МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1982

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ РЕАКТИВНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА С МАЛОЙ ТЯГОЙ

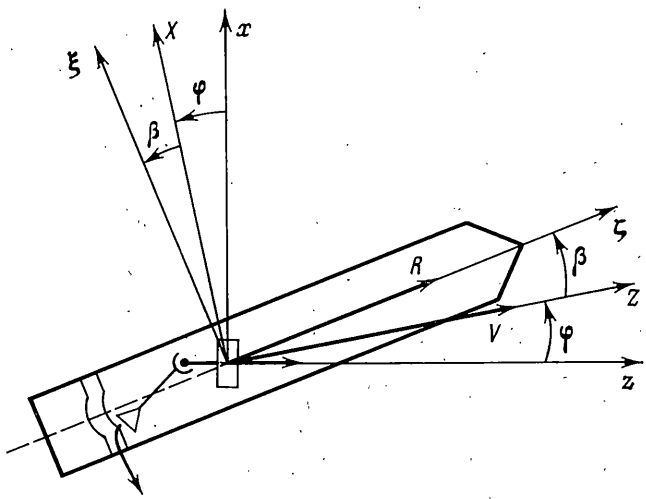
КУХТЕВИЧ С. Е.

Устойчивость вращательного движения неуправляемых (артиллерийских) снарядов при априорно задаваемых траекториях движения их центров масс подробно изучалась в [1–3]. Достаточные условия устойчивости вращательного движения реактивного аппарата с одноканальной системой стабилизации при равномерном и прямолинейном перемещении его центра масс получены в [4].

В публикуемой работе получены достаточные условия устойчивости как вращательного, так и связанного с ним поступательного движения аппарата, аналогичного рассмотренному в [4], в предположении малости реактивной тяги и силы сопротивления воздуха, а также при отсутствии тяги и управляющей силы.

1. Рассмотрим движение осесимметричного летательного аппарата с постоянной массой m, экваториальными моментами инерции A и полярным моментом инерции $C<A$. Введем (см. фиг. 1): (xyz) — систему координат, поступательно движущуюся вместе с центром масс аппарата, (XYZ) — скоростную систему координат (ось Z направлена по скорости $\mathbf{V}$ центра масс, $(\xi\eta\zeta)$ — систему координат, жестко связанную с аппаратом (оси ξ, η, ζ — главные центральные оси инерции аппарата, ось ζ — ось симметрии). Переход от системы (xyz) к системе (XYZ) осуществляется поворотом вокруг оси x на угол θ, переводящим оси x, y, z в оси x, Y, J, и поворотом вокруг оси Y на угол φ, переводящим оси x, Y, J в оси X, Y, Z. Углы конечных поворотов α, β и γ, при помощи которых осуществляется переход от системы (XYZ) к системе $(\xi\eta\zeta)$, являются углами Крылова — Булгакова первого рода.

Система стабилизации аппарата состоит из двухстепенного гироскопа, кинетический момент которого постоянен и направлен вдоль оси z. Гиро-



Фиг. 1

скоп связан с исполнительными органами системы стабилизации так, что они формируют управляющую силу $F_y=F\sin\lambda$, действующую на аппарат по оси ξ и пропорциональную синусу угла λ между осью ζ и проекцией оси z на плоскость $\xi\zeta$. Эта сила вызывает управляющий момент $M_y=-E\sin\lambda$, направленный по оси η (F и E — коэффициенты усиления).

Реактивная тяга R постоянна и направлена по оси ζ. Кроме того, по оси ζ на аппарат действует постоянный закручивающий момент M_ζ° и аэродинамический демпфирующий момент, пропорциональный проекции угловой скорости вращения аппарата на ось ζ.

Силу сопротивления воздуха, лежащую из-за симметрии аппарата в плоскости ζZ, разложим на силу лобового сопротивления N_a, направленную по оси Z, и перпендикулярную ей силу P_a, проекции которой на оси X и Y являются подъемной и боковой силами. Силы N_a и P_a будем считать пропорциональными V^2 ($V=|\mathbf{V}|$) соответственно четной и нечетной функциями угла атаки $\varkappa$ [5]: $N_a=-V^2(N+N_1\varkappa^2+\ldots)$, $P_a=V^2(P\varkappa+P_1\varkappa^3+\ldots)$, $P>0$, $N>0$, $\cos\varkappa=\cos\alpha\cos\beta$. Силу Магнуса, возникающую вследствие вращения аппарата вокруг оси ζ, считаем согласно [5] пренебрежимо малой по сравнению с P_a и N_a.

Сила сопротивления воздуха вызывает аэродинамический маятниковый момент, пропорциональный V^2, являющийся нечетной функцией угла $\varkappa$ и направленный перпендикулярно плоскости ζZ. Его проекции на оси ξ и η суть

$$M_\xi^a=-V^2\sin^{-1}\varkappa\,(K\varkappa+K_1\varkappa^3+\ldots)\,(\sin\alpha\cos\gamma+\sin\beta\cos\alpha\sin\gamma)$$

$$M_\eta^a=-V^2\sin^{-1}\varkappa\,(K\varkappa+K_1\varkappa^3+\ldots)\,(-\sin\alpha\sin\gamma+\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma)$$

