

УДК 534.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И АВТОКОЛЕБАНИЯХ СООСНЫХ РОТОРОВ

ПОЗНЯК Э. Л.

Конструкции с соосными роторами находят широкое применение в машиностроении (двухроторные электродвигатели, многоступенчатые газотурбинные и турбореактивные двигатели, приводы винтов вертолетов и т. п.). Вопросы определения критических скоростей таких систем рассматривались в [1], задача о вынужденных колебаниях рассматривалась в [2]. Устойчивость системы с двумя изотропными роторами под действием неконсервативных сил типа внутреннего трения исследовалась в [3]. В работе [4] для системы с двумя соосными роторами была поставлена задача об автоколебаниях, в [5] эта задача была решена в предположении, что неконсервативные силы обусловлены вращением только одного ротора.

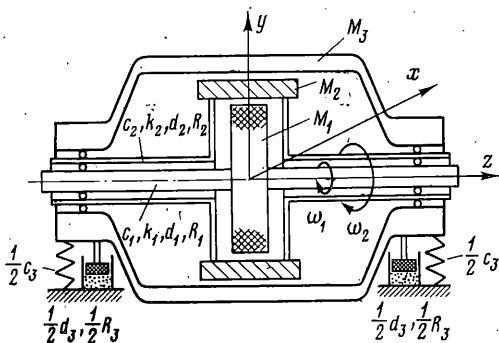
Приведенные без вывода исходные уравнения работы [3] вызывают сомнения, так как содержат периодические коэффициенты при членах с внешним и внутренним трением. Неправдоподобны и окончательные результаты [3], из которых, в частности, следует, что возможна неустойчивость и при отсутствии в системе неконсервативных сил. В связи с этим исследования [6, с. 415], основанные на недостоверных уравнениях [3], можно рассматривать лишь как чисто методические исследования систем уравнений с периодическими коэффициентами.

В публикуемой работе на примере системы из двух соосных роторов, опирающихся на жесткий амортизированный корпус, рассматриваются задачи устойчивости и нахождения стационарных автоколебаний, вызываемых неконсервативными силами типа внутреннего трения в материале вала. Исследуется зависимость области устойчивости от параметров задачи, в частности, от скоростей и направления вращения роторов и демпфирования в опорах корпуса. При помощи метода, близкого по своим идеям к методу Галеркина, решаются задачи определения частот, амплитуд, форм и режимов как для одночастотных, так и многочастотных автоколебаний. Исследуется устойчивость найденных решений и режимов.

1. Системы с соосными роторами отличаются многообразием конструкций и характером действующих неконсервативных сил, однако для всех систем общим является взаимосвязанность отдельных роторов, которая

может осуществляться через упругомассовые конструктивные элементы или через силы трения.

Для получения физически обозримых результатов рассматривается идеализированная изотропная симметричная система, состоящая из двух соосных идеально уравновешенных гибких роторов, опирающихся на соосный с роторами жесткий амортизированный корпус (фиг. 1). Связь между роторами в такой системе осуществляется через корпус. Предполагается, что в



Фиг. 1

системе действуют силы внешнего трения и внутреннего трения в материале роторов, которые являются единственными неконсервативными силами, могущими приводить к автоколебательной неустойчивости. Силы трения предполагаются вязкими и для роторов приведены к центрам дисков. Предполагается также, что наряду с линейным внешним трением в

опорах корпуса и в роторах существует также нелинейное вязкое трение, пропорциональное квадрату полных амплитуд взаимных перемещений.

Дифференциальные уравнения движения элементов системы при поступательных перемещениях запишутся в виде

для ротора 1

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{x} + (k_1 + d_1)(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) + k_1 \omega_1 (y_1 - y_3) + c_1 (x_1 - x_3) + \\ + R_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_3) [(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2] = 0 \\ M_1 \ddot{y} + (k_1 + d_1)(\dot{y}_1 - \dot{y}_3) - k_1 \omega_1 (x_1 - x_3) + c_1 (y_1 - y_3) + \\ + R_1 (\dot{y}_1 - \dot{y}_3) [(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2] = 0 \end{aligned}$$

