

УДК 534.1

**РЕЗОНАНСНЫЙ МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ  
НЕЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ**

ПЛАХТИЕНКО Н. П.

Нелинейные свойства механических колебательных систем проявляются в резонансных ситуациях, возникающих при выполнении резонансных соотношений между собственными частотами и частотами возбуждения. Изучение и наблюдение резонансных явлений таких систем может быть положено в основу алгоритмов их идентификации. Такой резонансный подход в идентификации используется в физике твердого тела для исследования и идентификации структуры вещества при наблюдении и анализе явления электронного парамагнитного резонанса [1].

В публикуемой работе излагаются теоретические основы определения параметров и характеристик механических слабо нелинейных систем из анализа резонансных колебаний, а также результаты моделирования, выполненного на ЭВМ.

1. Широкий класс механических стационарных систем, совершающих движение в окрестности устойчивого положения равновесия под действием потенциальных и малых непотенциальных сил, описывается системой дифференциальных уравнений [2]:

$$M\ddot{\mathbf{q}} + C\dot{\mathbf{q}} = \varepsilon F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \varepsilon \mathbf{E}(t) \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)$  — вектор-столбец обобщенных (физически измеряемых) координат,  $M = [m_{ij}]$ ,  $C = [c_{ij}]$  — симметричные, положительно-определенные  $N \times N$ -матрицы коэффициентов инерции и жесткости,  $F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  —  $N$ -мерная вектор-функция переменных  $\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s$  ( $s=1, \dots, N$ ), отражающая влияние малых диссипативных и нелинейных консервативных сил,  $\mathbf{E}(t)$  —  $N$ -мерный вектор силовых воздействий, рассматриваемых как тестовые возмущения,  $0 < \varepsilon \ll 1$ .

В линейных системах  $F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}$  ( $\mathbf{B} = [b_{ij}]$  — симметричная положительно-определенная  $N$ -матрица коэффициентов демпфирования). Посредством линейного невырожденного преобразования

$$\mathbf{X} = \Phi^{-1}\mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = \Phi\mathbf{X}, \quad \mathbf{X} = (x_1, \dots, x_N) \quad (1.2)$$

система уравнений (1.2) приводится к виду

$$\mu_k \ddot{x}_k + \gamma_k \dot{x}_k = \varepsilon Q_k(x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N) + \varepsilon e_k(t) \quad (1.3)$$

или

$$\mu \ddot{\mathbf{X}} + \gamma \dot{\mathbf{X}} = \varepsilon \mathbf{Q}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) + \varepsilon \mathbf{e}(t), \quad \mu = \text{diag}[\mu_1, \dots, \mu_N], \quad \gamma = \text{diag}[\gamma_1, \dots, \gamma_N]$$

$$\mu = \Phi^T M \Phi, \quad \gamma = \Phi^T C \Phi, \quad \mathbf{Q} = \Phi F(\Phi\mathbf{X}, \Phi\dot{\mathbf{X}}), \quad \mathbf{e}(t) = \Phi^T \mathbf{E}(t)$$

Матрица  $\Phi$  составлена из вектор-столбцов  $\Phi_k$  ( $k=1, \dots, N$ ), удовлетворяющих условию  $(-M\omega_k^2 + C)\Phi_k = 0, \det(-M\omega_k^2 + C) = 0$ .

При этом предполагается, что в системе нет внутренних резонансов, т. е.  $\omega_k \neq l\omega_i, k \neq i, l$  — целые числа;  $\gamma_k = \omega_k \mu_k$ . В дальнейшем условимся называть систему уравнений (1.1) физически измеряемой системой, уравнения (1.3) — математической моделью измеряемой системы в квазинормальных координатах, соотношение (1.2) — уравнением линейного преобразователя, переводящего выходные процессы измеряемой системы в выходные

процессы математической модели. Системы, описываемые уравнениями (1.1) и (1.3), не могут быть различимы экспериментально [3, с. 28].

В уравнениях (1.3) связь между квазинормальными координатами осуществляется посредством малых членов, вследствие этого заметный эффект колебаний с участием нескольких форм имеет место в резонансных ситуациях.

