**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1982**

УДК 531.8

# ОДНОЧАСТОТНЫЕ ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ «ПРОСТОГО» АВТОМОБИЛЯ ПРИ НАЛИЧИИ РЕЗОНАНСА В ДВИГАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

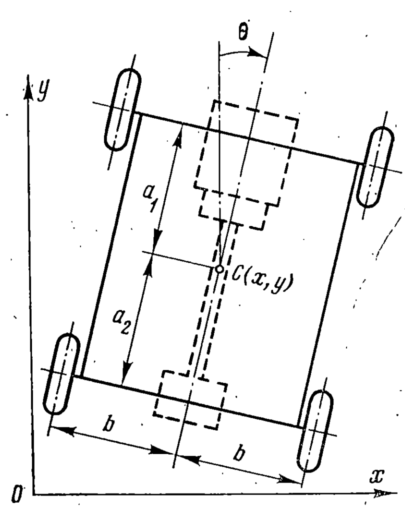
АРНАУДОВ К. С., БЫЧВАРОВ С. Н.

В соответствии с [1, 2] и другими исследованиями рассматривается движение по горизонтальной плоскости двухосного автомобиля без подвески и с закрепленным рулевым управлением. Предполагается, что передняя и задняя оси остаются параллельными, колеса являются твердыми дисками, для которых учитывается увод согласно теории Рокара [2]. Существование увода позволяет автомобилю менять направление движения.

На шасси поставлен двигатель внутреннего сгорания, который посредством трансмиссии без карданного механизма передает движение двигательным колесам. Принимается, что двигатель обладает ограниченной мощностью [3], и учитываются его связи с трансмиссией и сопротивлением при движении. Методом Крылова – Боголюбова [4] изучаются вынужденные колебания автомобиля при наличии резонанса в двигательной системе.

1. Положение построенной таким образом модели автомобиля («простой» автомобиль) в пространстве определяется параметрами: $x$, $y$ — координаты центра масс автомобиля, $\Theta$ — угол отклонения оси автомобиля от оси ординат $y$, $\varphi_1$ — угол поворота ротора двигателя (фигура).

Согласно [5], дифференциальные уравнения движения автомобиля будут иметь вид




$$\begin{gathered}
m_1\ddot{x}+I_6\ddot{\Theta}+b_1\Theta=-(b_1\dot{x}+b_2\dot{\Theta})/\dot{y}\\
I_6\ddot{x}+I_5\ddot{\Theta}-b_3\Theta=-(b_3\dot{x}+b_4\dot{\Theta})/\dot{y}\\
m_2\ddot{y}+c_0iy-c_0i\varphi_1=-P_0-P_2\dot{y}-P_2\dot{y}^2\\
I_3\ddot{\varphi}_1+c_0\varphi_1-c_0iy=H_0-H_1\dot{\varphi}_1-H_2\dot{\varphi}_1^2+\\
+\sum_{k=1}^{3}(D_k\sin k\check{\mu}\varphi_1+E_k\cos k\check{\mu}\varphi_1)+\\
+m^*R^2\sum_{i=1}^{3}[(i\dot{\varphi}_1^2s_i\sin i\varphi_1)/2-\\
-\ddot{\varphi}_1s_i\cos i\varphi_1]
\end{gathered}\tag{1.1}$$

$$m_1=m_0+4(m+I_1/r^2),\quad m_2=m_0+4[m+(I_1+I_4)/r^2]$$

$$I_5=2(m+I_1/r^2)(a_1^2+a_2^2+2b^2)+4I_2+I_0\quad (i=i_0i_k/r)$$

$$I_6=2(m+I_1/r^2)(a_1-a_2),\quad b_1=2(k_1^*+k_2^*)$$

$$b_2=-b_3=2(k_2^*a_2-k_1^*a_1),\quad b_4=2(k_1^*a_1^2+k_2^*a_2^2)$$

Здесь $m_0$, $I_0$ – масса и момент инерции относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс автомобиля без колес, $I_1$, $I_2$ – моменты инерции любого колеса по отношению к его собственной оси и оси, совпадающей с его произвольным диаметром, $I_3$ – приведенный момент инерции двигателя, маховика и коробки передач относительно оси коленчатого вала, $m^*$ – масса возвратно-поступательно движущихся частей для одного цилиндра, $s$ – число цилиндров, $R$ – радиус колена коленчатого вала, $I_4$ — приведенный момент инерции дифференциала и главной передачи по отношению к оси приводящих в движение колес, $i_0$, $i_k$ – передаточные отношения главной передачи и коробка передач, $c_0$ – коэффициент упругости передающего вала, $k_1^*$, $k_2^*$ – коэффициенты сопротивления при уводе для передней и задней осей, $a_1$, $a_2$ и $b$ – размеры автомобиля, $m$, $r$ – масса и радиус колеса.

Предполагается, что двигательный момент изменяется по закону

$$M_g=H_0-H_1\dot{\varphi}_1-H_2\dot{\varphi}_1^2+\sum_{k=1}^{3}(D_k\sin k\mu^{\vee}\varphi_1+E_k\cos k\mu^{\vee}\varphi_1) \tag{1.2}$$

а сила сопротивления определяется выражением

$$R_c=P_0+P_1\dot{y}+P_2\dot{y}^2 \tag{1.3}$$

где $H_0$, $H_1$, $H_2$, $D_k$, $E_k$, $P_0$, $P_1$, $P_2$ — заданные константы, $\mu^{\vee}$ — число, которое для четырехтактных двигателей равно $s/2$, а для двухтактных — $s$.