для ротора 2

$$\begin{aligned} M_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + d_2)(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k_2 \omega_2 (y_2 - y_3) + c_2 (x_2 - x_3) + \\ + R_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) [(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2] = 0 \\ M_2 \ddot{y}_2 + (k_2 + d_2)(\dot{y}_2 - \dot{y}_3) - k_2 \omega_2 (x_2 - x_3) + c_2 (y_2 - y_3) + \\ + R_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_3) [(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2] = 0 \end{aligned}$$

для корпуса

$$\begin{aligned} M_3 \ddot{x}_3 + M_1 \ddot{x}_1 + M_2 \ddot{x}_2 + d_3 \dot{x}_3 + c_3 x_3 + R_3 \dot{x}_3 (x_3^2 + y_3^2) = 0 \\ M_3 \ddot{y}_3 + M_1 \ddot{y}_1 + M_2 \ddot{y}_2 + d_3 \dot{y}_3 + c_3 y_3 + R_3 \dot{y}_3 (x_3^2 + y_3^2) = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь d_1, d_2, d_3 и k_1, k_2 — коэффициенты линейных сил соответственно внешнего и внутреннего трений, R_1, R_2, R_3 — коэффициенты нелинейных сил внешнего трения; остальные обозначения понятны из фиг. 1.

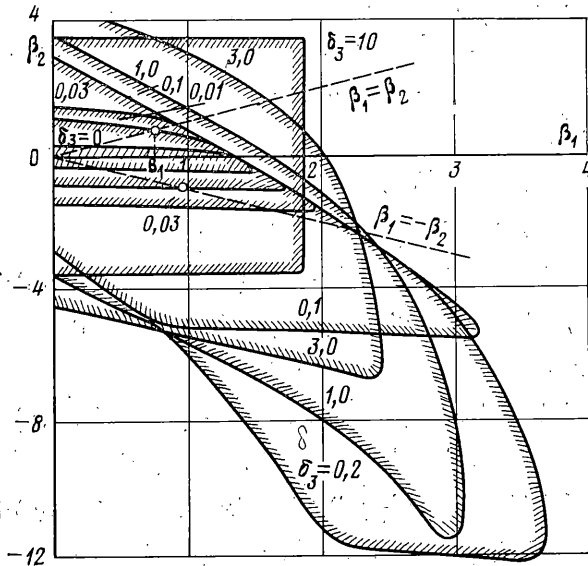
При выводе уравнений (1.1) силы внутреннего трения для каждого ротора первоначально вводились, как это обычно делается, в подвижных координатах, вращающихся соответственно со скоростями ω_1 и ω_2 , как силы сопротивления, пропорциональные относительной скорости перемещения ротора и корпуса. Затем эти силы переводились в неподвижную систему координат.

Устойчивость анализируется при помощи системы, получаемой из системы (1.1) после отбрасывания нелинейных членов и последующего введения комплексной переменной $u = x + iy$ для понижения вдвое порядка. Характеристический определитель такой системы относительно корня r может быть представлен в виде

$$\begin{vmatrix} r^2 + (\alpha_1 + \delta_1)r + 1 - i\alpha_1\beta_1 & 0 & (\alpha_1 + \delta_1)r + 1 - i\alpha_1\beta_1 \\ 0 & \mu_2 r^2 + (\alpha_2 + \delta_2)r + \nu_2 - i\alpha_2\beta_2 & -(\alpha_2 + \delta_2)r + \nu_2 - i\alpha_2\beta_2 \\ r^2 & \mu_2 r^2 & \mu_2 r^2 + \delta_2 r + \nu_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.2)$$

где использованы обозначения для безразмерных параметров: $\mu_2 = M_2/M_1, \mu_3 = M_2/M_1, \nu_2 = c_2/c_1, \nu_3 = c_3/c_1, \alpha_1 = k_1/\sqrt{c_1 M_1}, \alpha_2 = k_2/\sqrt{c_1 M_1}, \delta_1 = d_1/\sqrt{c_1 M_1}, \delta_2 = d_2/\sqrt{c_1 M_1}, \delta_3 = d_3/\sqrt{c_1 M_1}, \beta_1 = \omega_1/\Omega, \beta_2 = \omega_2/\Omega, \Omega^2 = c_1/M_1$.

