

УДК 539.3

**МЕТОД РИТЦА В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ,  
ОСНОВАННЫЙ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ МИНИМИЗАЦИИ  
ДВУХ ФУНКЦИОНАЛОВ**

**СЛИВКЕР В. И.**

Метод Ритца, основанный на минимизации функционала полной потенциальной энергии (лагранжиана) упругой системы на конечно-мерном подпространстве некоторого допустимого пространства функций перемещений (лагранжева энергетического пространства), приводит к приближенным решениям, имеющим в перемещениях более высокую точность по сравнению с точностью в напряжениях. Для метода конечных элементов, как варианта метода Ритца со специальным выбором системы координатных функций, характерна также разрывность поля напряжений на межэлементных границах при непрерывности поля перемещений [1].

Эти недостатки метода Ритца (и, в частности, метода конечных элементов) исчезают, если вариационная постановка задачи базируется на использовании функционала дополнительной энергии, однако при этом возникают трудности в построении соответствующих координатных систем поля напряжений, которые должны удовлетворять уравнениям равновесия в объеме и на поверхности тела. Альтернативный подход связан с функционалами смешанного типа при независимой аппроксимации полей напряжений и перемещений. Серьезным недостатком функционалов смешанного типа является отсутствие у них экстремальных свойств, что порождает трудности вычислительного характера.

Ниже предлагается схема построения соответствующих приближений в методе Ритца, характеризуемая следующими свойствами: принимаются независимые аппроксимации силовых и кинематических полей; строятся две системы уравнений, каждая из которых обладает положительно-определенной матрицей; краевые условия (как статические, так и кинематические) удовлетворяются точно. В отличие от известных подходов, основанных на выполнении условий стационарности одного функционала, в предлагаемом методе с дифференциальной постановкой задачи связываются два функционала, условия минимума которых на конечно-мерных подпространствах дают искомые разрешающие системы уравнений.

1. Сформулируем задачу определения напряженного и деформированного состояния линейно-упругого анизотропного тела в некоторой декартовой системе координат. Пусть рассматриваемое тело занимает область  $\Omega$  (одно-, двух-, или трехмерного пространства) с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ . В области  $\Omega$  выполняются: уравнения равновесия ( $F$  — вектор заданных объемных сил,  $\sigma$  — тензор напряжений):

$$\sigma_{,j}{}^{ij} + F^i = 0 \quad (1.1)$$

соотношения Коши ( $u$  — вектор перемещений,  $\varepsilon$  — тензор деформаций)

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \varepsilon = \text{Def } u \quad (1.2)$$

соотношения упругости ( $C$  — тензор жесткости,  $D$  — тензор податливости)

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = d_{ijkl} \sigma^{kl} \quad (1.3)$$

Границу  $\Gamma$  области  $\Omega$  будем считать состоящей из двух частей  $\Gamma_p$  и  $\Gamma_u$ , так что  $\Gamma_p \cup \Gamma_u = \Gamma$ ,  $\Gamma_p \cap \Gamma_u = \emptyset$ .

Краевые условия формулируются следующим образом ( $n$  — единичный вектор внешней нормали к границе):

$$\sigma^{ij} n_j = p^i \text{ на } \Gamma_p; \quad u_i = u_i^+ \text{ на } \Gamma_u \quad (1.4)$$

где  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{u}^+$  — заданные на соответствующих частях границы области  $\Omega$  векторы сил и перемещений.

Пусть  $U$  — множество кинематических допустимых векторов перемещений,  $U^\circ$  — множество кинематически допустимых вариаций векторов перемещений. Заметим, что векторы из  $U$  удовлетворяют краевым условиям на  $\Gamma_u$ , а векторы из  $U^\circ$  — соответствующим однородным краевым условиям; при этом входящие в оба множества векторы интегрируются с квадратом вместе с порождаемыми этими перемещениями деформациями.