Рассмотрим задачу определения параметров  $\mu_k$ ,  $\gamma_k$  и нелинейных функций  $Q_k(\dots)$  при известных действующих нагрузках  $e_k(t)$  и записанных процессах  $x_k(t)$ . Это — задача идентификации математической модели механической системы. Для решения этой задачи примем принцип обращения решений математической модели, приводящий, как известно, к решению интегральных уравнений [4–9]. Задачу определения параметров и нелинейных функций уравнений (1.3) следует решать с использованием теории собственных и несобственных резонансов квазилинейных систем [10].

Для сокращения алгоритмов решения задачи идентификации математической модели (1.3) примем следующие предположения:

1. Рассматриваемую систему идентифицируем в классе моделей с диагонализированной диссипативной функцией типа диссипативной функции Релея — Лурье [11]:  $R=R(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)$ , которая при преобразовании (1.2) диагонализуется

$$R(x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N) = \sum_{i=1}^N R_i(x_i, \dot{x}_i)$$

В этом случае недиагональные члены функций  $Q_k(\dots)$  зависят только от позиционных координат.

2. В выражениях для  $Q_k(\dots)$  сохраним члены, отражающие лишь попарное взаимодействие квазинормальных форм колебаний, т. е. содержащие произведения координат вида  $x_i x_k$ , вследствие этого примем:

$$Q_k(x_1, \dots, x_N, \dot{x}_k) = f_k(x_k, \dot{x}_k) + \sum_{i \neq k} f_{ki}(x_i) + \sum_{r=1}^s \sum_{i \neq k} u_{rki}(x_k) g_{rki}(x_i) \quad (i, k=1, 2, \dots, N) \quad (1.4)$$

В выражении (1.4) функции  $f_k(x_k, \dot{x}_k)$  будем называть характеристиками собственных неконсервативных и нелинейных сил, зависимости  $f_{ki}(x_i)$  ( $i=1, \dots, N$ ) — функции несобственных перекрестных связей; произведения  $u_{rki}(x_k) g_{rki}(x_i)$  ( $i \neq k$ ) — характеристики смешанных перекрестных связей.

3. Позиционные силы будем считать консервативными, поэтому

$$\partial Q_k / \partial x_i = \partial Q_i / \partial x_k \quad (k, i=1, \dots, N) \quad (i \neq k) \quad (1.5)$$

Из (1.5) следует, что функции  $f_{ki}(x_i)$ ,  $u_{rki}(x_k)$ ,  $g_{rki}(x_i)$  не могут быть совершенно произвольными, они связаны соотношением

$$\frac{df_{ki}(x_i)}{dx_i} + \sum_{r=1}^s u_{rki}(x_k) \frac{dg_{rki}(x_i)}{dx_i} = \frac{df_{ik}(x_k)}{dx_k} + \sum_{r=1}^s u_{rik}(x_i) \frac{dg_{rik}(x_k)}{dx_k} \quad (1.6)$$

которое следует рассматривать как уравнение для определения функций  $g_{rki}(x_i)$ ,  $u_{rki}(x_k)$ . Уравнение (1.6) удовлетворяется линейными функциями  $g_{rki}(x_i) = G_{rki} x_i$ , при этом функции  $f_{ki}(x_i)$  и  $u_{rki}(x_k)$  связаны соотношением

$$\frac{df_{ki}(x_i)}{dx_i} = \sum_{r=1}^s u_{rik}(x_i) G_{rik} = V_{ik}(\dot{x}_i) \quad (1.7)$$

Следовательно, в рамках принятых предположений функции  $Q_k(\dots)$  представимы в виде

$$Q_k(x_1, \dots, x_N, x_k) = f_k(x_k, x_k) + \sum_{i=1}^N [f_{ki}(x_i) + x_i V_{ki}(x_k)]$$

Таким образом, для построения модели слабо нелинейной колебательной системы в квазинормальных координатах необходимо определить параметры  $\mu_k, \gamma_k$  и функции  $f_k(x_k, x_k), f_{ki}(x_i)$  ( $k, i=1, \dots, N$ ). Укажем способы определения этих величин.