Определитель (1.2) исследовался при помощи критерия для полиномов с комплексными коэффициентами [7, с. 236]. Исследование подтвердило установленный ранее для простых систем физически понятный результат, что повышению устойчивости способствует уменьшение сил внутреннего трения и увеличение сил внешнего трения в роторе [8]. Как и для систем с одним ротором, для величин жесткости амортизаторов корпуса и сил трения в них существуют оптимальные значения, при которых система обладает наибольшей устойчивостью. Основное отличие рассматриваемой системы от обычной состоит в том, что одновременное вращение роторов в одну сторону сужает область устойчивости, а в противоположную сторону — расширяет.



Фиг. 2

Для иллюстрации на фиг. 2 в плоскости параметров β_1 и β_2 построены границы устойчивости для системы с параметрами $\mu_2=4$, $\mu_3=0,2$, $\alpha_1=0,1$, $\alpha_2=0,2$, $\nu_2=2$, $\nu_3=0,5$, $\delta_1=\delta_2=0$ при дискретно-изменяющемся параметре δ_3 . Отрицательные значения параметра β_2 соответствуют вращению роторов в противоположные стороны. Прямая $\beta_1=\beta_2$ характеризует случай, когда оба ротора вращаются с одинаковыми скоростями в одну сторону, прямая $\beta_1=-\beta_2$ — в разные стороны. Области устойчивости вблизи границ заштрихованы. В частном случае, когда роторы имеют совершенно одинаковые параметры, в режиме $\beta_1=-\beta_2$ система будет формально устойчивой при любых скоростях.

2. Для тех значений параметров задачи, при которых рассматриваемая система находится вне области устойчивости, в системе возникают автоколебания. Однако определить, с какими частотами и по каким формам будут происходить эти автоколебания, можно только при решении нелинейной задачи.

Ограничимся нахождением и анализом установившихся решений. Ввиду изотропности рассматриваемой механической системы траектории движения всех центров масс при автоколебаниях будут обладать центральной симметрией, что вдвое сокращает число неизвестных амплитуд, а следовательно, и число используемых уравнений системы (1.1). Будем предполагать, что при автоколебаниях реализуется j частот с соответствующими амплитудами. Тогда в первом гармоническом приближении решение системы (1.1) можно искать в виде

$$x_i = \sum_j (A_{ij} \cos \Lambda_j t - B_{ij} \sin \Lambda_j t), \quad y_i = \sum_j (A_{ij} \sin \Lambda_j t + B_{ij} \cos \Lambda_j t) \quad (i=1,2,3) \quad (2.1)$$

где Λ , A_{ij} , B_{ij} — неизвестные частоты и амплитуды автоколебаний с общим числом $j(2i+1)$.

В соответствии с используемым ниже методом при нахождении стационарных решений могут быть составлены всего лишь $2ji$ уравнений. Одна из амплитуд за счет смещения начала отсчета времени, как это всегда делается в задачах одночастотных автоколебаний, может быть положена равной нулю (например, $B_{31}=0$), однако уравнений по-прежнему будет не хватать. Это характеризует рассматриваемую задачу как неопределенную и отражает, видимо, физическую сторону явления, когда разности фаз автоколебаний с различными частотами не могут быть определены при

отыскании стационарных решений, так как зависят от начальных условий, имевших место при возбуждении. Можно, однако, предположить, что влияющие на результаты решения амплитудных задач невелики и поэтому в дальнейшем для определенности полагаются $B_{3j}=0$, ($j=2, 3, \dots$).

Ниже при нахождении аналитического решения ограничимся случаем, когда в системе имеется только одна нелинейность в силах трения в амортизаторах ($R_3 \neq 0$, $R_1=R_2=0$). Вследствие этого первые четыре уравнения системы (1.1) будут линейными и из них можно, представляя перемещения корпуса в виде

$$x_3 = \sum_j x_{3j} = \sum_j A_{3j} \cos \Lambda_j t, \quad y_3 = \sum_j y_{3j} = \sum_j A_{3j} \sin \Lambda_j t \quad (2.2)$$