Последние два уравнения в (1.1) описывают движение автомобиля вдоль оси и вращение ротора двигателя. Они не связаны с первыми двумя и могут решаться самостоятельно. Эти уравнения описывают движение двигательной системы автомобиля. Если к правым частям этих уравнений прибавить и вычесть стационарный момент

$$M_m=H_0-H_1\dot{\varphi}_{10}-H_2\dot{\varphi}_{10}^2=(P_0+P_1v_0+P_2v_0^2)/i \tag{1.4}$$

определенный из условий, что трансмиссия абсолютно жесткая и нет возмущений от двигателя, то получим

$$\ddot{y}+c_1y+c_2\varphi=\varepsilon[b_1^{\vee}(v_0-\dot{y})+b_2^{\vee}(v_0^2-\dot{y}^2)] \tag{1.5}$$

$$\ddot{\varphi}+c_3\varphi-c_4y=\varepsilon\Big\{h_1^{\vee}(\dot{\varphi}_{10}-\dot{\varphi}_1)+h_2^{\vee}(\dot{\varphi}_{10}^2-\dot{\varphi}_1^2)+h_3^{\vee}\sum_{k=1}^{3}\times$$

$$\times[D_k\sin k\mu^{\vee}\varphi_1+E_k\cos k\mu^{\vee}\varphi_1]+h_4^{\vee}\sum_{i=1}^{3}[(\dot{\varphi}_{10}^2-\dot{\varphi}_1^2)\times$$

$$\times s_i i\sin i\varphi_1-\ddot{\varphi}_1 s_i\cos i\varphi_1]\Big\}$$

$$c_1=\frac{c_0i^2}{m_2},\quad c_2=\frac{1}{m_2},\quad c_3=\frac{c_0}{I_3},\quad c_4=\frac{c_0i^2}{I_3},\quad b_1^{\vee}=\frac{P_1I_3}{m^*m_2R^2}$$

$$b_2^{\vee}=\frac{P_2I_3}{m^*m_2R^2},\quad \varepsilon=\frac{m^*R^2}{I_3}\quad h_1^{\vee}=\frac{c_0iH_1}{m^*R^2},\quad h_2^{\vee}=\frac{c_0iH_2}{m^*R^2}$$

$$h_3^{\vee}=\frac{c_0i}{m^*R^2},\quad h_4^{\vee}=\frac{c_0i}{2},\quad \varphi=c_0i\varphi_1-M_m$$

Здесь $\varepsilon<1$ — малый положительный параметр, а $v_0=\dot{\varphi}_{10}/i$ — средняя скорость движения, определяемая из (1.4).

Порождающая система (1.5) имеет собственные частоты

$$k_1=0,\qquad k_2=k=[c_0(m_2+i^2I_3)/m_2I_3]^{1/2} \tag{1.6}$$

и решение

$$y=\varphi_1^{(1)}v_0t+\varphi_1^{(2)}a_0\cos(kt+\alpha_0),\quad \varphi=\varphi_2^{(1)}v_0t+\varphi_2^{(2)}a_0\cos(kt+\alpha_0) \tag{1.7}$$

$$\varphi_1^{(1)}=1,\quad \varphi_1^{(2)}=1,\quad \varphi_2^{(1)}=c_0i^2,\quad \varphi_2^{(2)}=-c_0m_2/I_3$$

Величины $a_0$ и $\alpha_0$ являются константами, зависящими от начальных условий движения.

2. Предполагается, что существует резонанс вида $k\approx\mu/(1-\nu_1)$, где $\nu_1$ — одно из чисел: $-5$, $-4$, $-3$, $-2$, $-1$, $0$, а $\mu=k\mu^{\vee}/c_0i$.

Согласно методу Крылова — Боголюбова [4] находятся асимптотические решения системы (1.5)

$$y=\varphi_1^{(1)}v_0t+\varphi_1^{(2)}a\cos\psi+\varepsilon u_1^{(1)}(a,\varkappa,\mu t)+\varepsilon^2u_2^{(1)}(a,\varkappa,\mu t)+\ldots$$
$$\varphi=\varphi_2^{(1)}v_0t+\varphi_2^{(2)}a\cos\psi+\varepsilon u_1^{(2)}(a,\varkappa,\mu t)+\varepsilon^2u_2^{(2)}(a,\varkappa,\mu t)+\ldots \tag{2.1}$$

Функции $u_s^{(1)}(a,\varkappa,\mu t),u_s^{(2)}(a,\varkappa,\mu t),\ldots$ $(s=1,\ 2)$ представляют собой периодические функции двух переменных $\varkappa$ и $\mu t$ с периодом $2\pi$, а $a$ и $\varkappa$ — некоторые функции времени, которые определяются из решения дифференциальных уравнений

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon A_1(a,\varkappa)+\varepsilon^2A_2(a,\varkappa)+\ldots,\quad \varkappa=\psi-\frac{\mu t}{1-\nu_1} \tag{2.2}$$
$$\frac{d\varkappa}{dt}=k-\frac{\mu}{1-\nu_1}+\varepsilon B_1(a,\varkappa)+\varepsilon^2B_2(a,\varkappa)+\ldots$$

где $A_s(a,\varkappa)$, $B_s(a,\varkappa)$ — периодические функции угловой координаты с периодом $2\pi$.

Дифференцируя (2.1) по времени два раза с учетом (2.2), из (1.5) после сравнения коэффициентов перед $\varepsilon$ получим систему дифференциальных уравнений

$$\left(k-\frac{\mu}{1-\nu_1}\right)^2\frac{\partial^2u_1^{(1)}}{\partial\varkappa^2}+2\left(k-\frac{\mu}{1-\nu_1}\right)\frac{\partial^2u_1^{(1)}}{\partial\varkappa\partial t}+\frac{\partial^2u_1^{(1)}}{\partial t^2}+$$
$$+c_1u_1^{(1)}-c_2u_1^{(2)}=f_0^{(1)}(a,\psi,\mu t)+\left[2A_1\varphi_1^{(2)}k+\varphi_1^{(2)}a\left(k-\frac{\mu}{1-\nu_1}\right)\frac{\partial B_1}{\partial\varkappa}\right]\times$$
$$\times\sin\psi+\left[2B_1\varphi_1^{(2)}ak-\varphi_1^{(2)}\left(k-\frac{\mu}{1-\nu_1}\right)\frac{\partial A_1}{\partial\varkappa}\right]\cos\psi \tag{2.3}$$

$$\left(k-\frac{\mu}{1-\nu_1}\right)^2\frac{\partial^2u_1^{(2)}}{\partial\varkappa^2}+2\left(k-\frac{\mu}{1-\nu_1}\right)\frac{\partial^2u_1^{(2)}}{\partial\varkappa\partial t}+\frac{\partial^2u_1^{(2)}}{\partial t^2}+c_3u_1^{(2)}-c_4u_1^{(1)}=$$
$$=f_0^{(2)}(a,\psi,\mu t)+\left[2A_1\varphi_2^{(2)}k+\varphi_2^{(2)}a\left(k-\frac{\mu}{1-\nu_1}\right)\frac{\partial B_1}{\partial\varkappa}\right]\sin\psi+$$
$$+\left[2B_1\varphi_2^{(2)}ak-\varphi_2^{(2)}\left(k-\frac{\mu}{1-\nu_1}\right)\frac{\partial A_1}{\partial\varkappa}\right]\cos\psi$$