Как известно [2], обобщенным решением по определению деформированного состояния тела называется такой вектор  $\mathbf{u}^* \in U$ , для которого выполняется интегральное тождество

$$\int_{\Omega} C^{ijkl} \varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{kl}^\circ d\Omega = \int_{\Omega} F^i u_i^\circ d\Omega + \int_{\Gamma_p} p^i u_i^\circ d\Gamma$$

справедливое при любом векторе  $\mathbf{u}^\circ \in U^\circ$ , причем  $\varepsilon^* = \text{Def } \mathbf{u}^*$ ,  $\varepsilon^\circ = \text{Def } \mathbf{u}^\circ$ .

В предположении, что для любого не зависящего от координат симметричного тензора  $a$  второго ранга справедливы неравенства

$$M_c a^{ij} a_{ij} \geq C^{ijkl} a_{ij} a_{kl} \geq m_c a^{ij} a_{ij}, \quad m_c > 0 \quad (1.5)$$

(где  $M_c$ ,  $m_c$  — не зависящее от координат скаляры) приведенная формулировка обобщенного решения эквивалентна вариационной формулировке, связанной с минимизацией лагранжиана  $L_u = W_u - \Pi_u$ , где  $W_u$  — потенциальная энергия деформации,  $\Pi_u$  — потенциал активных объемных и поверхностных сил

$$W_u = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} d\Omega, \quad \Pi_u = \int_{\Omega} F^i u_i d\Omega + \int_{\Gamma_p} p^i u_i d\Gamma$$

2. Обычно после определения вектора перемещений  $\mathbf{u}^*$  задача отыскания напряженного состояния (определение истинного тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}_*$ ) считается тривиальной, так как

$$\boldsymbol{\sigma}_*^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^* \quad (2.1)$$

В дальнейшем напряжения, определяемые по формуле (2.1), будем называть слабым решением по напряжениям. Переформулируем задачу отыскания  $\boldsymbol{\sigma}_*$ , связав ее с вариационной постановкой.

Пусть  $T$  — множество симметричных тензоров  $\boldsymbol{\sigma}$  второго ранга, таких, что  $\sigma^{ij} n_j = p^i$  на  $\Gamma_p$ ; тензор  $\boldsymbol{\sigma}$  имеет обобщенные первые производные по всем координатам и при этом существуют конечные интегралы  $\int \sigma^{ij} \sigma_{ij} d\Omega$ ,  $\int \sigma_{,j}^{ij} \sigma_{,k}^{ik} d\Omega$ , взятые по области  $\Omega$ .

Пусть далее  $T_0$  — аналогичное множество, но с тензорами  $\boldsymbol{\sigma}_0$ , удовлетворяющими однородным краевым условиям  $\sigma_0^{ij} n_j = 0$  на  $\Gamma_p$ . Множество  $T$  будем называть множеством статически полудопустимых тензоров напряжений,  $T_0$  — множеством статически полудопустимых вариаций тензоров напряжений.

Для любого вектора  $\mathbf{u} \in U \cup U^\circ$  и симметричного тензора второго ранга  $\boldsymbol{\sigma} \in T \cup T_0$  имеет место формула Гаусса — Остроградского

$$\int_{\Omega} \sigma^{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega = - \int_{\Omega} \sigma_{,j}^{ij} u_i d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma^{ij} n_j u_i d\Gamma \quad (2.2)$$

Пусть  $\mathbf{u}^*$  — обобщенное решение задачи по перемещениям. Назовем «сильным» решением задачи по напряжениям тензор  $\boldsymbol{\sigma}_* \in T$ , удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} d_{ijkm} \sigma_*^{ij} \sigma_0^{km} d\Omega = - \int_{\Omega} \sigma_{0,j}^{ij} u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_u} \sigma_0^{ij} n_j u_i^+ d\Gamma \quad (2.3)$$

для любого тензора  $\sigma_0 \in T_0$ .

Если  $\mathbf{u}^*$  — достаточно гладкий вектор так, что  $\sigma_*$ , определяемое по формуле (2.1), принадлежит допустимому множеству  $T$ , то слабые напряжения совпадают с сильными. Действительно, в силу (2.3) имеет место равенство  $\varepsilon_{ij}^* = d_{ijkm} \sigma_*^{km}$ . Домножая это равенство на  $\sigma_0^{ij}$  и интегрируя по  $\Omega$ , получим с учетом (2.2) интегральное тождество (2.3).