выразить перемещения роторов через перемещения корпуса

$$x_i = \sum_j a_{ij} x_{3j} + \frac{b_{ij}}{\Lambda_j} \dot{x}_{3j}, \quad y_i = \sum_j a_{ij} y_{3j} + \frac{b_{ij}}{\Lambda_j} \dot{y}_{3j} \quad (i=1,2) \quad (2.3)$$

$$a_{ij} = \frac{c_i(c_i - M_i \Lambda_j^2) + [k_i \omega_i - \Lambda_j(k_i + d_i)]^2}{(c_i - M_i \Lambda_j^2)^2 + [k_i \omega_i - \Lambda_j(k_i + d_i)]^2}$$

$$b_{ij} = \frac{M_i \Lambda_j^2 [k_i \omega_i - \Lambda_j(k_i + d_i)]}{(c_i - M_i \Lambda_j^2)^2 + [k_i \omega_i - \Lambda_j(k_i + d_i)]^2}$$

Подставляя зависимости (2.3) в два последних уравнения системы (1.1), получим уравнения, содержащие в качестве неизвестных только перемещения корпуса

$$\begin{aligned} L = & M_1 \sum_j \left(a_{1j} \ddot{x}_{3j} + \frac{b_{1j}}{\Lambda_j} \dot{x}_{3j} \right) + M \sum_j \left(a_{2j} \ddot{x}_{3j} + \frac{b_{2j}}{\Lambda_j} \dot{x}_{3j} \right) + \\ & + M_3 \sum_j \ddot{x}_{3j} + d_3 \sum_j \dot{x}_{3j} + c_3 \sum_j x_{3j} + R_3 \sum_j x_{3j} \left[\left(\sum_j x_{3j} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\sum_j y_{3j} \right)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

(Второе уравнение здесь не выписано: для последующего анализа оно не используется ввиду изотропности системы. В дальнейшем для простоты записи у всех величин, характеризующих перемещения корпуса, индекс 3 опускается.)

Для нахождения решений уравнения (2.4) и анализа устойчивости этих решений воспользуемся методом ортогонализации в «среднем» в той форме, как он изложен в работе [9]. В соответствии с методом, который по своим идеям близок к известному методу Галеркина, для определения неизвестных амплитуд A_j и частот Λ_j подставим выражения (2.2) в уравнение (2.4) и потребуем, чтобы результаты этой подстановки были бы ортогональны в «среднем» базисным функциям $\cos \Lambda_j t$ и $\sin \Lambda_j t$. Получим 2j нелинейных уравнений

$$Q_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t L^\circ \cos \Lambda_j t dt = 0, \quad S_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t L^\circ \sin \Lambda_j t dt = 0 \quad (2.5)$$

где L° — результат подстановки (2.3) в (2.4).

В дальнейшем для определенности будем полагать, что число реализуемых в системе частот автоколебаний и соответствующих им вещественных ($A^2 > 0$) амплитуд не более трех ($j \leq 3$). Тогда из уравнений (2.5) после преобразований получим уравнения для определения частот

$$Q_j = A_j [c_3 - \Lambda_j^2 (a_{1j} M_1 + a_{2j} M_2 + M_3)] = 0 \quad (j=1, 2, 3) \quad (2.6)$$

и амплитуд автоколебаний

$$\begin{aligned} S_1 &= A_1 \{ \Lambda_1^2 (b_{11} M_1 + b_{21} M_2) - \Lambda_1 d_3 - R_3 [A_1^2 \Lambda_1 + A_2^2 (\Lambda_1 + \Lambda_2) + A_3^2 (\Lambda_1 + \Lambda_3)] \} = 0 \\ S_2 &= A_2 \{ \Lambda_2^2 (b_{12} M_1 + b_{22} M_2) - \Lambda_2 d_3 - R_3 [A_1^2 (\Lambda_1 + \Lambda_2) + A_2^2 \Lambda_2 + A_3^2 (\Lambda_2 + \Lambda_3)] \} = 0 \\ S_3 &= A_3 \{ \Lambda_3^2 (b_{13} M_1 + b_{23} M_2) - \Lambda_3 d_3 - R_3 [A_1^2 (\Lambda_1 + \Lambda_3) + A_2^2 (\Lambda_2 + \Lambda_3) + A_3^2 \Lambda_3] \} = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для анализа устойчивости стационарных решений (2.2) составим уравнения в вариациях. Из (2.4) имеем

$$\delta L = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial L}{\partial x_j} z_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \dot{z}_j + \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_j} \ddot{z}_j + \frac{\partial L}{\partial x_j^{(3)}} z_j^{(3)} = 0 \quad (2.8)$$

$$z_j = \xi_j \cos \Lambda_j t + \eta_j \sin \Lambda_j t$$

Разложим выражение (2.8) в «осредненный» ряд

$$\delta L = \sum_j f_j \cos \Lambda_j t + h_j \sin \Lambda_j t + \dots \quad (2.9)$$