Приравнивая коэффициенты перед $\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ldots$, найдем аналогичные системы и для $u_2^{(s)},u_3^{(s)}(a,\varkappa,\mu t),\ldots$ Функции $f_0^{(s)}(a,\psi,\mu t)$ после подстановки собственного решения в правые части (1.5) принимают вид

$$f_0^{(0)}=-b_1^{\circ}a\sin\psi,\quad f_0^{(2)}=-b_2^{\circ}ak\sin\psi+[d_{\nu_1}\sin(1-\nu_1)\varkappa+g_{\nu_1}\cos(1-\nu_1)\varkappa]\times$$
$$\times\sin\psi+[d_{\nu_1}\cos(1-\nu_1)\varkappa-g_{\nu_1}\sin(1-\nu_1)\varkappa]\cos\psi+$$
$$+\sum_{\nu=-5}^{\nu=5}[d_\nu\cos(\mu t+\nu\psi)+g_\nu\sin(\mu t+\nu\psi)]\quad(\nu\neq\nu_1) \tag{2.4}$$

$$b_1^{\circ}=I_3(P_1+2v_0P_2)/(m^*m_2R^2),\quad b_2^{\circ}=c_0m_2(H_1+2v_0iH_2)/(m^*I_3R^2)$$
$$d_0=\left(\frac{c_0i}{m^*R^2}\sin\alpha+\frac{\delta}{c_0i}\sin\beta\right)J_0(\lambda)-ak^2\varphi_2^{(2)}\sin\beta J_1(\lambda)$$

$$d_{\pm 1}=\frac{k\varphi_2^{(2)}}{2c_0 i}a\cos\beta[(4\varphi_2^{(1)}v_0\pm kc_0 i)J_0(\lambda)\pm(kc_0 i\mp 4\varphi_2^{(1)}v_0)J_2(\lambda)]\pm$$

$$\pm\left[\frac{c_0 i}{m^*R^2}\cos\alpha-\frac{\delta}{c_0 i}\cos\beta\right]J_2(\lambda)$$

$$d_{\pm 2}=-\left(\frac{c_0 i}{m^*R^2}\sin\alpha+\frac{\delta}{c_0 i}\sin\beta\right)J_2(\lambda)\pm$$

$$\pm\frac{k\varphi_2^{(2)}a}{2c_0 i}\sin\beta[(kc_0 i\mp 4\varphi_2^{(1)}i)J_1(\lambda)+(4\varphi_2^{(1)}v_0\pm kc_0 i)J_3(\lambda)]$$

$$d_{\pm 3}=\frac{k\varphi_2^{(2)}a}{2c_0 i}\cos\beta[(4\varphi_2^{(1)}v_0\pm kc_0 i)J_1(\lambda)\pm(kc_0 i\mp 4\varphi_2^{(1)}v_0)J_3(\lambda)]\pm$$

$$\pm\left(\frac{c_0 i}{m^*R^2}\cos\alpha-\frac{\delta}{c_0 i}\cos\beta\right)J_2(\lambda)$$

$$d_{\pm 4}=\frac{k\varphi_2^{(2)}a}{2c_0 i}\sin\beta(kc_0 i\mp 4\varphi_2^{(1)}v_0)J_3(\lambda)+\left(\frac{c_0 i}{m^*R^2}\sin\alpha+\frac{\delta}{c_0 i}\sin\beta\right)J_4(\lambda)$$

$$d_{\pm 5}=\frac{k\varphi_2^{(2)}a}{2c_0 i}\cos\beta(kc_0 i\pm 4\varphi_2^{(1)}v_0)J_4(\lambda);$$

$$g_0=\left(\frac{c_0 i}{m^*R^2}\cos\alpha+\frac{\delta}{c_0 i}\cos\beta\right)J_0(\lambda)-ak^2\varphi_2^{(2)}\cos\beta J_1(\lambda)$$

$$g_{\pm 1}=\pm\frac{k\varphi_2^{(2)}a}{2c_0 i}\sin\beta[(4\varphi_2^{(1)}v_0\mp kc_0 i)J_2(\lambda)-(kc_0 i\pm 4\varphi_2^{(1)}v_0)J_0(\lambda)]\mp$$

$$\mp\left[\frac{c_0 i}{m^*R^2}\sin\alpha-\frac{\delta}{c_0 i}\sin\beta\right]J_1(\lambda)$$

$$g_{\pm 2}=\pm\left(\frac{c_0 i}{m^*R^2}\cos\alpha+\frac{\delta}{c_0 i}\cos\beta\right)J_2(\lambda)+$$

$$+\frac{k\varphi_2^{(2)}a}{2c_0 i}\cos\beta[(4\varphi_2^{(1)}v_0\pm kc_0 i)J_1(\lambda)\pm(kc_0 i\pm 4\varphi_2^{(1)}v_0)J_3(\lambda)]$$

$$g_{\pm 3}=\pm\frac{k\varphi_2^{(2)}a}{2c_0 i}\sin\beta[(kc_0 i\pm 4\varphi_2^{(1)}v_0)J_1(\lambda)-(kc_0 i\pm 4\varphi_2^{(1)}v_0)J_2(\lambda)]+$$

$$+\left(\frac{c_0 i}{m^*R^2}\sin\alpha+\frac{\delta}{c_0 i}\sin\beta\right)J_3(\lambda)$$

$$g_{\pm 4}=\mp\frac{k\varphi_2^{(2)}a}{2c_0 i}\cos\beta(kc_0 i\mp 4\varphi_2^{(1)}v_0)J_3(\lambda)+\left(\frac{c_0 i}{m^*R^2}\cos\alpha+\frac{\delta}{c_0 i}\cos\beta\right)J_4(\lambda)$$

$$g_{\pm 5}=\frac{k\varphi_2^{(2)}a}{2c_0 i}\sin\beta(kc_0 i\pm 4\varphi_2^{(1)}v_0)J_4(\lambda)$$

$$\alpha=\arcsin\left[D_1\cos\left(\frac{M_m}{2c_0 i}\right)-E_1\sin\left(\frac{M_m}{2c_0 i}\right)\right],$$

$$\beta=\frac{2M_m}{c_0 i}, \quad \delta=2(\varphi_2^{(1)} v_0)^2, \quad \lambda=\frac{2\varphi_2^{(2)} a}{c_0 i}$$

где $J_i(\lambda)$ $(i=1, 2, 3, 4)$ — функции Бесселя 1-го рода.

