

УДК 531.383

ДИНАМИКА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА С ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМОЙ РЕГУЛИРОВАНИЯ

ГУБАРЕНКО С. И., МАРТЫНЕНКО Ю. Г.

Анализ движения несбалансированного шарового ротора в неконтактном подвесе был проведен в [1], где рассматривался случай непрерывного управления силовым полем подвеса ротора. В публикуемой работе исследуется динамика электростатического гироскопа с импульсной следящей системой, обеспечивающей подвес ротора. Необходимость подобного исследования связана с широким применением импульсных систем при конструировании новых типов электростатических гироскопов [2].

1. Рассмотрим электростатический гироскоп со сферическим ротором, «взвешенным» внутри вакуумированной сферической полости. Обозначим через O центр сферической полости, через O_1 — центр сферической поверхности ротора, через O_2 — центр масс ротора. Точку O будем называть центром подвеса.

Будем предполагать, что кожух гироскопа неподвижен, ротор абсолютно твердый, поле тяготения однородно, центральный эллипсоид инерции ротора есть эллипсоид вращения.

Вектор смещения точки O_1 из центра подвеса O обозначим через x , вектор смещения точки O_1 относительно O_2 — через l . Назовем l вектором дебаланса ротора, причем единицу длины выберем таким образом, чтобы $|l| = 1$.

Выражение для равнодействующей F пондеромоторных сил, приложенных к проводящему шару в электростатическом подвесе, найдено в [3]. Величина вектора F зависит от потенциалов электродов подвеса, вектора смещения геометрического центра ротора x , а также от геометрических параметров подвеса, конфигурации электродов и т. п.

Потенциалы электродов регулируются специальной следящей системой в зависимости от показаний датчиков смещения ротора, изменяющих величины вектора x . Измерение производится в дискретные моменты времени $t = nT$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), T — период квантования, который в дальнейшем принимается равным единице. На интервале времени $n \leq t < n + \gamma$ на электроды подвеса кроме некоторого опорного напряжения дополнительно подаются напряжения, пропорциональные линейной комбинации $\sigma + 1$ последовательных значений вектора x , измеренного в дискретные моменты времени, предшествующие данному периоду. В течение остального времени $n + \gamma \leq t < n + 1$ дополнительные напряжения, подаваемые на электроды, равны нулю. (Параметр $0 < \gamma \leq 1$ характеризует скважность импульсов управления.)

При $t = n + 1$ производится новое измерение вектора x и процесс повторяется. Таким образом, описанная система с амплитудно-импульсной модуляцией относится к классу систем с альтернированием [4].

Используя формулы работы [3] и считая смещения ротора из центра подвеса малыми, можно получить следующее выражение для равнодействующей пондеромоторных сил, приложенных к ротору:

$$\mathbf{F} = b^2 \mathbf{x} + \sum_{v=0}^{\sigma} k_v \mathbf{x}[n-v], \quad n \leq t < n+\gamma \quad (1.1)$$

$$\mathbf{F} = b^2 \mathbf{x} + 0, \quad n+\gamma \leq t < n+1$$

Здесь b^2 — постоянный коэффициент, зависящий от геометрических размеров ротора и электродов подвеса, заряда ротора и т. п., $\mathbf{x}[n]$ — значение вектора \mathbf{x} в момент времени $t=n$, k_v — коэффициенты передаточной функции следящей системы подвеса. При отсутствии управления, т. е. при $k_v=0$, сила \mathbf{F} «выталкивает» геометрический центр ротора из центра подвеса и величина b^2 характеризует естественную неустойчивость электростатического подвеса.

Уравнения движения ротора под действием силы (1.1) запишем в виде уравнения движения центра масс ротора и уравнения движения ротора относительно центра масс (массу ротора принимаем равной единице)

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{F} + \mathbf{p} + \mathbf{l}'' \quad (1.2)$$

$$\mathbf{g}' = \varepsilon \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{l} \times \mathbf{F} \quad (1.3)$$

Здесь \mathbf{p} — вектор силы тяготения, \mathbf{g} — кинетический момент ротора, ε — малый параметр, равный отношению квадрата дебаланса к квадрату радиуса инерции ротора, \mathbf{m} — главный момент силового поля подвеса относительно центра масс ротора.