где коэффициенты разложения при первых гармониках определены формулами

$$f_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \delta L \cos \Lambda_j t dt, \quad h_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \delta L \sin \Lambda_j t dt$$

и удержим в разложении (2.9) первые гармоники. Тогда уравнения в вариациях получаются из условия равенства нулю амплитуд при этих гармониках

$$f_j = h_j = 0 \quad (2.10)$$

Расписывая условия (2.10), после преобразований окончательно получим следующие уравнения в вариациях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial A_1} \xi_1 - 2(a_{11} M_1 + a_{21} M_2 + M_3) \xi_1 + \frac{\partial S_1}{\partial A_2} \xi_2 + \frac{\partial S_1}{\partial A_3} \xi_3 &= 0 \\ \frac{\partial S_2}{\partial A_1} \xi_1 + \frac{\partial S_2}{\partial A_2} \xi_2 - 2(a_{12} M_1 + a_{22} M_2 + M_3) \xi_2 + \frac{\partial S_2}{\partial A_3} \xi_3 &= 0 \\ \frac{\partial S_3}{\partial A_1} \xi_1 + \frac{\partial S_3}{\partial A_2} \xi_2 + \frac{\partial S_3}{\partial A_3} \xi_3 - 2(a_{13} M_1 + a_{23} M_2 + M_3) \xi_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

В уравнения (2.11) вообще не вошли вариации η_j , что является следствием предположения о характере решения (2.2).

Для устойчивости решений необходимо, чтобы корни характеристического уравнения системы (2.11) не имели положительных действительных частей. Это устанавливается при помощи критерия Рауса — Гурвица.

В случаях, когда из уравнения (2.6) определяется только одна вещественная частота автоколебаний, например Λ_1 , для нахождения амплитуд и анализа их устойчивости служат соответственно уравнения

$$S_1 = A_1 [\Lambda_1^2 (b_{11} M_1 + b_{21} M_2) - \Lambda_1 d_3 - R_3 A_1^2 \Lambda_1] = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial A_1} \xi_1 - 2(a_{11}M_1 + a_{21}M_2 + M_3) = 0 \quad (2.13)$$

являющиеся частными случаями систем (2.7) и (2.11).

Когда из уравнения (2.6) определяются только две вещественных частоты, например Λ_1 и Λ_2 , для нахождения амплитуд служит система

$$\begin{aligned} S_1 &= A_1 \{ \Lambda_1^2 (b_{11}M_1 + b_{21}M_2) - \Lambda_1 d_3 - R_3 [A_1^2 \Lambda_1 + A_2^2 (\Lambda_1 + \Lambda_2)] \} = 0 \\ S_2 &= A_2 \{ \Lambda_2^2 (b_{12}M_1 + b_{22}M_2) - \Lambda_2 d_3 - R_3 [A_1^2 (\Lambda_1 + \Lambda_2) + A_2^2 \Lambda_2] \} = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

которая допускает решения, соответствующие двум режимам одночастотных автоколебаний: $A_1 \neq 0, A_2 = 0$; $A_1 = 0, A_2 \neq 0$ и одному режиму двухчастотных колебаний $A_1 \neq 0, A_2 \neq 0$.

Устойчивость этих решений устанавливается при помощи системы уравнений в вариациях

$$\frac{\partial S_1}{\partial A_1} \xi_1 - 2(a_{11}M_1 + a_{21}M_2 + M_3) \xi_1 + \frac{\partial S_1}{\partial A_2} \xi_2 = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial A_1} \xi_1 + \frac{\partial S_2}{\partial A_2} \xi_2 - 2(a_{12}M_1 + a_{22}M_2 + M_3) \xi_2 = 0$$

В случае, когда из системы (2.6) определяются три вещественные частоты, система (2.7) допускает три режима одночастотных автоколебаний:

$$A_1 \neq 0, A_2 = 0, A_3 = 0; \quad A_1 = 0, A_2 \neq 0, A_3 = 0; \quad A_1 = 0, A_2 = 0, A_3 \neq 0$$

три режима двухчастотных автоколебаний

$$A_1 \neq 0, A_2 \neq 0, A_3 = 0; \quad A_1 \neq 0, A_2 = 0, A_3 \neq 0; \quad A_1 = 0, A_2 \neq 0, A_3 \neq 0$$

и один режим трехчастотных колебаний, $A_1 \neq 0, A_2 \neq 0, A_3 \neq 0$.