Для функции $u_1^{(s)}$ $(a, \psi, \mu t)$ $(s=1, 2)$ решение ищется в виде

$$u_1^{(s)}=b_1^{(s)}\sin\psi+b_2^{(s)}\cos\psi+\sum_{\nu=-5}^{\nu=5}\left[d_\nu^{(s)}\cos(\mu t+\nu\psi)+g_\nu^{(s)}\sin(\mu t+\nu\psi)\right] \quad (\nu\neq\nu_1) \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в (2.3) и приравнивая коэффициенты при соответствующих гармониках, получим следующие алгебраические системы уравнений:

$$(c_1-k^2)b_1^{(1)}-c_2b_1^{(2)}=-b_1^{\circ}ak+2A_1k\varphi_1^{(2)}+\varphi_1^{(2)}a\left(k-\frac{\mu}{1-\nu_1}\right)\frac{\partial B_1}{\partial\varkappa} \tag{2.6}$$

$$-c_4b_1^{(1)}+(c_3-k^2)b_1^{(2)}=-b_2^{\circ}ak+d_{\nu_1}\sin(1-\nu_1)\varkappa+g_{\nu_1}\cos(1-\nu_1)\varkappa+$$
$$+2A_1\varphi_2^{(2)}k+\varphi_2^{(2)}a\left(k-\frac{\mu}{1-\nu_1}\right)\frac{\partial B_1}{\partial\varkappa}$$

$$(c_1-k^2)b_2^{(1)}-c_2b_2^{(2)}=2B_1\varphi_1^{(2)}ak-\varphi_1^{(2)}\left(k-\frac{\mu}{1-\nu_1}\right)\frac{\partial A_1}{\partial\varkappa}, \tag{2.7}$$

$$-c_4b_2^{(1)}+(c_3-k^2)b_2^{(2)}=d_{\nu_1}\cos(1-\nu_1)\varkappa-g_{\nu_1}\sin(1-\nu_1)\varkappa+$$
$$+2B_1\varphi_2^{(2)}ak-\varphi_2^{(2)}\left(k-\frac{\mu}{1-\nu_1}\right)\frac{\partial A_1}{\partial\varkappa}$$

$$[c_1-(k\nu+\mu)^2]d_\nu^{(1)}-c_2d_\nu^{(2)}=0, \quad -c_4d_\nu^{(1)}+[c_3-(k\nu+\mu)^2]d_\nu^{(2)}=d_\nu \quad (\nu\neq\nu_1) \tag{2.8}$$

$$[c_1-(k\nu+\mu)^2]g_\nu^{(1)}-c_2g_\nu^{(2)}=0, \quad -c_4g_\nu^{(1)}+[c_3-(k\nu+\mu)^2]g_\nu^{(2)}=g_\nu \quad (\nu\neq\nu_1) \tag{2.9}$$

Коэффициенты $A_1$ и $B_1$ определяются из систем (2.6) и (2.7) при соблюдении ограниченности вынужденных колебаний. Так как детерминанты перед коэффициентами в этих системах точно равны характеристическому уравнению, т. е. равны нулю, то величины $b_s^{(i)}$ ищутся в виде

$$b_s^{(i)}=\sum_{i=1}^{2}p_s^{(i)}\varphi_i^{(s)} \quad (i, s=1,2) \tag{2.10}$$

После подстановки (2.10) в (2.6) и (2.7) для коэффициентов $A_1$ и $B_1$ получим выражения

$$\begin{aligned} A_1&=\alpha_1+\alpha_2\sin(1-\nu_1)\varkappa+\alpha_3\cos(1-\nu_1)\varkappa \\ B_1&=\beta_1+\beta_2\sin(1-\nu_1)\varkappa+\beta_3\cos(1-\nu_1)\varkappa \end{aligned} \tag{2.11}$$

Для определения величин $p_s^{(i)}$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\beta_1$, $\beta_2$ и $\beta_3$ первые и вторые уравнения в (2.6), (2.7) умножаются соответственно на $\varphi_2^{(2)}$ и $\varphi_1^{(2)}$, а затем на $\varphi_2^{(1)}$ и $\varphi_1^{(1)}$. Далее уравнения складываются и используются условия ортогональности нормальных функций $\varphi_i^{(s)}$; после приравнивания коэффициентов перед соответствующими гармониками получим необходимые уравнения, из которых находим [6]:

$$\alpha_1 = -\frac{b_1{}^\circ c_0 i + b_2{}^\circ}{2m_2k^2}a = -\frac{\alpha_1{}^\circ a}{m_2k^2}, \quad \alpha_2 = \frac{d_{\nu_1}}{m_2k^2[k(1+\nu_1)+\mu]} \tag{2.12}$$

$$\alpha_3 = \frac{g_{\nu_1}}{m_2k^2[k(1+\nu_1)+\mu]}, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \frac{\alpha_2}{a}, \quad \beta_3 = -\frac{\alpha_3}{a} \tag{2.13}$$

$$p_1^{(1)} = \frac{b_1{}^\circ \varphi_1^{(2)} + b_2{}^\circ \varphi_1^{(2)}}{m_2k}a - \frac{c_0 i^2}{m_2k}[d_{\nu_1}\sin(1-\nu_1)\varkappa + g_{\nu_1}\cos(1-\nu_1)\varkappa],$$

$$p_2^{(1)} = 0, \quad p_2^{(2)} = 0$$

$$p_1^{(2)} = \frac{c_0 i^2}{m_2k^2}[g_{\nu_1}\sin(1-\nu_1)\varkappa - d_{\nu_1}\cos(1-\nu_1)\varkappa]$$

Из систем (2.8) и (2.9) получим

$$d_\nu^{(1)} = \frac{d_\nu}{(k\nu+\mu)^2[(k\nu+\mu)^2-k^2]m_2}, \quad g_\nu^{(1)} = \frac{g_\nu}{(k\nu+\mu)^2[(k\nu+\mu)^2-k^2]m_2} \tag{2.14}$$

$$d_\nu^{(2)} = [c_0 i^2 - m_2(k\nu+\mu)^2]d_\nu^{(1)}, \quad g_\nu^{(2)} = [c_0 i^2 - m_2(k\nu+\mu)^2]g_\nu^{(1)}$$

Таким образом все коэффициенты в (2.5) определены и искомое решение во втором приближении найдено.

