно для любых φ, а второе при условии

$$\int_0^a\psi(t)\,dt=0 \tag{1.11}$$

Подставляя соотношения (1.10) в уравнения (1.9) и производя несложные преобразования с учетом условий (1.11), для определения функций φ и ψ получаем систему двух интегральных уравнений Фредгольма

$$\varphi(t)-\frac{2}{\pi}\int_0^a\varphi(x)K_1(x,t)\,dx-\frac{2}{\pi}\int_0^a\psi(x)K_2(x,t)\,dx=$$
$$=-\frac{4}{\pi}\int_0^t\frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}}\Big[f_{zz}^{(0)}-\frac{\Delta u^{(0)}(r)}{h(r)}E_b\Big]dr$$
$$\tag{1.12}$$
$$\psi(t)-\frac{2}{\pi}\int_0^a\psi(x)K_3(x,t)\,dx-\frac{2}{\pi}\int_0\varphi(x)K_4(x,t)\,dx=$$
$$=-\frac{4}{\pi}tR(t)+\frac{4}{\pi a}\int_0^a tR(t)\,dt$$

$$K_1(x,t)=-2(1-\mu^2)\varepsilon\int_0^\gamma\frac{r\,dr}{h(r)\sqrt{(t^2-r^2)(x^2-r^2)}}+R_1(x-t)-R_1(x+t)$$

$$K_2(x,t)=R_2(x+t)+R_2(t-x),\qquad R_1(y)=\frac{4l^3}{m^3}\,(12l^2-y^2)$$

$$K_3(x,t)=R_3(x+t)-R_3(x-t)-\frac{1}{a}\,[P_3(a+x)+P_3(a-x)]+$$

$$+(1-\mu)\varkappa\left[T(x,t)-\frac{1}{a}\int\limits_0^a T(t,x)\,dt\right]$$

$$K_4(x,t)=R_4(x+t)+R_4(x-t)-\frac{1}{a}\,[P_4(a-x)-P_4(a+x)]$$

$$R(t)=\int\limits_0^t\frac{[-f_{rz}^{(0)}(r)+\Delta v^{(0)}G_b/h(r)]}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dr$$

$$R_2(y)=\frac{2yl^2}{m^3}\,(12l^2-y^2),\qquad R_3(y)=\frac{2l}{m^3}\,(8l^4-2l^2y^2+y^4)$$

$$R_4(y)=R_2(y),\qquad P_3(y)=\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{2l}-\frac{ly^3}{m^2}$$

$$P_4(y)=\frac{l^2}{m^2}\,(4l^2-y^2),\qquad m=4l^2+y^2$$

$$T(x,t)=t\int\limits_0^\infty\cos x\xi\,d\xi\int\limits_0^t\frac{J_1(\xi r)\,dr}{h(r)\sqrt{t^2-r^2}},\qquad \gamma=x\quad(x\leqslant t),\qquad \gamma=t\quad(x>t)$$

Если из интегральных уравнений (1.12) найдены функции φ и ψ, то напряжения σ_{zz} и σ_{rz} в плоскости $z=0$ при $r\geqslant a$ определяются соотношениями

$$\sigma_{zz}=\int\limits_0^\infty\left\{\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}+\xi l+\xi^2l^2\right)e^{-2\xi l}\right]\int\limits_0^a\varphi(t)\sin\xi t\,dt-\right.$$

$$\left.-\xi^2l^2e^{-2\xi l}\int\limits_0^a\psi(t)\cos\xi t\,dt\right\}J_0(\xi r)\,\xi\,d\xi$$

$$\sigma_{rz}=\int\limits_0^\infty\left\{\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\xi l+\xi^2l^2\right)e^{-2\xi l}\right]\int\limits_0^a\psi(t)\cos\xi t\,dt-\right.\tag{1.13}$$

$$\left.-\xi^2l^2e^{-2\xi l}\int\limits_0^a\varphi(t)\sin\xi t\,dt\right\}J_1(\xi r)\,\xi\,d\xi$$