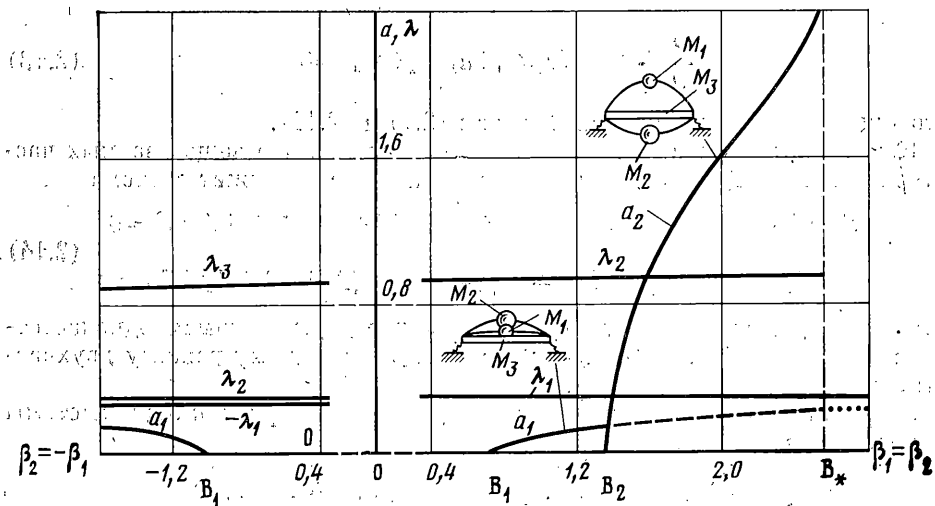
Устойчивость указанных режимов, когда всем трем частотам соответствуют вещественные значения амплитуд в том или ином режиме, устанавливается при помощи системы (2.11). Когда же таких частот будет две или одна, устойчивость решений устанавливается при помощи уравнений вида (2.15) или (2.13).

Может оказаться, что одновременно существуют и являются устойчивыми различными режимами автоколебаний или несколько вариантов одинаковых режимов, но с различными частотами. В этих случаях действительное существование того или иного режима автоколебаний будет зависеть от начальных условий, т. е. значений неизвестных функций и их первых производных в начальный момент времени.

3. Изложенный порядок нахождения решений и анализа устойчивости иллюстрируется на примере двух систем, отличающихся массой корпуса. Рассматриваются случаи, когда роторы вращаются с одинаковыми по абсолютной величине скоростями в одном ($\beta_1 = \beta_2$) и в разных ($\beta_1 = -\beta_2$) направлениях.

Система с «легким» корпусом имеет параметры $\mu_2 = 4, \mu_3 = 0,2, \nu_2 = 2, \nu_3 = 0,5, \alpha_1 = 0,1, \alpha_2 = 0,2, \delta_1 = \delta_2 = 0, \delta_3 = 0,01$ и относительные собственные частоты соответствующей консервативной системы $\Omega_1/\Omega = 0,286, \Omega_2/\Omega = 0,915, \Omega_3/\Omega = 4,25$.

Результаты расчетов для зависимостей безразмерных амплитуд $a = AR_3^{1/2} (c_1 M_1)^{-1/4}$ и частот $\lambda = \Lambda/\Omega$ автоколебаний от скорости β_1 показаны на фиг. 3. При одностороннем вращении из уравнения (2.6) находятся две частоты λ_1 и λ_2 . Двухчастотные автоколебания в системе не возникают. При скорости $\beta_1 = B_1$ (на границе устойчивости в соответствии с фиг. 2) возникают одночастотные автоколебания в виде прямой прецессии с частотой λ_1 и с формой, близкой к форме собственных колебаний с частотой Ω_1 , когда оба ротора перемещаются в фазе. При скорости $\beta_1 = B_2$ возникают автоколебания с частотой λ_2 и с формой, соответствующей частоте Ω_2 , когда роторы перемещаются в противофазе. При этом колебания с частотой λ_1 становятся неустойчивыми (показано пунктиром). При скорости $\beta_1 = B_*$ частота λ_2 пропадает, а соответствующая амплитуда становится неограниченно большой. Формально при $\beta_1 > B_*$