Пусть $\xi_1' \xi_2' \xi_3'$ — правый ортогональный трехгранник с началом в центре подвеса O и осями, неизменно ориентированными в пространстве (ось ξ_3' направим противоположно вектору силы тяготения).

Введем правые ортогональные трехгранники $\xi_1 \xi_2 \xi_3$, $\eta_1 \eta_2 \eta_3$ и $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$ с началом в центре масс ротора O_2 . Оси ξ_j параллельны осям ξ_j' . Ось η_3 направлена по вектору кинетического момента гироскопа, ось η_1 лежит в плоскости $\xi_3 \eta_3$ и образует тупой угол с осью ξ_3 . Трехгранник η получается из трехгранника ξ двумя последовательными поворотами: поворотом на угол ρ_1 вокруг оси ξ_3 и поворотом на угол ρ_2 вокруг второй оси промежуточного трехгранника. Наконец, трехгранник ζ жестко связан с ротором, ось ζ_3 является осью динамической симметрии ротора, плоскость $\zeta_1 \zeta_2$ содержит вектор дебаланса \mathbf{l} . Положение трехгранника ζ относительно трехгранника η задается тремя эйлеровыми углами: φ_1 , φ_2 , φ_3 (φ_1 — угол прецессии, φ_2 — угол нутации, φ_3 — угол собственного вращения).

Проектируя уравнение (1.3) на оси трехгранника η , получаем

$$g \rho_2' = \varepsilon m_{\eta_1}, \quad g \sin \rho_2 \rho_1' = \varepsilon m_{\eta_2}, \quad g' = \varepsilon m_{\eta_3}, \quad m_{\eta_j} = l_{\eta_2} F_{\eta_3} - l_{\eta_3} F_{\eta_2} \quad (j=1, 2, 3); \quad (1.4)$$

$$l_{\eta_j} = \alpha_{j1} \cos \beta + \alpha_{j3} \sin \beta \quad (j=1, 2, 3)$$

$$\alpha_{11} = \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3$$

$$\alpha_{21} = \sin \varphi_1 \cos \varphi_3 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3, \quad \alpha_{31} = \sin \varphi_2 \sin \varphi_3$$

$$\alpha_{13} = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2, \quad \alpha_{23} = -\cos \varphi_1 \sin \varphi_2, \quad \alpha_{33} = \cos \varphi_2$$

Здесь $\beta = \text{const}$ — угол между вектором дебаланса и осью ζ_1 , α_{j1} , α_{j3} — направляющие косинусы в матрице взаимной ориентации трехгранников η и ζ .

Дифференциальные уравнения для углов Эйлера запишем в форме уравнений в оскулирующих элементах для динамически симметричного тела [5]:

$$\varphi_1' = g - \frac{\varepsilon}{g} (m_{\eta_1} \cos \varphi_1 + m_{\eta_2} \sin \varphi_1) \text{ctg} \varphi_2 - \frac{\varepsilon}{g} m_{\eta_3} \text{ctg} \varphi_2$$

$$\varphi_2^* = \frac{\varepsilon}{g} (m_{\eta_2} \cos \varphi_1 - m_{\eta_1} \sin \varphi_1) \quad (1.5)$$

$$\varphi_3^* = -\frac{g\kappa \cos \varphi_2}{1+\kappa} + \frac{\varepsilon}{g \sin \varphi_2} (m_{\eta_1} \cos \varphi_1 + m_{\eta_2} \sin \varphi_1)$$

где κ определено равенством $I_3 = I_1(1+\kappa)$, I_3, I_1 — соответственно полярный и экваториальный моменты инерции ротора.

2. Задача о движении несбалансированного электростатического гироскопа с импульсной системой регулирования сводится к исследованию системы уравнений и конечных соотношений (1.1), (1.2), (1.4), (1.5). Эти уравнения представляют собой сложные нелинейные уравнения, нахождение точного решения которых не представляется возможным. Для приближенного анализа движения ротора воспользуемся асимптотическими методами нелинейной механики.

Для разделения быстрых φ_1, φ_3, x и медленных $g, \rho_1, \rho_2, \varphi_2$ составляющих движения применим общую схему осреднения в форме В. М. Волосова [6].