2. Собственными динамическими характеристиками считаем величины  $\mu_k, \gamma_k, f_k(x_k, x_k)$ , которые определяем в условиях (основных) собственных резонансов, когда тестовое возбуждение действует в направлении  $k$ -й координаты, является гармоническим  $e_k(t) = e_k \sin \nu_k t$  и при этом выполняется резонансное соотношение

$$\nu_k \approx \omega_k \quad (2.1)$$

Представим неизвестные диагональные составляющие функций  $Q_k(\dots)$  в виде

$$\gamma_k x_k - \varepsilon f_k(x_k, x_k) = \varepsilon x_k D_k(x_k) + \varphi_k(x_k)$$

Здесь первое слагаемое в правой части отражает наличие сил демпфирования, второе — восстанавливающих сил.

При выполнении резонансного соотношения (2.1) влияние функций перекрестных связей в силу малости  $x_i(t)$  мало и имеет порядок  $\varepsilon^2$ , поэтому с указанной степенью точности процесс  $x_k(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\mu_k x_k \ddot{x}_k + \varepsilon x_k D_k(x_k) + \varphi_k(x_k) = \varepsilon e_k \sin \nu_k t \quad (2.2)$$

Далее индекс  $k$ , указывающий номер квазинормальной формы, будем опускать.

Обращая улучшенное первое приближение периодического решения уравнения (2.2) вида

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0(b) + b \sin(\nu t - \theta) + \sum_{n=2}^{\infty} [b_n(b) \sin n(\nu t - \theta) + a_n(b) \cos n(\nu t - \theta)] \quad (2.3)$$

получаем следующие формулы для определения четных и нечетных слагаемых искомых функций [12]:

$$D^+(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{d[b^2 \lambda(b)]}{\sqrt{x^2 - b^2}}, \quad D^-(x) = \frac{3}{4} \frac{\mu}{x} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{d[b^2 b_2(b) \omega(b)]}{\sqrt{x^2 - b^2}} \quad (2.4)$$

$$\varphi^-(x) = \frac{1}{2} \mu \int_0^x \frac{d[b^2 \omega^2(b)]}{\sqrt{x^2 - b^2}}, \quad \varphi^+(x) = -\mu \frac{x}{2} \int_0^x \frac{d[a_0(b) \omega^2(b)]}{\sqrt{x^2 - b^2}}$$

$$D(x) = D^+(x) + D^-(x), \quad \varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x),$$

$$D^+(x) = D^+(-x), \quad D^-(x) = -D^-(-x)$$

В формулах (2.4)  $\omega(b)$  — измеряемая частота фазового резонанса как функция амплитуды колебаний,  $\lambda(b) = (bv)^{-1} e \sin \theta$  — экспериментально определяемая величина,  $\mu$  — приведенная масса квазинормальной формы колебаний, которую удобно определять по методу добавочной массы по формуле

$$\mu = \rho^2 \omega \Delta m (2\Delta \omega)^{-1} \quad (2.5)$$

где  $\omega$  — частота фазового резонанса испытуемой системы без добавочной массы,  $\Delta m$  — малое приращение массы конструкции,  $\Delta\omega$  — соответствующее уменьшение частоты фазового резонанса,  $\rho$  — отношение амплитуды точки приложения массы  $\Delta m$  к амплитуде точки приведения квазинормальной формы. При этом режим фазового резонанса характеризуется совпадением частоты возбуждения с собственной частотой колебательной системы, а точка приведения квазинормальной формы совпадает с точкой (координатой) системы, через амплитуду которой выражены амплитуды колебаний остальных точек конструкции.

Если характеристика  $D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mathbf{H}(\mathbf{x}')$  демпфирования зависит только от скорости и является нечетной функцией аргумента, то для ее определения справедлива формула

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}') = \frac{1}{2} \int_0^{\mathbf{x}'} \frac{d[\lambda(\mathbf{v}) \mathbf{v}^2]}{\sqrt{\mathbf{x}'^2 - \mathbf{v}^2}}, \quad \lambda(\mathbf{v}) = \frac{\varepsilon \sin \theta}{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{b}\mathbf{v} \quad (2.6)$$

Формулы (2.4), (2.6) получены обращением известных в теории асимптотических методов [2] выражений для эквивалентных линейаризованных коэффициентов жесткости и демпфирования, нулевой и второй гармоники колебаний.