Амплитуда и смещение по фазе определяются из системы (2.2) после подстановки в нее (2.11). С точностью до $\varepsilon$ получим

$$da/dt = \alpha_1 + \alpha_2 \sin(1-\nu_1)\varkappa + \alpha_3 \cos(1-\nu_1)\varkappa \tag{2.15}$$

$$\frac{d\varkappa}{dt} = k - \frac{\mu}{1-\nu_1} - \frac{\alpha_3}{a}\sin(1-\nu_1)\varkappa + \frac{\alpha_2}{a}\cos(1-\nu_1)\varkappa$$

В отличие от нерезонансного случая здесь $a$ и $\varkappa$ взаимно связаны. Два уравнения (2.15) образуют нелинейную систему дифференциальных уравнений, из которой определяются законы изменения амплитуды и фазы в зависимости от времени для резонансного случая. Уравнения (2.5) и (2.15) позволяют исследовать как нестационарные, так и стационарные режимы колебательных процессов.

В случае стационарного режима амплитуда и смещение по фазе $\varkappa$ постоянны, т. е. $da/dt=0$ и $d\varkappa/dt=0$. Из (2.15) находим

$$a = \frac{(1-\nu_1)h_{\nu_1}(a)}{\sqrt{[k^2-(k\nu_1+\mu)^2]^2 m_2k^2 + 4\alpha_1{}^{\circ 2}}} \tag{2.16}$$

$$h_{\nu_1}(a) = \frac{\varepsilon}{k}\sqrt{d_{\nu_1}^2(a) + g_{\nu_1}^2(a)}$$

$$\operatorname{tg}\varkappa = \frac{2\varepsilon k\alpha_1{}^\circ(1-\nu_1)d_{\nu_1} - m_2k^2[k^2-(k\nu_1+\mu)^2]g_{\nu_1}}{m_2k^2[k^2-(k\nu_1+\mu)^2]d_{\nu_1} + 2\varepsilon k\alpha_1{}^\circ(1-\nu_1)g_{\nu_1}}$$

Далее может быть построена амплитудно-частотная кривая, характеризующая вынужденные колебания двигательной системы при наличии данного резонанса. Сама резонансная амплитуда для стационарного режима определяется из первого уравнения в (2.16) (численно или графически).

3. Для исследования устойчивости решений системы (2.15) введем новые переменные [7]: $x=a-\check{a}$, $y=\varkappa-\check{\varkappa}$, где $\check{a}$ и $\check{\varkappa}$ — частные решения системы (2.15), соответствующие невозмущенному движению; следовательно, $x$ и $y$ — возмущения.

Таким образом, в случае основного резонанса, т. е. когда $\nu_1=0$, получаем следующие дифференциальные уравнения возмущенного движения:

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha^* x+\delta y+X_1(a^{\vee}, \varkappa^{\vee}, x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = X_2(a^{\vee}, \varkappa^{\vee}, x, y) \tag{3.1}$$

$$\alpha^* = \frac{B_1{}^{\circ} c_0 i^2+b_2{}^{\circ}}{2m_2 k^2}, \qquad \delta_1 = \left(\frac{c_0 i}{m^* R^2}\sin\alpha+\frac{\delta}{c_0 i}\sin\beta\right)\frac{1}{2m_2 k^2}$$

где $X_1(a^{\vee}, \varkappa^{\vee}, x, y)$, $X_2(a^{\vee}, \varkappa^{\vee}, x, y)$ — функции, содержащие члены выше первого порядка.

На основании теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследуем решение линеаризованной системы (3.1)

$$dx/dt=-\alpha^* x+\delta_1 y, \qquad dy/dt=0 \tag{3.2}$$

которое имеет следующий вид:

$$x=\delta_1 y_0(1-e^{-\alpha^* t})/\alpha^*+x_0 e^{-\alpha^* t}, \qquad y=y_0 \tag{3.3}$$

Здесь начальные условия $x_0$ и $y_0$ могут быть выбраны так, чтобы они удовлетворяли условиям $|x_0|\leqslant\eta_1$, $|y_0|\leqslant\eta_2$, где $\eta_1$ и $\eta_2$ — положительные числа, как бы малы они не были.

Если в (3.3) $t\to\infty$, то $|x(t)|<\varepsilon_1$, $|y(t)|<\varepsilon_2$, $\varepsilon_1=\delta_1\eta_2/\alpha^*$, $\varepsilon_2=\eta_2$, откуда следует устойчивость решения системы (2.15). Полученные результаты относятся и к устойчивости решения системы для остальных резонансных случаев.

Выведем условия устойчивости синхронных стационарных колебаний (2.16), которые согласно [4] имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} A_{1a}'(a_0, \varkappa_0)+B_{1\varkappa}'(a_0, \varkappa_0)<0 \\ A_{1a}'(a_0, \varkappa_0)B_{1\varkappa}'(a_0, \varkappa_0)-A_{1\varkappa}'(a_0, \varkappa_0)B_{1a}'(a_0, \varkappa_0)>0 \end{gathered} \tag{3.4}$$

где $A_{1a}'$, $A_{1\varkappa}'$, $B_{1a}'$ и $B_{1\varkappa}'$ — частные производные коэффициентов $A_1$ и $B_1$ относительно $a$ и $\varkappa$.