Покажем теперь, что если существуют сильные напряжения  $\sigma_*$ , то они являются также и слабыми. В самом деле, из (2.3) с учетом (2.2) получим

$$\int_{\Omega} (d_{ijkm} \sigma_*^{km} - \varepsilon_{ij}^*) \sigma_0^{ij} d\Omega = 0$$

откуда в силу произвольности  $\sigma_0 \in T_0$  следует (2.1).

На множестве  $T$  введем в рассмотрение функционал  $D_\sigma = W_\sigma - \Pi_\sigma$ , где  $W_\sigma$  — дополнительная энергия,  $\Pi_\sigma$  — потенциал «реактивных» сил

$$W_\sigma = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d_{ijkm} \sigma^{ij} \sigma^{km} d\Omega, \quad \Pi_\sigma = - \int_{\Omega} \sigma_{,j}^{ij} u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_u} \sigma^{ij} n_j u_i^+ d\Gamma$$

Варьируя функционал  $D_\sigma$ , получим условия его стационарности

$$\delta D_\sigma = \int_{\Omega} d_{ijkm} \sigma^{ij} \delta \sigma^{km} d\Omega + \int_{\Omega} u_i^* \delta \sigma_{,j}^{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_u} u_i^+ n_j \delta \sigma^{ij} d\Gamma = 0$$

Отождествляя вариацию  $\delta \sigma$  с  $\sigma_0$ , получим отсюда интегральное тождество (2.3). Таким образом задача поиска сильного решения по напряжениям и «стационарной точки» функционала  $D_\sigma$  на множестве  $T$  эквивалентны.

Если сильное решение  $\sigma_*$  существует и выполняется условие (1.5), то в точке стационарности функционал  $D_\sigma$  минимален.

В самом деле, условия (1.5) влекут за собой выполнение неравенств

$$M_d a^{ij} a_{ij} \geq d_{ijkm} a^{ij} a^{km} \geq m_d a^{ij} a_{ij}, \quad M_d = \frac{1}{m_c}, \quad m_d = \frac{1}{M_c} > 0 \quad (2.4)$$

для любого не зависящего от координат симметричного тензора  $\mathbf{a}$  второго ранга.

Далее, для любого статически полудопустимого тензора  $\sigma$  имеем

$$D_\sigma(\sigma, \mathbf{u}^*) - D_\sigma(\sigma_*, \mathbf{u}^*) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d_{ijkm} \sigma_0^{ij} \sigma_0^{km} d\Omega + \int_{\Omega} d_{ijkm} \sigma_*^{ij} \sigma_0^{km} d\Omega + \\ + \int_{\Omega} \sigma_{0,j}^{ij} u_i^* d\Omega - \int_{\Gamma_u} \sigma_0^{ij} n_j u_i^+ d\Gamma, \quad \sigma_0 = \sigma - \sigma_* \in T_0 \quad (2.5)$$

Так как  $\sigma_*$  удовлетворяет интегральному тождеству (2.3), то три последних интеграла в правой части формулы (2.5) исчезают, а оставшийся интеграл в силу (2.4) неотрицателен. Следовательно,  $D_\sigma(\sigma, \mathbf{u}^*) \geq D_\sigma(\sigma_*, \mathbf{u}^*)$ .

Будем помечать звездочкой значения всех вводимых функционалов на решении задачи. Для лагранжиана  $L_u$  в силу формулы Клапейрона [3]:

$$W_u^* = \frac{1}{2} \Pi_u^* + \frac{1}{2} A_\sigma^*, \quad A_\sigma = \int_{\Gamma_u} \sigma^{ij} n_j u_i^+ d\Gamma$$

где  $A_\sigma$  — потенциал поверхностных реактивных сил, имеем

$$L_u^* = -1/2 \Pi_u^* + 1/2 A_\sigma^* = -W_u^* + A_\sigma^* \quad (2.6)$$

Получим аналог формулы Клапейрона для функционала  $D_\sigma$ . Для сильного решения в напряжениях  $\sigma_*$ , воспользовавшись формулой (2.2), будем иметь

$$W_\sigma^* = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d_{ijkm} \sigma_*^{ij} \sigma_*^{km} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^* \sigma_*^{ij} d\Omega = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_*^{ij} \mu_{ij}^* d\Omega + \\ + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_p} p^i u_i^* d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_u} \sigma_*^{ij} n_j u_i^* d\Gamma$$