Фиг. 3

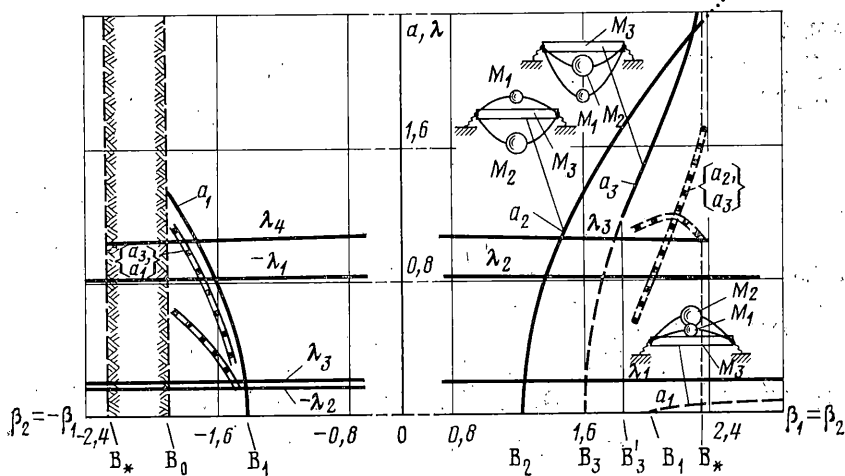
вновь устойчивыми становятся автоколебания с амплитудой a_1 и частотой λ_1 (эта часть графика показана жирными точками), однако численный анализ исходной системы (1.1) показывает, что при $\beta_1 > B_*$ решения неограниченно растут во времени и здесь не существует установившегося режима. В случае, когда роторы вращаются в противоположные стороны, из уравнения (2.6) находятся три частоты, однако реализуется лишь одночастотный режим в форме обратной прецессии.

Для системы с «тяжелым» корпусом, имеющей параметры $\mu_2=4$, $\mu_3=10$, $\nu_2=2$, $\nu_3=0,5$, $\alpha_1=0,1$, $\alpha_2=0,2$, $\delta_1=\delta_2=0$, $\delta_3=0,01$, $\Omega_1/\Omega=0,181$, $\Omega_2/\Omega=0,814$, $\Omega_3/\Omega=1,073$, результаты решений представлены на фиг. 4 (неустойчивые ветви решений показаны пунктиром, формально устойчивые — жирными точками). При однонаправленном вращении из уравнения (2.6) находятся три частоты автоколебаний, близкие к собственным частотам соответствующей консервативной системы, а из системы (2.7) находятся три режима одночастотных и один режим двухчастотных автоколебаний. Двухчастотный режим с амплитудами $\{a_2, a_3\}$ и одночастотный режим с амплитудой a_1 и частотой λ_1 будут неустойчивыми. В диапазоне $B_3 \div B_*$ устойчивыми будут одночастотные колебания как с частотой λ_2 , так и с частотой λ_3 , и реальное существование того или иного режима будет зависеть от начальных условий. При $\beta_1 > B_*$, когда исчезает частота λ_3 , режим устойчивых автоколебаний не существует, хотя формально должен существовать режим с частотой λ_2 .