Подставляя в неравенства (3.4) выражения для $A_1$ и $B_1$, условия устойчивости получим в следующей форме:

$$-(b_1{}^{\circ}c_0 i^2+b_2{}^{\circ})(1+\nu_1)ka_0+\Big[2a_0k^2\varphi_2{}^2 J_0(\lambda_0)-4\delta a_0\varphi_2^{(2)}J_1(\lambda_0)- \tag{3.5}$$

$$-\frac{2\delta}{c_0 i}J_0(\lambda_0)\Big]\cos(\beta-\varkappa_0)-\frac{2}{m^*R^2}\left[2\varphi_2^{(2)}a_0 J_1(\lambda_0)+c_0 i J_0(\lambda_0)\right]\cos(\alpha-\varkappa_0)<0$$

$$\Big\{(b_1{}^{\circ}c_0 i^2+b_2{}^{\circ})(1+\nu_1)ka_0+\frac{4a_0\varphi_2^{(2)}J_1(\lambda_0)}{c_0 i}\Big[\frac{c_0 i}{m^*R^2}\cos(\alpha-\varkappa_0)+$$

$$+\frac{\delta}{c_0 i}\cos(\beta-\varkappa_0)\Big]\Big\}\Big\{\frac{c_0 i}{m^*R^2}J_0(\lambda_0)\cos(\alpha-\varkappa_0)+\Big[\frac{\delta}{c_0 i}J_0(\lambda_0)-$$

$$-a_0k^2\varphi_2^{(2)}J_1(\lambda_0)\Big]\cos(\beta-\varkappa_0)\Big\}-2\Big\{\frac{c_0 i}{m^*R^2}J_0(\lambda_0)\sin(\alpha-\varkappa_0)+$$

$$+\Big[\frac{\delta}{c_0 i}J_0(\lambda_0)-a_0k^2\varphi_2^{(2)}J_1(\lambda_0)\Big]\sin(\beta-\varkappa_0)\Big\}\Big\{\frac{c_0 i}{m^*R^2}\Big[J_0(\lambda_0)+$$

$$+\frac{2J_1(\lambda_0)\varphi_2^{(2)}}{c_0 i}a_0\Big]\sin(\alpha+\varkappa_0)+\Big[\frac{\delta}{c_0 i}J_0(\lambda_0)+$$

$$+\left(\frac{2\delta}{c_0{}^2 i^2}-k^2\right)\varphi_2^{(2)}a_0 J_1(\lambda_0)\Big]\sin(\beta+\varkappa_0)\Big\}>0$$

При наличии основного резонанса, т. е. при $\nu_1=0$, после линеаризации получим условия устойчивости по первому приближению

$$(b_1^\circ c_0 i^2+b_2^\circ) k a_0 + \frac{2\delta}{c_0 i}\cos(\beta-\varkappa_0)+\frac{2c_0 i}{m^*R^2}\cos(\alpha-\varkappa_0)>0 \tag{3.6}$$

$$(b_1^\circ c_0 i^2+b_2^\circ) k a_0\left[\frac{c_0 i}{m^*R^2}\cos(\alpha-\varkappa_0)+\frac{\delta}{c_0 i}\cos(\beta-\varkappa_0)\right]-$$

$$-2\left[\frac{c_0 i}{m^*R^2}\sin(\alpha-\varkappa_0)+\frac{\delta}{c_0 i}\sin(\beta-\varkappa_0)\right]\left[\frac{c_0 i}{m^*R^2}\sin(\alpha+\varkappa_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{\delta}{c_0 i}\sin(\beta+\varkappa_0)\right]>0$$

4. Первые два уравнения из (1.1) описывают движение автомобиля вдоль оси $x$ и его поворот около вертикальной оси. Поскольку координаты $x$ и $\Theta$ характеризуют управляемость автомобилем, то система первых двух уравнений в (1.1) иногда будет называться системой управления.

Чтобы изучить изменение этих координат, отношение $1/y^\cdot$ представим в виде

$$\frac{1}{y^\cdot}=\frac{1}{v_0}+\frac{ak}{v_0^2}\sin\psi-\frac{\varepsilon}{v_0}\left\{b_1^{(1)}k\cos\psi-b_2^{(1)}k\sin\psi+\right. \tag{4.1}$$

$$\left.+\sum_{\nu=-5}^{\nu=5}(\mu+\nu k)\left[g_{\nu_1}^{(1)}\cos(\mu t+\nu\psi)-a_{\nu_1}^{(1)}\sin(\mu t+\nu\psi)\right]\right\} \qquad (\nu\neq\nu_1)$$

Здесь учтено (2.1) и (2.5) с точностью до $\varepsilon$ в разложении геометрического ряда. Подставляя (4.1) в (1.1), получим

$$m_1x^{\cdot\cdot}+I_6\Theta^{\cdot\cdot}+b_1\Theta=\varepsilon F_1(a,\psi,\mu t),\qquad I_6x^{\cdot\cdot}+I_5\Theta^{\cdot\cdot}-b_3\Theta=\varepsilon F_2(a,\psi,\mu t) \tag{4.2}$$

где $F_1(a,\psi,\mu t)$ и $F_2(a,\psi,\mu t)$ — известные функции.

Характеристическое уравнение для (4.2) имеет корни

$$p_1=0,\qquad p_2=p=[(m_1b_3+I_6b_1)/(I_6^2-m_1I_5)]^{1/2} \tag{4.3}$$

где предполагается, что $(m_1b_3+I_6b_1)/(I_6^2-m_1I_5)>0$.

Соответствующее решение определяется выражениями

$$x=a_0^\circ n_1\cos\psi^\circ,\qquad \Theta=a_0^\circ n_2\cos\psi^\circ,\qquad \psi^\circ=pt+\beta_0^\circ \tag{4.4}$$

$$n_1=1,\qquad n_2=(I_6b_1+m_1b_3)/(b_1I_5+b_3I_6) \tag{4.5}$$

Для системы (4.2) решение ищется в виде

$$x_i=a^\circ n_i\cos\psi^\circ+\varepsilon u_1^{\circ(i)}(a^\circ,\psi^\circ,\delta_\nu)+\varepsilon^2u_2^{\circ(i)}(a^\circ,\psi^\circ,\delta_\nu)+\dots \quad (i=1,2) \tag{4.6}$$

где $x_1=x$, $x_2=\Theta$, $\delta_\nu=\mu t+\nu\psi$, и предполагается, что отсутствует резонанс, т. е. $p\neq(\mu+\nu k)/2$. При этом амплитуда $a^\circ$ и фаза $\psi^\circ$ должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} da^\circ/dt&=\varepsilon A_1^\circ(a^\circ)+\varepsilon^2A_2^\circ(a^\circ)+\dots\\ d\psi^\circ/dt&=p+\varepsilon B_1^\circ(a^\circ)+\varepsilon^2B_2^\circ(a^\circ)+\dots\end{aligned} \tag{4.7}$$

Здесь $u_s^{\circ(1)}(a^\circ,\psi^\circ,\delta_\nu)$, $u_s^{\circ(2)}(a^\circ,\psi^\circ,\delta_\nu),\dots A_s^\circ(a^\circ)$, $B^\circ(a^\circ)$ также являются периодическими функциями угловой переменной $\psi^\circ$ и $\delta_\nu$ с периодом $2\pi$.