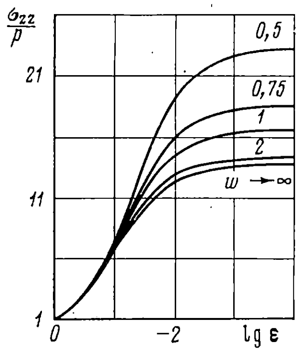
Интегрируя выражения (1.13) и выделяя сингулярные части напряжений σ_{zz} и σ_{rz}, на основании известных соотношений теории трещин коэффициенты интенсивности напряжений могут быть представлены в виде

$$K_{\rm I}=-\sqrt{\pi}\varphi(a)/2\sqrt{a},\quad K_{\rm II}=\sqrt{\pi}\psi(a)/2\sqrt{a}\tag{1.14}$$

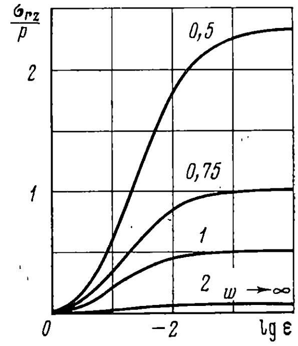
Тогда из формул (1.2) и (1.4) для определения напряжений в полупространстве в окрестности включения при $z=0$ получим выражения

$$\sigma_{zz}=f_{zz}^{(0)}-\varphi(a)/\sqrt{a\rho},\qquad \sigma_{rz}=f_{rz}^{(0)}+\psi(a)/2\sqrt{a\rho}\tag{1.15}$$

Таким образом, если известны значения функций $\varphi(a)$ и $\psi(a)$, то решение поставленной задачи дается соотношениями (1.15).



Фиг. 1



Фиг. 2

2. Для случая включения в виде сплющенного эллипсоида вращения с полуосями c и $a(c<a)$, когда к границе полупространства приложена растягивающая нормальная нагрузка интенсивности p, проведено численное решение интегральных уравнений (1.12). При этом полагалось, что $\mu=\mu_b=0{,}3$. Сходимость процесса вычислений исследовалась сравнением последующих приближений с предыдущими.

Характер изменения концентрации нормальных σ_{zz} и касательных σ_{rz} напряжений в зависимости от параметра ε при $\lambda=a/c=10$ и различных значениях величины $w=l/a$ показан на фиг. 1, 2. Из этих графиков видно, что для данного λ влияние границы полупространства на величину концентрации напряжений заметно ощущается лишь при $w<2$. В случае $w>2$ для определения концентрации напряжений в полупространстве можно пользоваться соответствующими результатами, полученными для пространства с включением. При этом, как следует из фиг. 2, касательными напряжениями можно пренебречь.

В частности, если $l\to\infty$, $\varepsilon\leqslant1$ (случай бесконечного трехмерного тела), а на бесконечности заданы нормальные растягивающие усилия постоянной интенсивности p, система уравнений (1.12) вырождается в одно интегральное уравнение, точное решение которого имеет вид

$$\varphi(t)=-4(1-\varepsilon)pt/[\pi+4\lambda\varepsilon(1-\mu^2)] \qquad (2.1)$$

На основании выражений (1.15) и (2.1) находим максимальное значение концентрации напряжений в окрестности включения, размещенного в бесконечном теле

$$\sigma_{zz}=p+4\lambda(1-\varepsilon)p/[\pi+4\lambda\varepsilon(1-\mu^2)],\quad \sigma_{rz}=0 \qquad (2.2)$$

которое совпадает с ранее полученным результатом в [1].

Отметим, что предложенный здесь подход позволяет также получить решение рассмотренной задачи и для случая системы осесимметричных включений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Стадник М. М.* Упругое равновесие неограниченного тела с тонким включением.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 7, с. 636–639.
2. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
3. *Нейбер Г.* Концентрация напряжений. М.: Гостехиздат, 1947. 204 с.
4. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 401 с.

Львов

Поступила в редакцию
23.XII.1980