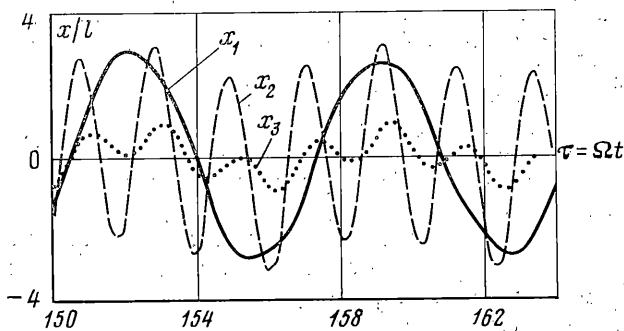
При вращении роторов в противоположные стороны из уравнения (2.6) находятся уже четыре частоты автоколебаний, но до некоторой скорости $\beta_1 = B_0$ реализуется только две частоты λ_1 и λ_3 , когда существуют и являются устойчивыми одночастотные колебания с частотой λ_1 и двухчастотные колебания с амплитудами $\{a_1, a_3\}$ и частотами λ_1 и λ_3 . В заштрихованной области $B_0 \div B_*$, как показали расчеты, реализуются все четыре частоты, и поэтому система (2.11), при выводе которой предполагалось, что реализуется не более трех частот, уже не может служить для отделения устойчивых решений от неустойчивых (для этого при выводе нужно было искать решение, по крайней мере, в форме четырехчастотных автоколебаний). Численные решения показывают, что в этой области существуют в различных сочетаниях двухчастотные и одночастотные колебания. При $|\beta_1| > B_*$, когда одна из частот (λ_4) автоколебаний исчезает, установившиеся автоколебания не существуют.

Анализ и специально проведенные расчеты позволили установить, что причина отсутствия в некоторых случаях стационарных решений, несмотря на учет нелинейного демпфирования, заключается в исходном предположении, что учитываемая нелинейность является единственной. Если же учесть нелинейность во всех остальных уравнениях системы (1.1), то при всех параметрах задачи будут существовать установившиеся режимы автоколебаний.

Для иллюстрации на фиг. 5 изображены полученные численно методом Рунге — Кутты при решении системы (1.1) перемещения корпуса и роторов в направлении x в установившемся режиме для системы с параметрами: $\mu_2=1/8$, $\mu_3=0,2$, $\nu_2=1$, $\nu_3=5$, $\alpha_1=0,1$, $\alpha_2=0,3$, $\delta_1=0,3$, $\delta_2=0,1$, $\delta_3=0,1$, $\beta_1=\beta_2=10$, $R_1 l^2 / \sqrt{c_1 M_1} = R_2 l^2 / \sqrt{c_1 M_1} = R_3 l^2 / \sqrt{c_1 M_1} = 0,1$ (l — произвольная величина, имеющая размерность длины, например размер радиального зазора в подшипниках), в которой без учета нелинейностей в роторах ($R_1=R_2=0$) решения были неограниченно возрастающими. Параметры системы подобраны так, чтобы подчеркнуть возможность существования в рассматриваемой задаче режима двухчастотных автоколебаний.



Фиг. 4



Фиг. 5

Проведенные расчеты показали, что при анализе автоколебаний в сложных системах, по крайней мере, на три условия следует обратить внимание: исходная система уравнений должна обладать необходимой «нелинейной» полнотой, т. е. содержать нелинейные члены во всех уравнениях; вид отыскиваемого решения должен соответствовать числу реализуемых в системе частот и форм автоколебаний; реализация того или иного режима автоколебаний зависит от начальных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wilson T. S. The calculation of whirling speeds of a system of rotors keyed to coaxial shafts.— Aeronaut. Res. Council Repts and memor., 1953, No. 2709, p. 1–24.
2. Бауер В. О. Вынужденные колебания системы соосных роторов с учетом гироскопического эффекта дисков.— Прочность и динамика авиационных двигателей: Сб. статей. М.: Машиностроение, 1965, вып. 2, стр. 201–254.
3. Урюпин А. Г. Устойчивость изгибных колебаний соосных роторов.— Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 1, с. 180–182.
4. Бондаренко Н. И., Голоскоков Е. Г. Об автоколебаниях соосных роторов.— Динамика и прочность машины: Сб. статей. Харьков: Изд-во Харьковск. ун-та, 1966, вып. 4, с. 73–79.
5. Овчарова Д. К., Голоскоков Е. Г. Автоколебания соосных роторов.— Прикладная механика, 1971, т. 7, вып. 6, с. 85–90.
6. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линеиные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М.: Наука, 1972. 718 с.
7. Мишина А. П., Проскуряков И. В. Высшая алгебра. М.: Физматгиз, 1962. 300 с.
8. Дименлберг Ф. М. Изгибные колебания вращающихся валов. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 247 с.
9. Позняк Э. Л. Автоколебания роторов со многими степенями свободы.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 2, с. 40–49.

Москва

Поступила в редакцию
4.III.1980