Вводя потенциал поверхностных активных сил  $A_u$ , получим искомый аналог формулы Клапейрона

$$W_\sigma^* = 1/2 \Pi_\sigma^* + 1/2 A_u^*, \quad A_u = \int_{\Gamma_p} p^i u_i d\Gamma$$

Теперь нетрудно найти

$$D_\sigma^* = -1/2 \Pi_\sigma^* + 1/2 A_u^* = -W_\sigma^* + A_u^* \quad (2.7)$$

Обозначим через  $A = A_u + A_\sigma$  суммарный потенциал всех (активных и реактивных) поверхностных сил и учтем, что для линейно-упругого тела значения потенциала деформирования и дополнительной энергии на решении задачи совпадают; т. е.  $W_\sigma^* = W_u^* = W^*$ . Из (2.6) и (2.7) получим  $L_u^* + D_\sigma^* = -2W^* + A^*$ ,  $L_u^* + A_u^* = D_\sigma^* + A_\sigma^*$ .

Выпишем выражения для  $L_u^*$  и  $D_\sigma^*$  при различных частных случаях внешних воздействий. Все эти частные случаи для трех условий ( $F=0$ ,  $p=0$ ,  $u^+=0$ ) приводятся ниже:

$$F \neq 0, \quad p \neq 0, \quad u^+ \neq 0: \quad L_u^* = -W^* + A_\sigma^*, \quad D_\sigma^* = -W^* + A_u^*$$

$$F \neq 0, \quad p \neq 0, \quad u^+ = 0: \quad L_u^* = -W^*, \quad D_\sigma^* = -W^* + A_u^*$$

$$F \neq 0, \quad p = 0, \quad u^+ \neq 0: \quad L_u^* = -W^* + A_\sigma^*, \quad D_\sigma^* = -W^*$$

$$F \neq 0, \quad p = 0, \quad u^+ = 0: \quad L_u^* = -W^*, \quad D_\sigma^* = -W^*$$

$$F = 0, \quad p \neq 0, \quad u^+ \neq 0: \quad L_u^* = 1/2 (A_\sigma^* - A_u^*), \quad D_\sigma^* = 1/2 (A_u^* - A_\sigma^*)$$

$$F = 0, \quad p \neq 0, \quad u^+ = 0: \quad L_u^* = -W^* = -1/2 A_u^*, \quad D_\sigma^* = W^* = 1/2 A_u^*$$

$$F = 0, \quad p = 0, \quad u^+ \neq 0: \quad L_u^* = W^* = 1/2 A_\sigma^*, \quad D_\sigma^* = -W^* = -1/2 A_\sigma^*$$

$$F = 0, \quad p = 0, \quad u^+ = 0: \quad L_u^* = 0, \quad D_\sigma^* = 0$$

Покажем, что при выполнении условий (1.5) не существует более одной точки минимальности функционала  $D_\sigma$ . Предположим противное: существуют  $\sigma_{*1}$  и  $\sigma_{*2}$ , минимизирующие  $D_\sigma$ . Тогда из (2.3) следует, что

$$\int_{\Omega} d_{ijkm} (\sigma_{*1}^{ij} - \sigma_{*2}^{ij}) \sigma_0^{km} d\Omega = 0$$

Полагая  $\sigma_0 = \sigma_{*1} - \sigma_{*2}$ , получим отсюда и из (2.4)

$$0 = \int_{\Omega} d_{ijkm} \sigma_0^{ij} \sigma_0^{km} d\Omega \geq m_d \int_{\Omega} \sigma_0^{ij} \sigma_{ij}^0 d\Omega > 0$$

Данное противоречие и доказывает единственность.