3. Функции перекрестных связей можно определить при выполнении резонансного соотношения вида  $l\nu_p \approx n\omega_s$ , где  $l, n$  — целые числа (когда  $p \neq s$ , резонанс называется несобственным).

Для конкретности примем, что тестовое возбуждение действует в направлении  $p$ -й квазинормальной координаты, а резонанс наблюдается по  $s$ -й координате, тогда эффект взаимодействия двух форм колебаний отражается парой уравнений

$$\mu_p \mathbf{x}_p'' + \varepsilon x_p D_p(\mathbf{x}_p) + \varphi_p(\mathbf{x}_p) = \varepsilon f_{ps}(\mathbf{x}_s) + \varepsilon \mathbf{V}_{ps}(\mathbf{x}_s) \mathbf{x}_p + \mathbf{e}_p \cos \nu_p t \quad (3.1)$$

$$\mu_s \mathbf{x}_s'' + \varepsilon x_s D_s(\mathbf{x}_s) + \varphi_s(\mathbf{x}_s) = \varepsilon f_{sp}(\mathbf{x}_p) + \varepsilon \mathbf{V}_{sp}(\mathbf{x}_p) \mathbf{x}_s \quad (3.2)$$

Пусть частота возбуждения  $\nu_p$  не равна и не близка ни к одной из собственных частот  $\omega_p, \omega_s$ . Тогда по координате  $x_p$  будут нерезонансные малые колебания вида

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{b}_p \cos \nu_p t + \varepsilon \mathbf{u}_p(\mathbf{b}_p, \nu_p t), \quad \mathbf{b}_p = \mathbf{e}_p [\mu_p (\omega_p^2 - \nu_p^2)]^{-1} \quad (3.3)$$

где  $\mathbf{u}_p(\dots)$  — малая  $2l\nu_p^{-1}$ -периодическая функция  $t$ , обращающаяся в нуль при  $\mathbf{b}_p = 0$ . Подставляя (3.2) в (3.1) и пренебрегая величинами  $\sim \varepsilon^2$ , получаем

$$\mu_s \mathbf{x}_s'' + \varepsilon x_s D_s(\mathbf{x}_s) + \varphi_s(\mathbf{x}_s) = \varepsilon f_{sp}(\mathbf{b}_p \cos \nu_p t) + \varepsilon \mathbf{V}_{sp}(\mathbf{b}_p \cos \nu_p t) \mathbf{x}_s \quad (3.4)$$

Если функция  $f_{sp}(\mathbf{x}_p)$  содержит четную и нечетную слагаемую, то при выполнении резонансного условия  $l\nu_p = \omega_s$  ( $l=2, 3, \dots$ ) уравнение (3.2) допускает резонансное решение

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{b}_{sl} \cos(l\nu_p t - \theta_l) + \varepsilon \mathbf{u}_{sl}(l\nu_p t - \theta_l), \quad \mathbf{b}_{sl} = f_{spl}(\mathbf{b}_p) \mathbf{B}_{sl}(\mathbf{b}_{sl}, l\nu_p) \quad (3.5)$$

$$\mathbf{B}_{sl}(\mathbf{b}_{sl}, l\nu_p) = [\mu_s (\omega_s^2(\mathbf{b}_{sl}) - l^2 \nu_p^2)^2 + (l\nu_p \lambda_s(\mathbf{b}_{sl}))^2]^{-1/2}$$

$$f_{spl}(\mathbf{b}_p) = \frac{4}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \varepsilon f_{sp}^+(\mathbf{b}_p \cos \psi) \cos l\psi d\psi \quad (l=2, 4, \dots) \quad (3.6)$$

$$f_{spl}(\mathbf{b}_p) = \frac{4}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \varepsilon f_{sp}^-(\mathbf{b}_p \cos \psi) \cos l\psi d\psi \quad (l=3, 5, \dots) \quad (3.7)$$