Порождающая система уравнений для быстрых переменных получается из (1.2), (1.4), (1.5) при $\varepsilon=0$. При этом условия медленные переменные будут постоянными, углы φ_1, φ_3 — линейными функциями времени

$$\varphi_1 = gt + \varphi_1^0, \quad \varphi_3 = -ht + \varphi_3^0, \quad h = g \frac{\cos \varphi_2 \kappa}{1+\kappa} \quad (2.1)$$

φ_1^0, φ_3^0 — начальные значения углов прецессии и собственного вращения. В дальнейшем будем считать, что $h \neq 0$, т. е. $\kappa \neq 0, \varphi_2 \neq \pi/2$.

Таким образом, порождающим решением для углового движения ротора относительно центра масс является регулярная прецессия Эйлера — Пуансо. При этом проекции вектора дебаланса l на оси системы η будут гармоническими функциями времени с частотами $g, h, g+h, g-h$, входящими в правую часть (1.2) в виде линейной комбинации. Поэтому для определения компонент быстрой переменной x необходимо решить уравнение

$$x_j^{**} = b^2 x_j + \sum_{\nu=0}^{\sigma} k_{\nu} x_j [n-\nu] + a \exp(i\omega t) \quad (2.2)$$

$$n \leq t < n+\gamma$$

$$x_j^{**} = b^2 x_j + a \exp(i\omega t), \quad n+\gamma \leq t < n+1$$

Здесь x_j — проекция вектора x на ось η_j ($j=1, 2, 3$), a — амплитуда, ω — частота внешнего возмущения, $i = \sqrt{-1}$.

Вводя фазовый вектор $X = \|x_j, x_j^*\|^T$ (T — знак транспонирования), удобно перейти в уравнении (2.2) к матричной форме записи

$$X' = AX + B \sum_{\nu=0}^{\sigma} k_{\nu} X [n-\nu] + f(t) \quad (2.3)$$

$$n \leq t < n+\gamma$$

$$X' = AX + f(t), \quad n+\gamma \leq t < n+1$$

$$A = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ b^2 & 0 \end{Bmatrix}, \quad B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}, \quad f(t) = a \exp(i\omega t) \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Решение уравнений (2.3) имеет вид

$$X(t) = \exp(A\delta) X[n] + [\exp(A\delta) - E] A^{-1} B \sum_{\nu=0}^{\sigma} k_{\nu} X [n-\nu] +$$

$$+ \int_n^t \exp A(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad n \leq t < n+\gamma \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) = & \exp(A\delta) \mathbf{X}[n] + [\exp(A\delta) - \exp A(\delta-\gamma)] A^{-1} B \sum_{\nu=0}^{\sigma} k_{\nu} \mathbf{X}[n-\nu] + \\ & + \int_n^t \exp A(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad n+\gamma \leq t < n+1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь $\delta=t-n$, E — единичная матрица второго порядка

$$\exp(At) = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} bt & \frac{1}{b} \operatorname{sh} bt \\ b \operatorname{sh} bt & \operatorname{ch} bt \end{vmatrix}$$

Полагая в (2.5) $t=n+1$, находим

$$\begin{aligned} \mathbf{X}[n+1] = & \exp A \mathbf{X}[n] + [\exp A - \exp A(1-\gamma)] A^{-1} B \sum_{\nu=0}^{\sigma} k_{\nu} \mathbf{X}[n-\nu] + \\ & + \int_n^{n+1} \exp A(n+1-\tau) f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) представляет собой разностное матричное уравнение с постоянными коэффициентами. Решение (2.6) определяет значение вектора \mathbf{X} для дискретных значений аргумента, а формулы (2.4), (2.5) при известном $\mathbf{X}[n]$ позволяют получить значения вектора \mathbf{X} в любой момент времени.