Дифференцируя (4.6) по времени и учитывая (4.1) и (4.7), из (4.2) получим

$$m_1p^2\frac{\partial^2 u_1^{\circ(1)}}{\partial\psi^{\circ 2}}+2m_1p\frac{\partial^2 u_1^{\circ(1)}}{\partial\psi^\circ\,\partial t}+m_1\frac{\partial^2 u_1^{\circ(1)}}{\partial t^2}+I_6p^2\frac{\partial^2 u_1^{\circ(2)}}{\partial\psi^{\circ 2}}+ \tag{4.8}$$

$$+2I_6p\frac{\partial^2 u_1^{\circ(2)}}{\partial\psi^\circ\,\partial t}+I_6\frac{\partial^2 u_1^{\circ(2)}}{\partial t^2}+b_1u_1^{\circ(2)}=f_0^{\circ(1)}(a^\circ,\psi^\circ,\delta_\nu)+$$

$$+2a^\circ pn_1B_1^\circ\cos\psi^\circ+2pn_1A_1^\circ\sin\psi^\circ$$

$$I_6p^2\frac{\partial^2 u_1^{\circ(1)}}{\partial\psi^{\circ 2}}+2I_6p\frac{\partial^2 u_1^{\circ(1)}}{\partial\psi^\circ\,\partial t}+I_6\frac{\partial^2 u_1^{\circ(1)}}{\partial t^2}+I_5p^2\frac{\partial^2 u_1^{\circ(2)}}{\partial\psi^{\circ 2}}+2I_5p\frac{\partial^2 u_1^{\circ(2)}}{\partial\psi^\circ\,\partial t}+$$

$$+I_5\frac{\partial^2 u_1^{\circ(2)}}{\partial t^2}-b_3u_1^{\circ(2)}=f_0^{\circ(2)}(a^\circ,\psi^\circ,\delta_\nu)+2a^\circ pn_2B_1^\circ\cos\psi^\circ+2pn_2A_1^\circ\sin\psi^\circ$$

$$f_0^{\circ(1)}=\varepsilon a^\circ p\Big\{q_1\sin\psi^\circ+q_2[\cos(\psi-\psi^\circ)-\cos(\psi+\psi^\circ)]+q_3[\sin(\psi+\psi^\circ)-\sin(\psi-\psi^\circ)]+ \tag{4.9}$$

$$+\sum_{\nu=-5}^{\nu=5}E_\nu[\cos(\delta_\nu-\psi^\circ)-\cos(\delta_\nu+\psi^\circ)]+\sum_{\nu=-5}^{\nu=5}D_\nu[\sin(\delta_\nu+\psi^\circ)-\sin(\delta_\nu-\psi^\circ)]\Big\}$$

$$f_0^{\circ(2)}=\varepsilon a^\circ p\Big\{q_1^\circ\sin\psi^\circ+q_2^\circ[\cos(\psi-\psi^\circ)-\cos(\psi+\psi^\circ)]+q_3^\circ[\sin(\psi+\psi^\circ)-\sin(\psi-\psi^\circ)]+$$

$$+\sum_{\nu=-5}^{\nu=5}E_\nu^\circ[\cos(\delta_\nu-\psi^\circ)-\cos(\delta_\nu+\psi^\circ)]+\sum_{\nu=-5}^{\nu=5}D_\nu^\circ[\sin(\delta_\nu+\psi^\circ)-\sin(\delta_\nu-\psi^\circ)]\Big\}\quad(\nu\neq\nu_1)$$

$$q_1=(b_1n_1+b_2n_2)/\varepsilon v_0,\qquad q_2=k(b_1n_1+b_2n_2)(b_2^{(1)}-a/\varepsilon v_0)/2v_0 \tag{4.10}$$

$$q_1^\circ=(b_4n_2-b_3n_1)/\varepsilon v_0,\qquad q_2^\circ=k(b_4n_2-b_3n_1)(b_2^{(1)}-a/\varepsilon v_0)/2v_0$$

$$q_3=-kb_1^{(1)}(b_1n_1+b_2n_2)/2v_0,\qquad q_3^\circ=-kb_1^{(1)}(b_4n_2-b_3n_1)/2v_0$$

$$E_\nu=-(\mu+\nu k)d_\nu(b_1n_1+b_2n_2)/2v_0,\quad D_\nu=(\mu+\nu k)g_\nu(b_1n_1+b_2n_2)/2v_0$$

$$E_\nu^\circ=-(\mu+\nu k)d_\nu(b_4n_2-b_3n_1)/2v_0,\quad D_\nu^\circ=(\mu+\nu k)g_\nu(b_4n_2-b_3n_1)/2v_0$$

Для функции $u_1^{0(s)}(a^\circ,\psi^\circ,\delta_\nu)$ $(s=1,2)$ решения ищутся в виде $(\nu\neq\nu_1)$:

$$u_1^{\circ(s)}=q_1^{(s)}\sin\psi^\circ+q_2^{(s)}\sin(\psi+\psi^\circ)+q_3^{(s)}\sin(\psi+\psi^\circ)+q_4^{(s)}\cos(\psi+\psi^\circ)+$$

$$+q_5^{(s)}\cos(\psi-\psi^\circ)+\sum_{\nu=-5}^{\nu=5}[D_\nu^{(s)}\sin(\delta_\nu+\psi^\circ)+E_\nu^{(s)}\sin(\delta_\nu-\psi^\circ)+$$

$$+E_\nu^{(s)}\cos(\delta_\nu+\psi^\circ)+G_\nu^{(s)}\cos(\delta_\nu-\psi^\circ)] \tag{4.11}$$