где  $\mathbf{u}_{sl}(\dots)$  — периодическая функция времени с периодом  $2\pi(l\nu_p)^{-1}$ , обращающаяся в нуль при  $\mathbf{b}_p = 0$ . На основании соотношения (3.5) величину  $f_{spl}(\mathbf{b}_p)$  можно вычислить измерением амплитуды  $\mathbf{b}_{s2}$  для различных зна-

чений  $b_p$ , получаемых за счет изменения параметра  $e_p$ . Полагая в соотношении (3.6)  $l=2$  и интегрируя его по частям, после замены в полученном выражении переменной интегрирования по формуле  $z=b_p \cos \psi$  получаем интегральное уравнение типа Абеля относительно производной от функции  $\varepsilon f_{sp}^{+'}(x_p)$  [13]:

$$\frac{\pi}{4} b_p^2 f_{sp2}(b_p) = \int_0^{b_p} \varepsilon f_{sp}^{+'}(z) z \sqrt{b_p^2 - z^2} dz \quad (3.8)$$

Решение интегрального уравнения (3.8) относительно функции  $f_{sp}^{+}(x_p)$  имеет вид [12, 8]:

$$\varepsilon f_{sp}^{+'}(x_p) = \frac{1}{2} \int_0^{x_p} x_p^{-1} d \int_0^{x_p} \frac{d[b_p^2 f_{sp2}(b_p)]}{\sqrt{x_p^2 - b_p^2}} \quad (3.9)$$

Соотношение (3.7) при  $l=3$  указанной заменой переменной интегрирования приводится к уравнению Вольтерра I рода

$$f_{sp3}(b_p) = \frac{4}{\pi b_p} \int_0^{b_p} f_{sp}^{-}(z) (4z^3 b_p^{-3} - 3z b_p^{-1}) (1 - z^2 b_p^{-2})^{-1/2} dz \quad (3.10)$$

Из уравнения (3.10) нечетную слагаемую функции  $f_{sp}(x_p)$  следует находить численно, сводя его к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений искомой функции в дискретных точках. Для определения функции  $f_{ps}(x_s)$  необходимо, чтобы направленное возбуждение действовало по координате  $x_s$ , а резонансные колебания осуществлялись по  $p$ -й координате.

Как видно, определение динамических характеристик сложных колебательных систем может быть связано с вычислением определенных квадратурных формул.

4. Используемые в изложенной теории формулы получены обращением приближенных резонансных решений задач о колебаниях нелинейных систем, поэтому они содержат методическую погрешность, для определения которой было проведено математическое моделирование на ЭВМ. При этом моделировании на ЭВМ БЭСМ-4 определялись характеристики восстанавливающей силы и демпфирования нелинейного осциллятора, описываемого уравнением

$$x'' + H(x') + f(x) = e \sin vt \quad (4.1)$$

Для экспериментов выбирались наиболее «неблагоприятные» системы с разрывными и недифференцируемыми характеристиками. Искомые функции определялись в дискретном множестве точек. Для этого использовалось выражение интегралов Стильтеса по формулам трапеций.

Так, если

$$f(x) = \int_0^x (x^2 - b^2)^{-1/2} dV(b)$$

то приближенное значение  $f^*$  функции  $f$  при  $x=b_h$  вычисляется по формуле

$$f^*(b_h) = \sum_{i=1}^h (V(b_i) - V(b_{i-1})) \left( b_h^2 - \left( \frac{b_i + b_{i-1}}{2} \right)^2 \right)^{-1/2} \quad (4.2)$$

которая обладает тем свойством, что с увеличением  $b_h$  абсолютная погрешность  $\Delta = |f^* - f|$  увеличивается, а относительная  $\delta = \Delta/f$  — уменьшается.