При $f(t)=0$ ищем решение уравнения (2.6) в виде

$$\mathbf{X}[n] = \|C_1^{(0)}, C_2^{(0)}\|^T \lambda^n \quad (2.7)$$

где $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}$ — произвольные постоянные, λ — скалярный параметр. Подставляя (2.7) в (2.6), находим

$$\det \{ \exp A - \lambda E + k(\lambda) [\exp A - \exp A(1-\gamma)] A^{-1} B \} = 0 \quad (2.8)$$

$$k(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\sigma} k_{\nu} \lambda^{-\nu}$$

Раскрывая определитель, перепишем характеристическое уравнение (2.8) следующим образом:

$$\lambda^2 - 2 \operatorname{ch} b\lambda + 1 - q(\lambda) (\theta\lambda + 1) = 0 \quad (2.9)$$

$$q(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\sigma} q_{\nu} \lambda^{-\nu} = k(\lambda) b^{-2} (\operatorname{ch} b\gamma - 1)$$

$$\theta = [\operatorname{ch} b - \operatorname{ch} b(1-\gamma)] / (\operatorname{ch} b\gamma - 1)$$

Для реального подвеса параметры передаточной функции $q(\lambda)$ обязаны удовлетворять условию затухания собственных колебаний ротора электростатического гироскопа, т. е. корни уравнения (2.9) должны лежать внутри круга единичного радиуса

$$|\lambda| < 1 \quad (2.10)$$

Для отыскания частного решения уравнения (2.6) заметим, что

$$\int_0^{n+1} \exp A(n+1-\tau) f(\tau) d\tau = \frac{1}{b^2 + \omega^2} (i\omega E + A) [\exp A - E \exp(i\omega)] \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\| a \exp(i\omega n)$$

Следовательно, частное решение уравнения (2.6) имеет вид

$$X[n] = a \exp(i\omega n) \|C_1(\omega), C_2(\omega)\|^T, \quad C_1(\omega) = \frac{2(\operatorname{ch} b - \cos \omega)}{(b^2 + \omega^2) \Delta(\omega)} \quad (2.11)$$

$$C_2(\omega) = \{2i\omega (\operatorname{ch} b - \cos \omega) - k(z) b^{-2} [b \operatorname{sh} b - b \operatorname{sh} b(1-\gamma) - i\omega \operatorname{ch} b + i\omega \operatorname{ch} b(1-\gamma) - bz^{-1} \operatorname{sh} b\gamma - i\omega z^{-1} (\operatorname{ch} b\gamma - 1)]\} / [(b^2 + \omega^2) \Delta(\omega)],$$

$$z = \exp(i\omega)$$

$$\Delta(\omega) = -2(\operatorname{ch} b - \cos \omega) - q(z)(\theta + z^{-1})$$

В силу условий устойчивости (2.10) выполнено неравенство $\Delta(\omega) \neq 0$, поэтому формулы (2.11) определены корректно.

Подставляя l_{nj} из (1.4) в правые части уравнений (1.2) и учитывая формулы (2.1) и (2.11), получаем следующие выражения для проекций вектора x на оси трехгранника η в дискретные моменты времени:

$$x_c[n] = -1/2 \cos \beta \{ (g-h)^2 (1 + \cos \varphi_2) C_1(g-h) \exp[i(g-h)n] + (g+h)^2 (1 - \cos \varphi_2) C_1(g+h) \exp[i(g+h)n] \} + i \sin \beta \sin \varphi_2 g^2 C_1(g) \exp(ign) + p \sin \rho_2 C_1(0) \quad (2.12)$$

$$x_3[n] = \cos \beta \sin \varphi_2 h^2 \operatorname{Im} [C_1(h) \exp(ihn)] - p \cos \rho_2 C_1(0)$$

Здесь $x_c = x_1 + ix_2$. Таким образом, формулы (2.4), (2.5), (2.12) дают решение для быстрой переменной x и вместе с формулой (2.1) представляют собой решение порождающей системы уравнений. Отметим, что в (2.12) опущены слагаемые вида (2.7), так как в силу условий устойчивости (2.10) эти слагаемые исчезают при проведении процедуры осреднения.