Перейдем к вопросу о существовании минимума функционала  $D_\sigma$ . Предварительно переформулируем вариационную задачу для  $D_\sigma$  на множестве  $T$  в эквивалентную задачу минимизации  $D_\sigma$  на линейном множестве  $T_0$ . Пусть тензор  $\tau \in T$  (предполагается, что множество  $T$  не пусто). Тогда для лю-

бого тензора  $\sigma \in T$  найдется тензор  $\tau_0 \in T_0$ , такой, что  $\sigma = \tau + \tau_0$ . Функционал  $D_\sigma$  можно задать теперь варьируемым на множестве  $T_0$ :

$$D_\sigma = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d_{ijkm} \tau_0^{ij} \tau_0^{km} d\Omega + \int_{\Omega} d_{ijkm} \tau^{ij} \tau_0^{km} d\Omega + \\ + \int_{\Omega} \tau_0^{ij} u_i^* d\Omega - \int_{\Gamma_u} \tau_0^{ij} n_j u_i^+ d\Gamma + C_\tau$$

где  $C_\tau$  — скаляр, зависящий только от фиксированного тензора  $\tau$ .  
На линеале  $T_0$  введем билинейную тензорную форму

$$b(\tau_0, \sigma_0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d_{ijkm} \tau_0^{ij} \sigma_0^{km} d\Omega$$

удовлетворяющую в силу (2.4) всем аксиомам скалярного произведения. Пополняя  $T_0$  во введенной метрике, получаем гильбертово пространство  $H_\sigma$ . Пространство  $H_\sigma$  будем называть кастильяновым энергетическим пространством в отличие от лагранжева энергетического пространства  $H_u$ , на котором минимизируется лагранжиан  $L_u$ . В силу (2.4) кастильянова энергетическая метрика эквивалентна метрике  $L_2(\Omega)$ :

$$\|\sigma_0\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \sigma_0^{ij} \sigma_{ij} d\Omega$$

так как

$$\sqrt{m_d/2} \|\sigma_0\|_{L_2(\Omega)} \leq \|\sigma_0\|_{H_\sigma} \leq \sqrt{M_d/2} \|\sigma_0\|_{L_2(\Omega)} \quad (2.8)$$

Линейная часть  $l(\tau_0)$  функционала  $D_\sigma$  определена на множестве статически полудопустимых вариаций тензоров напряжений  $T_0$  и ограничена в  $H_\sigma$ . Действительно

$$|l(\tau_0)| \leq \left| \int_{\Omega} d_{ijkm} \tau^{ij} \tau_0^{km} d\Omega \right| + \left| \int_{\Omega} \tau_0^{ij} u_i^* d\Omega - \int_{\Gamma_u} \tau_0^{ij} n_j u_i^+ d\Gamma \right| \leq \\ \leq 2\|\tau\|_{H_\sigma} \|\tau_0\|_{H_\sigma} + \|\varepsilon^*\|_{L_2} \|\tau_0\|_{L_2} \leq (2\|\tau\|_{H_\sigma} + \sqrt{2M_c} \|\varepsilon^*\|_{L_2}) \|\tau_0\|_{H_\sigma}$$

При выводе этого неравенства использовано неравенство Коши — Буныковского и соотношения (2.4) и (2.8).

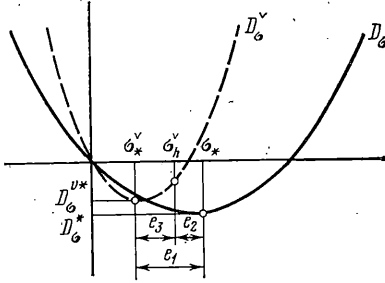
По теореме Хана — Банаха [4] линейный ограниченный функционал  $l(\tau_0)$ , заданный на линеале  $T_0$  гильбертова пространства  $H_\sigma$ , можно по непрерывности распространить на все пространство  $H_\sigma$  с сохранением нормы функционала. Расширенный указанным образом функционал  $D_\sigma$  достигает своей нижней грани на  $H_\sigma$  [5].

Из изложенного выше следует, что достижение минимума функционала  $D_\sigma$  на  $H_\sigma$  гарантируется, в то же время «точка минимума» не обязана принадлежать множеству  $T$ . Следовательно, сильное напряженное состояние может и не существовать. Условием существования сильного напряжения является включение  $\sigma_* = C\varepsilon^* \in T$ .