На ЭВМ вычислялись данные  $\omega^2(b) = b^{-1} e \cos \theta + \nu^2$ ,  $\lambda(\nu) = \nu^{-1} e \sin \theta$  для монотонно возрастающей последовательности амплитуд гармоник, имеющей частоту возбуждения. Указанная последовательность получалась при

Таблица 1

$x$	$f^*(x)$	$f(x)$
3,64	$-1,93 \cdot 10^{-5}$	0
3,92	$2,21 \cdot 10^{-1}$	0
4,44	33,6	30,8
4,89	69,4	62,3
5,42	105	99,4
5,78	130	125
6,09	152	146
6,36	169	165
7,35	236	235
7,80	267	266
9,75	401	403

Таблица 2

$x$	$f^*(x)$	$f(x)$
0,258	1,28	1,26
0,301	1,15	1,30
0,328	1,26	1,33
0,384	1,32	1,38
0,439	1,37	1,44
0,494	1,43	1,49
0,550	1,48	1,55
0,605	1,54	1,61
0,688	1,62	1,69
0,743	1,67	1,74
0,771	1,70	1,77

Таблица 3

$x$	$f^*(x)$	$f(x)$	$f^{**}(x)$	$f^+(x)$
0,120	1,03	1,20	0,206	0,240
0,195	1,79	1,95	0,352	0,390
0,296	2,76	2,96	0,548	0,592
0,347	3,24	3,47	0,646	0,692
0,397	3,72	3,97	0,744	0,794
0,801	7,58	8,01	1,53	1,60
1	9,51	10	1,92	2
1,15	11,0	11,5	2,22	2,30

Таблица 4

$x, x^*/\pi$	$f^*(x)$	$f(x)$	$b^*(x^*)$	$b(x^*)$
1,61	17,3	18,1	2,73	2,59
1,92	20,1	21,2	3,21	3,65
2,04	21,6	22,4	4,39	4,12
2,23	23,4	24,3	4,87	4,93
2,34	24,6	25,4	5,71	5,48
2,45	25,6	26,5	6,39	6,00
2,68	27,9	28,8	6,60	7,19
2,78	29,0	29,8	7,44	7,73

постоянной частоте возбуждения и медленно возрастающей амплитуде внешней силы  $e = e_0 + e_1 t$ ,  $e_1/e_0 \ll 1$ . Амплитуды  $b$ ,  $a_0$  и угол фазового сдвига  $\theta$  определялись по формулам ( $k$  — целое число):

$$b = \sqrt{s_1^2 + c_1^2}, \quad a_0 = \frac{1}{2} c_0, \quad \operatorname{tg} \theta = c_1/s_1 \quad (4.3)$$

$$\frac{s_n}{c_n} = \frac{v}{\pi k} \int_T^{T+2\pi k v^{-1}} x(t) \frac{\sin nvt}{\cos nvt} dt \quad (n=0, 1, \dots)$$

Уравнение (4.1) интегрировалось методом Рунге — Кутты с шагом  $h = 0,1\pi v^{-1}$ , квадратуры (4.3) вычислялись по способу прямоугольников.

Основные погрешности определения величин  $b$ ,  $\theta$ ,  $a_0$  вызваны наличием переходных процессов и субгармонических составляющих с частотами  $1/2v$ ,  $1/3v$ . Влиянием переходных процессов можно пренебречь, если пользоваться результатами вычислений, получаемыми при определенной выдержке  $T$  после включения системы. Субгармоники с частотами  $1/2v$ ,  $1/3v$  отсеивались выбором  $k=6$ , при этом было  $v=\pi$ .

При вычислении искомых характеристик по формуле вида (4.2) необходимо, чтобы определение зависимости  $\mathbf{B}(b)$  было осуществлено с небольшим шагом изменения амплитуды  $b$ . Нарушение этого условия может происходить в нелинейных системах при перескоках амплитуды с нижней на верхнюю ветвь амплитудно-частотной характеристики. Табл. 1 получена при испытании системы с люфтом:  $\mathbf{H}(x^*) = h_1 x^*$ ,  $f(x) = 0$  при  $|x| \leq x_0$ ;  $f(x) = g_1(x - x_0 \operatorname{sign} x)$  при  $|x| \geq x_0$ ;  $x_0 = 4$ ;  $g_1 = 70$ ;  $h_1 = 6$ .