3. Перейдем к построению уравнений для медленных переменных. Согласно схеме осреднения, подставим решение порождающей системы в правые части уравнений (1.4), (1.5) для медленных переменных и проведем операцию осреднения по времени (осредняем по регулярной прецессии Эйлера — Пуансо и по быстрым движениям центра масс ротора). При осреднении встречаются резонансные случаи

$$g = \pi j, \quad h = \pi j \quad (j=1, 2, \dots), \quad g \pm h = 2\pi j \quad (3.1)$$

$$g \pm 2h = 2\pi j, \quad 2g \pm h = 2\pi j \quad (j=0, \pm 1, \dots)$$

Однако при $\kappa > 0$ (случай сплюснутого эллипсоида инерции ротора) выполнено неравенство $g > 2h$; кроме того, нормализованное значение модуля кинетического момента g порядка единицы. Поэтому резонансные соотношения (3.1) в данном случае не выполнены и при $\kappa > 0$ приходим к следующей системе уравнений первого приближения

$$\rho_2 = 0, \quad \rho_1 = -\varepsilon p \sin \beta \cos \varphi_2 / g \quad (3.2)$$

$$g^* = -\varepsilon \{ (1 + \cos \varphi_2)^2 \operatorname{Im} V(g-h) + (1 - \cos \varphi_2)^2 \times \times \operatorname{Im} V(g+h) \} \cos^2 \beta / 4 - \varepsilon \sin^2 \varphi_2 \operatorname{Im} V(g) \sin^2 \beta \quad (3.3)$$

$$\varphi_2 = \varepsilon \sin \varphi_2 \{ [(1 + \cos \varphi_2) \operatorname{Im} V(g-h) - (1 - \cos \varphi_2) \times \times \operatorname{Im} V(g+h) - 2 \operatorname{Im} V(h)] \cos^2 \beta / 4 - \cos \varphi_2 \operatorname{Im} V(g) \sin^2 \beta \} / g \quad (3.4)$$

Уравнения (3.2)–(3.4) совпадают по структуре с аналогичными уравнениями для случая непрерывного управления ротором [1]. Однако функция $V(\omega)$ в рассматриваемом случае импульсного управления имеет вид

$$V(\omega) = \frac{2i\omega^3 (\operatorname{ch} b - \cos \omega) k(z)}{(b^2 + \omega^2) \Delta(\omega)} (z^{-1} - 1)$$

Из (3.2) следует, что вектор кинетического момента ротора g прецессирует вокруг направления силы тяготения с угловой скоростью, равной $-\varepsilon r \sin \beta \cos \varphi_2 / g$. В силу несбалансированности ротора его поступательные и вращательные движения взаимосвязаны, что может приводить как к торможению, так и разгону ротора при одновременном изменении амплитуды нутационных колебаний.

Рассмотрим практически важный случай движения гироскопа, когда угол между осью симметрии и вектором кинетического момента ротора мал. В этом случае с точностью до членов второго порядка малости по φ_2 из (3.3), (3.4) получаем

$$g^* = -\varepsilon \operatorname{Im} V(\omega) \cos^2 \beta, \quad \varphi_2 = \varepsilon \varphi_2 \{ \frac{1}{2} [\operatorname{Im} V(\omega) - \operatorname{Im} V(\kappa\omega)] \cos^2 \beta - \operatorname{Im} V(g) \sin^2 \beta \} / g$$

Здесь $\omega = g/(1 + \kappa)$ – скорость вращения ротора вокруг оси симметрии. Из последнего уравнения (3.5) следует достаточное условие асимптотической устойчивости нутационных колебаний ротора

$$\operatorname{Im} V(g) \sin^2 \beta + \frac{1}{2} [\operatorname{Im} V(\kappa\omega) - \operatorname{Im} V(\omega)] \cos^2 \beta > 0$$

Положительные корни уравнения

$$\operatorname{Im} V(\omega) = 0 \tag{3.6}$$

определяют стационарные скорости вращения гироскопа. Для асимптотической устойчивости вращения ротора со скоростью ω_* достаточно выполнение неравенства

$$\frac{\partial}{\partial \omega} [\operatorname{Im} V(\omega)]|_{\omega=\omega_*} > 0$$

Уравнение (3.6) в случае, когда скважность импульсов управления γ равна единице, может быть записано в виде

$$(1 - \cos \omega) \sum_{\nu=0}^{\sigma} k_{\nu} \cos \nu \omega - \sin \omega \sum_{\nu=0}^{\sigma} k_{\nu} \sin \nu \omega = 0 \tag{3.7}$$

После подстановки в (3.7) формул для тригонометрических функций кратных углов и замены $y = \cos \omega$ задача отыскания стационарных скоростей сводится к решению алгебраического уравнения для переменной y .