3. При минимизации функционала  $D_\sigma$  по методу Ритца выбирается некоторая последовательность конечно-мерных подпространств  $T_{0h} \subset H_\sigma$  и некоторая последовательность элементов  $\tau_h \in T$ , зависящих от параметра  $h$ . Для обеспечения сходимости метода Ритца (при устремлении параметра  $h$  к нулю) требуется, чтобы любой элемент  $\sigma \in H_\sigma$  можно было сколь угодно точно аппроксимировать элементом вида  $\tau_h + \tau_{0h}$  при надлежащем выборе параметра  $h$  и элемента  $\tau_{0h} \in T_{0h}$ . Так как  $T_0$  плотно в  $H_\sigma$ , то подпространства  $T_{0h}$  можно выбрать из линеала  $T_0$ .

В силу конечно-мерности  $T_{0h}$  функционал  $D_\sigma$  достигает на нем своей нижней грани и задача минимизации  $D_\sigma$  на  $T_{0h}$  имеет (и при том единственное) решение.

Вместе с функционалом  $D_\sigma = D_\sigma(\sigma; \mathbf{u}^*)$  рассмотрим возмущенный функционал  $D_\sigma^\sim = D_\sigma(\sigma; \mathbf{u}^\sim)$ , где  $\mathbf{u}^\sim$  — искаженный вектор перемещений, в некотором смысле близкий к истинному вектору перемещений  $\mathbf{u}^*$ . В частности, в качестве  $\mathbf{u}^\sim$  можно взять вектор  $\mathbf{u}^h$ , минимизирующий лагранжиан  $L_u$  на конечно-мерном подпространстве  $U^{0h} \subset H_u$  ( $\mathbf{u}^h = \mathbf{v}^h + \mathbf{v}^{0h}$ ,  $\mathbf{v}^h \in U$ ,  $\mathbf{v}^{0h} \in U^{0h}$ ).



Фиг. 1

Пусть  $\sigma_*^\sim$  — точка минимума  $D_\sigma^\sim$  на  $H_\sigma$ , а  $\sigma_h^\sim$  — точка минимума  $D_\sigma^\sim$  на  $T_h$ . Заметим, что  $\sigma_*^\sim = C\varepsilon^h$ , ( $\varepsilon^h = \text{Def } \mathbf{u}^h$ ). Имеет смысл ставить и решать задачу минимизации  $D_\sigma^\sim$  на  $T_h$  ( $T_h = \tau_h + T_{0h}$ ), если приближенное решение для искаженного функционала «точнее» его точного

решения в смысле близости их к точному решению функционала  $D_\sigma$ , т. е.  $e_2 = \|\sigma_h^\sim - \sigma_*\| < \|C\varepsilon^h - \sigma_*\| = e_1$  в некоторой общей норме. Погрешность  $e_1$  зависит исключительно от выбора множества  $U^h$  ( $U^h = U^h + U^{0h}$ ), погрешность  $e_2$  от  $U^h$  и  $T_h$ .

Пусть  $U^h$  выбрано таким образом, что имеет место оценка порядка приближения  $e_1 = O(h^p)$ ,  $p > 0$ . Будем называть множество  $T_h$  согласованным с  $U^h$  по порядку  $\alpha$ , если  $e_2 = O(h^{p+\alpha})$ ,  $\alpha > 0$ .

Качественно картина взаимоотношения согласованных множеств  $U^h$  и  $T_h$  показана на фиг. 1, где ось абсцисс имитирует кастильяново энергетическое пространство  $H_\sigma$ , а по оси ординат отложены значения функционала  $D_\sigma$  (сплошная линия) и возмущенного функционала  $D_\sigma^\sim$  (штриховая линия).

Если ошибка  $e_1$  имеет порядок  $h^p$ , то для того, чтобы ошибка  $e_2$  имела более высокий порядок малости, требуется, чтобы ошибка  $e_3 = \|\sigma_*^\sim - \sigma_h^\sim\|$  была бы в точности того же порядка  $h^p$ . Таким образом, для получения согласованности приближенное решение искаженного функционала не должно быть ни слишком «хорошим», ни слишком «грубым».