Подставляя (4.11) в (4.8) и приравнивая коэффициенты перед соответствующими гармониками, получим следующие алгебраические системы уравнений:

$$-m_1p^2q_1^{(1)}+(b_1-I_6p^2)q_1^{(2)}=a^\circ q_1+2n_1A_1^\circ \tag{4.12}$$

$$-I_6p^2q_1^{(1)}-(b_3+I_5p^2)q_1^{(2)}=a^\circ q_1^\circ+2n_2A_1^\circ$$

$$m_1(p^2+k^2)q_2^{(1)}+[I_6(p^2+k^2)-b_1]q_2^{(2)}=-a^\circ q_3$$

$$I_6(p^2+k^2)q_2^{(1)}+[I_5(p^2+k^2)+b_3]q_2^{(2)}=-a^\circ q_3^\circ$$

$$m_1(p^2+k^2)q_4^{(1)}+[I_6(p^2+k^2)-b_1]q_4^{(2)}=-a^\circ q_2$$

$$I_6(p^2+k^2)q_4^{(1)}+[I_5(p^2+k^2)+b_3]q_4^{(2)}=-a^\circ q_2^\circ$$

$$m_1[p^2+(\mu+\nu k)^2]D_\nu^{(1)}+\{I_6[p^2+(\mu+\nu k)^2]-b_1\}D_\nu^{(2)}=-a^\circ D_\nu$$

$$I_6[p^2+(\mu+\nu k)^2]D_\nu^{(1)}+\{I_5[p^2+(\mu+\nu k)^2]+b_3\}D_\nu^{(2)}=-a^\circ D_\nu^\circ$$

$$m_1[p^2+(\mu+\nu k)^2]F_\nu^{(1)}+\{I_6[p^2+(\mu+\nu k)^2]-b_1\}F_\nu^{(2)}=-a^\circ E_\nu$$

$$I_6[p^2+(\mu+\nu k)^2]F_\nu^{(1)}+\{I_5[p^2+(\mu+\nu k)^2]+b_3\}F_\nu^{(2)}=-a^\circ E_\nu^\circ$$

Для $q_3^{(s)}$ и $q_5^{(s)}$ уравнения имеют вид, аналогичный третьему и четвертому уравнениям системы (4.12), где вместо $q_3$ и $q_3^\circ$ следует подставить $q_2$ и $q_2^\circ$. А для $G_\nu^{(s)}$ и $E_\nu^{(s)}$ система аналогична системе для $D_\nu$ и $D_\nu^\circ$, где следует заменить на $E_\nu$ и $E_\nu^\circ$.

Если умножить первые два уравнения из (4.12) соответственно на $m_1$ и $I_6$, а затем их сложить, то будем иметь

$$A_1^\circ=-\frac{(I_6q_1-m_1q_1^\circ)a^\circ}{2\varepsilon v_0(I_6n_1-m_2n_1)}=-\frac{h^\circ a^\circ}{\varepsilon},\quad h>0 \qquad (4.13)$$

После подстановки (4.13) в (4.7) и имея в виду, что $B_1^\circ=0$, с точностью до $\varepsilon$ получим

$$a^\circ=a_0^\circ e^{-h^\circ t},\quad \psi^\circ=pt+\beta_0^\circ \qquad (4.14)$$

Из остальных систем найдем

$$q_1^{(1)}=a^\circ\{q_3^\circ[I_6(p^2+k^2)-b_1]-q_3[I_5(p^2+k^2)+b_3]\}/\Delta(p^2+k^2)$$

$$q_2^{(2)}=a^\circ(p^2+k^2)(I_6q_3-m_1q_3^\circ)/\Delta(p^2+k^2)$$

$$q_4^{(1)}=a^\circ\{q_2^\circ[I_6(p^2+k^2)-b_1]-q_2[I_5(p^2+k^2)+b_3]\}/\Delta(p^2+k^2)$$

$$q_4^{(2)}=a^\circ(p^2+k^2)(I_6q_2-m_1q_2^\circ)/\Delta(p^2+k^2)$$

$$D_\nu^{(1)}=a^\circ[D_\nu^\circ\{I_6[p^2+(\mu+\nu k)^2-b_1]-D_\nu\{I_5[p^2+(\mu+\nu k)^2+b_3]\}]/$$
$$/\Delta[p^2+(\mu+\nu k)^2]$$

$$D_\nu^{(2)}=a^\circ[p^2+(\mu+\nu k)^2](I_6D_\nu-m_1D_\nu^\circ)/\Delta[p^2+(\mu+\nu k)^2]$$

$$F_\nu^{(1)}=a^\circ[E_\nu^\circ\{I_6[p^2+(\mu+\nu k)^2-b_1]-E_\nu\{I_5[p^2+(\mu+\nu k)^2+b_3]\}]/$$
$$/\Delta[p^2+(\mu+\nu k)^2]$$

$$F_\nu^{(2)}=a^\circ[p^2+(\mu+\nu k)^2](I_6E_\nu-m_1E_\nu^\circ)/\Delta[p^2+(\mu+\nu k)^2]$$

$$q_3^{(s)}=-q_2^{(s)}(k^2-p^2),\qquad q_5^{(s)}=-q_4^{(s)}(k^2-p^2)$$

$$E_\nu^{(s)}=-D_\nu^{(s)}[p^2-(\mu+\nu k)^2],\qquad G_\nu^{(s)}=-F_\nu^{(s)}[p^2-(\mu+\nu k)^2]$$

Коэффициенты $q_1$ и $q_2$ могут быть произвольными, но конечными константами.

Видно, что вследствие (4.14) закон (4.6) для управляемых координат при отсутствии резонанса и $h^\circ>0$ определяет одно затухающее движение.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Неймарк Ю. Я., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
2. *Рокар И.* Неустойчивость в механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 287 с.
3. *Кононенко В. О.* Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука, 1964. 254 с.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний М.: Физматгиз, 1964. 410 с.
5. *Бъчваров С. Н., Арнаудов К. С.* Диференциални уравнения на движението на «прост» автомобил с отчитане на взаимодействието с двигателя.— Год. на ВТУЗ по Приложна механика, т. 13, кн. 3. София, 1978, с. 77–85.
6. *Бъчваров С. Н.* Резонансни надлъжни едночестотни трептения на периодични структори с дисипативни връзки.— Теоретична и приложна механика, София, 1979, кн. 4, с. 9–18.
7. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.

Болгария, София

Поступила в редакцию
14.VII.1980