Из (3.7) следует, что угловые скорости $\omega = 2\pi j$ ($j=1, 2, \dots$) представляют собой серию решений этого уравнения. Таким образом, решения $\omega = 2\pi j$ являются стационарными скоростями вращения ротора при любой передаточной функции подвеса $k(z)$. (Этот вывод, вообще говоря, неверен для $\gamma \neq 1$.) Однако величины этих стационарных скоростей весьма велики; уже при $j=1$ и периоде квантования $T = 10^{-4}$ с [2] имеем угловые скорости вращения порядка 600 тыс. об/мин (для сравнения заметим, что система, описанная в [2], имеет рабочей скоростью 148 тыс. об/мин).

4. При конструировании гироскопа необходимо исключить возможность удара ротора о стенки кожуха. Для этого нужно оценить амплитуду биений несбалансированного ротора. Используем полученные в п. 2 формулы для быстрых движений геометрического центра ротора (медленные переменные при этом считаем постоянными).

Предположим, что вектор дебаланса перпендикулярен оси динамической симметрии ротора ($\beta=0$), угол между вектором кинетического момента и осью динамической симметрии ротора равен нулю ($\varphi_2=0$). Кроме того, предположим, что вектор кинетического момента ротора параллелен оси ξ_3' , сила тяготения отсутствует. В этом случае ротор совершает плоскопараллельное движение и точки O_1, O_2 движутся в плоскости $\xi_1'\xi_2'$. Траектория геометрического центра O_1 , записанная в комплексной форме в системе координат $O\xi_1'\xi_2'$, имеет вид

$$x_{\xi} = \frac{\omega^2}{b^2 + \omega^2} \exp(i\omega n) \left\{ \exp(i\omega\delta) - \frac{k(z)}{b^2\Delta(\omega)} [-2(\operatorname{ch} b - \cos \omega) + u_1 \operatorname{ch} b\delta - v_1 \operatorname{sh} b\delta] \right\}, \quad n \leq t < n + \gamma; \quad x_{\xi} = \frac{\omega^2}{b^2 + \omega^2} \exp(i\omega n) \times \\ \times \left\{ \exp(i\omega\delta) - \frac{k(z)}{b^2\Delta(\omega)} [u_2 \operatorname{ch} b\delta - v_2 \operatorname{sh} b\delta] \right\}, \quad n + \gamma \leq t < n + 1 \quad (4.1)$$

$$u_1 = \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} b(1 - \gamma) - z^{-1} \operatorname{ch} b\gamma - z \\ v_1 = \operatorname{sh} b - \operatorname{sh} b(1 - \gamma) - z^{-1} \operatorname{sh} b\gamma \\ u_2 = \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} b(1 + \gamma) + z \operatorname{ch} b\gamma - z \\ v_2 = \operatorname{sh} b - \operatorname{sh} b(1 + \gamma) + z \operatorname{sh} b\gamma$$

Формула (4.1) позволяет получить траекторию центра подвеса O в осях ξ , связанных с ротором. Эта траектория в системе координат $O_2\xi_1\xi_2$ задается комплексным уравнением

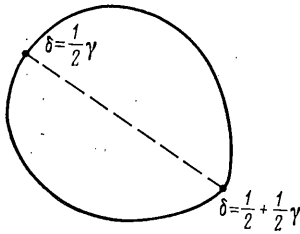
$$r_{\xi}(\delta) = \frac{1}{b^2 + \omega^2} \left\{ b^2 + \frac{\omega^2 k(z)}{b^2\Delta(\omega)} [-2(\operatorname{ch} b - \cos \omega) + u_1 \operatorname{ch} b\delta - v_1 \operatorname{sh} b\delta] \exp(-i\omega\delta) \right\}, \quad n \leq t < n + \gamma; \quad r_{\xi}(\delta) = \frac{1}{b^2 + \omega^2} \left\{ b^2 + \frac{\omega^2 k(z)}{b^2\Delta(\omega)} [u_2 \operatorname{ch} b\delta - v_2 \operatorname{sh} b\delta] \exp(-i\omega\delta) \right\}, \quad n + \gamma \leq t < n + 1 \quad (4.2)$$

Из (4.2) следует, что центр подвеса O в осях, связанных с ротором, описывает замкнутую кривую, которая одинакова для каждого периода повторения. Период движения точки O по этой кривой равен периоду альтернирования (т. е. единице в безразмерном времени). Траектория движения точки O симметрична относительно прямой, проходящей через точки $r_{\xi}(1/2\gamma), r_{\xi}(1/2 + 1/2\gamma)$, и внешне напоминает эллипс (фиг. 1). Максимальная амплитуда биений ротора определяется точкой на траектории $r_{\xi}(\delta)$, наиболее удаленной от точки O_1 .