Вопрос об условиях существования согласованных аппроксимаций и об оценке возникающих при этом погрешностей является предметом специальных математических исследований. Однако сам факт существования согласованных аппроксимаций подтверждается численным экспериментом.

4. В качестве примера рассмотрим задачу Ламе о распределении напряжений в круговом кольце наружного радиуса  $b$  и внутреннего  $a$  под действием внутреннего давления  $p$ . Пусть  $u$  — радиальное перемещение,  $\sigma^r$ ,  $\sigma^\varphi$  — радиальное и тангенциальное напряжение,  $E$ ,  $\nu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала кольца. Положим  $t = a/b$ ,  $x = r/b$ , где  $r$  — радиальная координата рассматриваемой точки кольца.

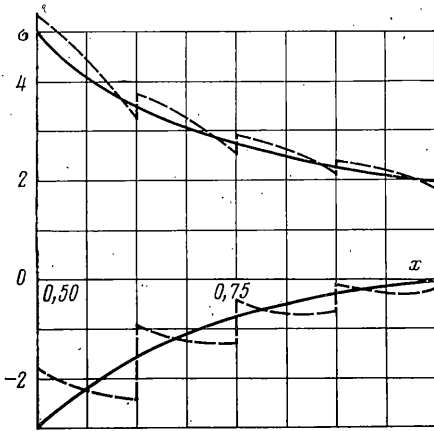
В принятых обозначениях точное решение задачи Ламе дается формулами [6]:

$$u^* = \frac{pbt^2}{E(1-t^2)} \left[ (1-\nu)x + \frac{1+\nu}{x} \right] \quad (4.1)$$

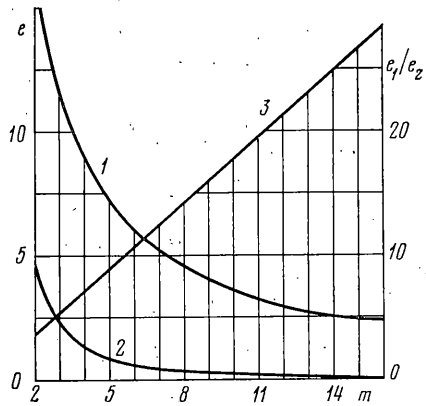
$$\sigma_*^r = \frac{pt^2}{1-t^2} \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right), \quad \sigma_*^\varphi = \frac{pt^2}{1-t^2} \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)$$

Функционалы  $L_u$  и  $D_\sigma$  для задачи Ламе записываются (с точностью до множителя  $2\pi$ ) в виде

$$L_u = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_1^t \left( \frac{u^2}{x} + 2\nu uu' + u'x \right) dx - pbtu(t)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

$$D_\sigma = \frac{b^2}{2E} \int_t^1 (\sigma^r \sigma^r - 2\nu \sigma^r \sigma^p + \sigma^p \sigma^p) x dx - b \int_t^1 (\sigma^p - \sigma^r - x \sigma^r)' u^* dx$$

Здесь и далее штрихами отмечается операция дифференцирования по координате  $x$ . Разобьем интервал интегрирования  $[t, 1]$  на  $m$  равных частей и для минимизации рассматриваемых функционалов используем процедуру метода конечных элементов с кусочно-линейной аппроксимацией искомых функций  $u(x)$ ,  $\sigma^r(x)$ ,  $\sigma^p(x)$ , образуя тем самым множества  $U^h$  и  $T_h$ , где  $h = (1-t)b/m$ .

Не останавливаясь на деталях расчета, приведем результаты вычислений для значений параметров  $t=0,5$  и  $m=4$ . На фиг. 2 показаны графики напряжений  $\sigma^p$  (верхние кривые) и  $\sigma^r$  (нижние кривые), умноженные на коэффициент  $(1-t^2)/(pt^2)$ . Сплошной линией даны точные напряжения  $\sigma_*^p$  и  $\sigma_*^r$ , штриховой линией — напряжения  $\sigma_h^p$  и  $\sigma_h^r$ , вычисленные по формулам

$$\sigma_h^r = \frac{E}{(1-\nu^2)b} \left( u^{h'} + \nu \frac{u^h}{x} \right), \quad \sigma_h^p = \frac{E}{(1-\nu^2)b} \left( \frac{u^h}{x} + \nu u^{h'} \right)$$

где  $u^h(x)$  — функция перемещений, полученная минимизацией лагранжиана на множестве  $U^h$ .