На фигуре результаты вычислений на ЭВМ представлены точками. Как видно, для ненулевых значений искомой функции относительная погрешность определения по квадратурной формуле изменяется от 10 до 0,4%. Близость расчетных точек к сплошной линии, изображающей на фигуре точное значение характеристики  $f(x)$ , свидетельствует о приемлемости методической погрешности использованной квадратурной формулы. При

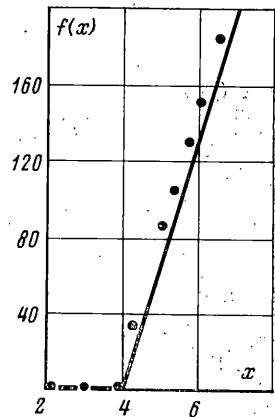
уменьшении демпфирования ( $h_1=2$ ) выход амплитуды колебаний за пределы люфта осложнялся скачком амплитуды на 30% (от  $b=4,05$  до  $b=5,21$ ), в этом случае, как показало моделирование, относительная погрешность изменяется от 12 до 7%, при этом большая погрешность отвечает меньшим значениям аргумента  $x$ . Табл. 2 отвечает системе с поджатием:  $f(x)=\text{sign } x+x$ ,  $H(x^*)=0,5x^*$ , ( $e_0=0,3$ ;  $e_1=0,025$ ). Здесь наибольшая погрешность в 11% наблюдается при  $x=0,301$ , далее с ростом  $x$  уменьшается до 4%.

Результаты определения несимметричной характеристики восстанавливающей силы  $f(x)=10x+2x \text{ sign } x$  представлены в табл. 3. При этом четная составляющая характеристики определялась по последней из формул (2.4), для чего измерялась нулевая гармоника колебаний. Здесь также имеет место общая тенденция — уменьшение относительной погрешности с увеличением определяемой величины.

В табл. 4 представлены результаты моделирования по определению нелинейной характеристики восстанавливающей силы  $f(x)=10x+2 \text{ sign } x$  (характеристика с поджатием) и квадратичного демпфирования:  $H(x^*)=\pi^{-2}x^{*2} \text{ sign } x$ .

Как видно, формулы, полученные на основании обращения улучшенного первого приближения, дают оценку характеристик нелинейных сил с погрешностью, весьма удовлетворительной для многих практических приложений.

В силу этого результаты изложенной теории были положены в основу построения в Институте механики АН УССР лабораторного испытательного комплекса для идентификации натурной механической конструкции [14].



#### ЛИТЕРАТУРА

1. Zavoisky E. Paramagnetic absorption in some salts in perpendicular magnetic fields.— J. of Phys., 1946, v. 10, No. 2, p. 170—173.
2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 410 с.
3. Директор С., Рорер Р. Введение в теорию систем. М.: Мир, 1974. 464 с.
4. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 777 с.
5. Дименгберг М. Ф. Определение нелинейной диссипативной характеристики системы с одной степенью свободы на основании испытаний при вынужденных колебаниях.— Инж. ж. МТТ, 1968, № 2, с. 32—34.
6. Кононенко В. О., Плахтиенко Н. П. Определение характеристик нелинейных элементов колебательных систем из анализа движения.— Прикл. механика, 1969, т. 5, вып. 10, с. 1—7.
7. Агступенас В.-Р. В., Агступенене Р. П. Определение характеристик нелинейных колебательных систем с одной степенью свободы по результатам виброиспытаний.— Научн. тр. вузов ЛитССР. Вибротехника, 1977, № 3 (16), с. 19—25.
8. Плахтиенко Н. П. Об определении параметров неоднозначных характеристик из анализа резонансных колебаний.— Проблемы прочности, 1977, № 7, с. 117—121.
9. Привалов Е. А. Определение нелинейной характеристики редуктора гиросtabilизатора.— Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 3, с. 62—64.
10. Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О. Колебания твердых тел. М.: Наука, 1976. 431 с.
11. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
12. Кононенко В. О., Плахтиенко Н. П. Методы идентификации механических нелинейных систем. Киев: Наукова думка, 1976. 114 с.
13. Положий Г. И. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Киев: Изд-во Киевск. ун-та, 1965. 442 с.
14. Ильченко Н. И., Кононенко В. О., Кононов А. П., Плахтиенко Н. П. Идентификация механической конструкции при резонансных колебаниях.— В кн.: Рассеяние энергии при колебаниях механических систем. Киев: Наукова думка, 1978. 260 с.

Киев

Поступила в редакцию  
25.VI.1980