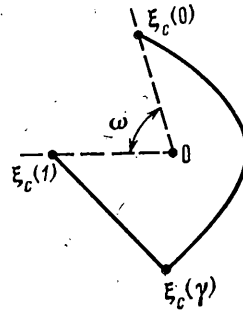
Обозначим комплексный годограф мгновенного центра скоростей ротора C в подвижной системе координат $O_2\xi_1\xi_2$ (полодия) через ξ_c . Уравнение полодии имеет вид

$$\xi_c(\delta) = \frac{1}{b^2 + \omega^2} \left\{ b^2 - \frac{i\omega k(z)}{b\Delta(\omega)} [u_1 \operatorname{sh} b\delta - v_1 \operatorname{ch} b\delta] \exp(-i\omega\delta) \right\}, \quad n \leq t < n + \gamma \\ \xi_c(\delta) = \frac{1}{b^2 + \omega^2} \left\{ b^2 - \frac{i\omega k(z)}{b\Delta(\omega)} [u_2 \operatorname{sh} b\delta - v_2 \operatorname{ch} b\delta] \exp(-i\omega\delta) \right\}, \quad n + \gamma \leq t < n + 1 \quad (4.3)$$

Из (4.3) заключаем, что полодия есть замкнутая кривая, не зависящая от периода повторения и симметричная относительно прямой, проходящей через точки $\xi_c(1/2\gamma), \xi_c(1/2 + 1/2\gamma)$. Период движения точки C по полодии равен периоду альтернирования.



Фиг. 1



Фиг. 2

Изучая уравнения траектории центра подвеса (4.2) и полодии (4.3) в плоскости $O_2 \xi_1 \xi_2$, можно заметить, что стационарные скорости вращения ротора возможны в случае, когда вектор дебаланса l направлен по оси симметрии годографов $r_c(\delta)$ и $\xi_c(\delta)$.

Обозначим комплексный годограф мгновенного центра скоростей ротора C в неподвижной системе координат $O \xi_1' \xi_2'$ (герполодия) через ξ_c . Герполодия задается уравнением $\xi_c = x_c - l_c + i(x_c' - l_c')/\omega$, где $l_c = l_{c_1} + i l_{c_2}$. Герполодия представляет собой незамкнутую, вообще говоря, кривую, которая для каждого периода $[n, n+1]$ получается из кривой, изображенной на фиг. 2 поворотом на угол ωn радиан. Движение ротора можно представить как качение без скольжения полодии ξ_c по герполодии ξ_c .

Полученные результаты отличаются от случая непрерывного управления ротором [1], где имело место вращение ротора вокруг прямой, перпендикулярной плоскости $\xi_1' \xi_2'$ и проходящей через центр подвеса O .

5. Рассмотрим конкретный пример импульсного управления по двум последовательным координатам геометрического центра ротора. Возьмем в (1.1) $\sigma=1$; передаточная функция подвеса $q(\lambda)$, определенная в формулах (2.9), в этом случае имеет вид $-q_0 + q_1 \lambda^{-1}$.