Линии напряжений  $\sigma_h^p$  и  $\sigma_h^r$ , вычисленные минимизацией возмущенного функционала  $D_{\sigma^*}$ , практически сливаются с линиями точных напряжений  $\sigma_*^p$  и  $\sigma_*^r$ .

Оценим скорость сходимости метода конечных элементов по напряжениям при  $h \rightarrow 0$ . На фиг. 3 показана (в процентах) зависимость относительной погрешности вычисленных напряжений ( $t=0,5$ ) в кастильяновой энергетической метрике от количества  $m$  используемых конечных элементов (кривая 1 соответствует  $e_1$ , а кривая 2 —  $e_2$ ). При этом

$$e_1 = \frac{\|\sigma_* - \sigma_h\|_{H_\sigma}}{\|\sigma_*\|_{H_\sigma}} 100; \quad e_2 = \frac{\|\sigma_* - \sigma_h^\sim\|_{H_\sigma}}{\|\sigma_*\|_{H_\sigma}} 100$$

Отношение погрешностей  $e_1/e_2$  (фиг. 3, кривая 3) изменяется как линейная функция  $m$ , откуда следует, что введенные конечно-мерные множества  $U^h$  и  $T_h$  согласованы по порядку  $\alpha=1$ . Из теории метода конечных элементов [7] известно, что  $e_1 = O(h)$ , следовательно,  $e_2 = O(h^2)$ , что совпадает со скоростью сходимости перемещений  $u^h$  к  $u^*$  в среднем.

Установим связь функционала  $D_\sigma$  с функционалом Рейсснера  $R_{\sigma, u}$ , имеющего (с точностью до знака) вид [8]:

$$R_{\sigma, u} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{km} d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{,j}{}^{ij} u_i d\Omega - \int_{\Gamma_u} \sigma^{ij} n_j u_i^+ d\Gamma - \\ - \int_{\Gamma_p} (\sigma^{ij} n_j - p^i) u_i d\Gamma + \int_{\Omega} F^i u_i d\Omega$$

Если в этом выражении зафиксировать  $u$ , положив  $u = u^*$ , и принять  $\sigma \in T$ , то интеграл по границе  $\Gamma_p$  исчезает, а последний из интегралов по области  $\Omega$  оказывается не зависящим от оставшихся варьируемых функций. Оставшаяся часть представляет собой не что иное, как функционал  $D_\sigma$ .

В этой связи методу двух функционалов можно приписать следующую интерпретацию. Приближенное решение задачи (1.1)–(1.4) находится в два этапа. Сначала минимизацией лагранжиана отыскивается решение для перемещения  $u^h$ . Затем этот вектор перемещений подставляется в функционал Рейсснера, стационарная точка которого  $\sigma_h^*$  отыскивается на множестве тензорных функций, принадлежащих статически полудопустимому полю напряжений. При этом условия стационарности функционала Рейсснера переходят в условия его минимума.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Розин Л. А. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ. Метод конечных элементов. Л.: Энергия, 1971. 213 с.
2. Победря Б. Е. Некоторые общие теоремы механики деформируемого твердого тела. — ПММ, 1979, т. 43, вып. 3, с. 531–541.
3. Розин Л. А. Вариационные постановки задач для упругих систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 223 с.
4. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 519 с.
5. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. М.: Гостехиздат, 1952. 216 с.
6. Тимошенко С. П. Курс сопротивления материалов. М.-Л.: Гостехиздат, 1932. 587 с.
7. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349 с.
8. Рейсснер Э. О некоторых вариационных теоремах теории упругости. — В кн.: Проблемы механики сплошной среды. М.: Изд-во АН СССР, 1961. с. 328–337.

Ленинград

Поступила в редакцию  
14.I.1980