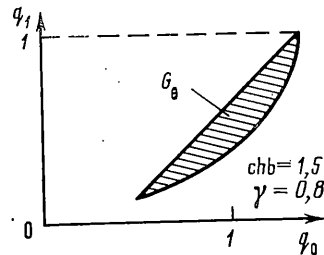
Для исследования корней характеристического уравнения (2.9) удобно перейти от плоскости λ к плоскости λ' с помощью конформного преобразования, отображающего внутренность круга единичного радиуса $|\lambda| < 1$ на левую полуплоскость $\text{Re } \lambda' < 0$, и применить критерий Гурвица к полученному уравнению относительно переменной λ' . При этом условия устойчивости (2.10), которые для переменной λ' имеют вид $\text{Re } \lambda' < 0$, выделяют в пространстве параметров q_0, q_1 область устойчивости G_θ , задаваемую системой неравенств

$$q_0 - q_1 - 2(\text{ch } b - 1)/(\theta + 1) > 0 \quad (5.1)$$

$$(\theta - 1)q_0 + (\theta + 3)q_1 - 2(\text{ch } b - 1) > 0 \quad (5.2)$$

$$-(\theta - 1)q_0 - (\theta - 1)q_1 + 2(\text{ch } b + 1) > 0 \quad (5.3)$$

$$-q_1^2 - \theta q_0 q_1 + (\theta + 2 \text{ch } b)q_1 - q_0 > 0 \quad (5.4)$$



Фиг. 3

Область G_θ образована прямыми линиями и гиперболой, уравнения которых получаются, если в неравенствах (5.1)–(5.4) поставить знаки равенства. Если $\text{ch } b \geq 3$ и $\theta \leq [2(\text{ch } b - 1)]^{1/2} - 1$, то область устойчивости G_θ – пустое множество. При $[2(\text{ch } b - 1)]^{1/2} - 1 < \theta \leq [2(\text{ch } b + 1)]^{1/2} + 1$ область G_θ образована прямой (5.1) и гиперболой (5.4) (фиг. 3); при $\theta > [2(\text{ch } b + 1)]^{1/2} + 1$ область G_θ образована прямыми (5.1), (5.3) и гиперболой (5.4). Если γ стремится к нулю, то область устойчивости G_θ асимптотически стягивается в точку, которая стремится к началу координат.

Согласно уравнению (3.6), для определения стационарных скоростей вращения ротора заключаем, что стационарной скорости ω_* на плоскости (q_0, q_1) соответствует эллипс, проходящий через начало координат ($\gamma \neq 1$)

$$a_* q_0^2 + 2b_* q_0 q_1 + c_* q_1^2 + 2d_* q_0 + 2e_* q_1 = 0 \quad (5.5)$$

$$a_* = c_* = \theta(1 - \cos \omega_* \gamma) + \cos \omega_* - \cos \omega_*(1 - \gamma)$$

$$b_* = -\cos \omega_* a_*, \quad d_* = (\text{ch } b - \cos \omega_*)(\cos \omega_* \gamma - 1)$$

$$e_* = (\operatorname{ch} b - \cos \omega_*) [\cos \omega_* - \cos \omega_* (1 + \gamma)]$$

Пересечение эллипса (5.5) с областью устойчивости G_0 дает значения параметров q_0, q_1 , которые реализуют устойчивый подвес и обеспечивают стационарную скорость вращения ω_* ротора гироскопа.

Численный анализ уравнения (3.6) показал, что при $b=1, T=10^{-4}$ с в диапазоне угловых скоростей вращения гироскопа до 200 тыс. об/мин существует неустойчивая стационарная скорость вращения ротора. Других стационарных скоростей в указанном диапазоне не существует. В случае, когда скажность импульсов управления $\gamma=1$, неустойчивая стационарная скорость ω_* определяется формулой $\omega_* = \arccos \cdot [(q_0 - q_1)/(2q_1)]$. На плоскости (q_0, q_1) этой стационарной скорости соответствует прямая $q_0 - (2 \cos \omega_* + 1) q_1 = 0$, проходящая через начало координат.

Авторы благодарят И. В. Новожилова за обсуждение статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маргыненько Ю. Г.* Движение несбалансированного гироскопа с неконтактным подвесом. — Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 4, с. 13–19.
2. *Duncan R. R.* Micron — a strapdown inertial navigator using miniature gyros. Institute of Navigation Conference, March. 13–15, 1973.
3. *Маргыненько Ю. Г.* К теории пространственного электростатического ньютонометра. — В кн.: Некоторые вопросы теории навигационных систем. М.: Изд-во МГУ, 1979, с. 141–154.
4. *Ройтенберг Я. Н.* Некоторые задачи управления движением. М.: Физматгиз, 1963. 140 с.
5. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
6. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.IV.1980