Движение аппарата описывается совокупностью уравнений Ньютона и уравнений Эйлера

$$\begin{gathered}
mV\varphi^{\cdot}=P_a\sin^{-1}\varkappa\sin\beta+R\sin\beta+F\sin\lambda\cos\beta\cos\gamma\\
mV\theta^{\cdot}\cos\varphi=P_a\sin^{-1}\varkappa\sin\alpha\cos\beta+R\sin\alpha\cos\beta-F\sin\lambda(\cos\alpha\sin\gamma+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma)\\
mV^{\cdot}=R\cos\alpha\cos\beta+N_a+F\sin\lambda(\sin\alpha\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma)\\
A[(\alpha^{\cdot\cdot}+\theta^{\cdot\cdot}\cos\varphi-\theta^{\cdot}\varphi^{\cdot}\sin\varphi)\cos\beta\cos\gamma-(\alpha^{\cdot}+\theta^{\cdot}\cos\varphi)(\beta^{\cdot}\sin\beta\cos\gamma+\gamma^{\cdot}\cos\beta\sin\gamma)+\\
+(\beta^{\cdot\cdot}+\varphi^{\cdot\cdot}\cos\alpha-\varphi^{\cdot}\alpha^{\cdot}\sin\alpha+\theta^{\cdot\cdot}\sin\varphi\sin\alpha+\theta^{\cdot}\varphi^{\cdot}\cos\varphi\sin\alpha+\theta^{\cdot}\alpha^{\cdot}\sin\varphi\cos\alpha)\sin\gamma+\\
+\gamma^{\cdot}(\beta^{\cdot}+\varphi^{\cdot}\cos\alpha+\theta^{\cdot}\sin\varphi\sin\alpha)\cos\gamma]+(C-A)[-(\alpha^{\cdot}+\theta^{\cdot}\cos\varphi)(\gamma^{\cdot}-\varphi^{\cdot}\sin\alpha\cos\beta+\\
+\theta^{\cdot}\sin\varphi\cos\alpha\cos\beta)\cos\beta\sin\gamma-(\alpha^{\cdot}+\theta^{\cdot}\cos\varphi)^2\cos\beta\sin\beta\sin\gamma+(\gamma^{\cdot}-\varphi^{\cdot}\sin\alpha\cos\beta+\\
+\theta^{\cdot}\sin\varphi\cos\alpha\cos\beta)(\beta^{\cdot}+\varphi^{\cdot}\cos\alpha+\theta^{\cdot}\sin\varphi\sin\alpha)\cos\gamma+(\alpha^{\cdot}+\theta^{\cdot}\cos\varphi)(\beta^{\cdot}+\varphi^{\cdot}\cos\alpha+\\
+\theta^{\cdot}\sin\varphi\sin\alpha)\sin\beta\sin\gamma]=M_\xi^a\\
A[-(\alpha^{\cdot\cdot}+\theta^{\cdot\cdot}\cos\varphi-\theta^{\cdot}\varphi^{\cdot}\sin\varphi)\cos\beta\sin\gamma-(\alpha^{\cdot}+\theta^{\cdot}\cos\varphi)(-\beta^{\cdot}\sin\beta\sin\gamma+\gamma^{\cdot}\cos\beta\cos\gamma)+\\
+(\beta^{\cdot\cdot}+\varphi^{\cdot\cdot}\cos\alpha-\varphi^{\cdot}\alpha^{\cdot}\sin\alpha+\theta^{\cdot\cdot}\sin\varphi\sin\alpha+\theta^{\cdot}\varphi^{\cdot}\cos\varphi\sin\alpha+\theta^{\cdot}\alpha^{\cdot}\cos\alpha\sin\varphi)\cos\gamma-\\
-\gamma^{\cdot}\sin\gamma(\beta^{\cdot}+\varphi^{\cdot}\cos\alpha+\theta^{\cdot}\sin\varphi\sin\alpha)]+(A-C)[(\alpha^{\cdot}+\theta^{\cdot}\cos\varphi)(\gamma^{\cdot}-\varphi^{\cdot}\sin\alpha\cos\beta+\\
+\theta^{\cdot}\sin\varphi\cos\alpha\cos\beta)\cos\beta\cos\gamma+(\gamma^{\cdot}-\varphi^{\cdot}\sin\alpha\cos\beta+\theta^{\cdot}\sin\varphi\cos\alpha\cos\beta)(\beta^{\cdot}+\varphi^{\cdot}\cos\alpha+\\
+\theta^{\cdot}\sin\varphi\sin\alpha)\sin\gamma+(\alpha^{\cdot}+\theta^{\cdot}\cos\varphi)^2\cos\beta\sin\beta\cos\gamma+\\
+(\alpha^{\cdot}+\theta^{\cdot}\cos\varphi)(\beta^{\cdot}+\varphi^{\cdot}\cos\alpha+\theta^{\cdot}\sin\varphi\sin\alpha)\sin\beta\sin\gamma]=M_\eta^a-E\sin\lambda\\
C[\gamma^{\cdot\cdot}-\varphi^{\cdot\cdot}\sin\alpha\cos\beta+\varphi^{\cdot}\beta^{\cdot}\sin\beta\sin\alpha-\varphi^{\cdot}\alpha^{\cdot}\cos\alpha\cos\beta+\theta^{\cdot\cdot}\sin\varphi\cos\alpha\cos\beta+\\
+\theta^{\cdot}\varphi^{\cdot}\cos\varphi\cos\alpha\cos\beta-\theta^{\cdot}\alpha^{\cdot}\sin\varphi\sin\alpha\cos\beta-\theta^{\cdot}\beta^{\cdot}\sin\varphi\cos\alpha\sin\beta+(\alpha^{\cdot\cdot}+\theta^{\cdot\cdot}\cos\varphi-\\
-\theta^{\cdot}\varphi^{\cdot}\sin\varphi)\sin\beta+\beta^{\cdot}(\alpha^{\cdot}+\theta^{\cdot}\cos\varphi)\cos\beta]=M_\zeta^0-k[\gamma^{\cdot}-\varphi^{\cdot}\sin\alpha\cos\beta+\\
+\theta^{\cdot}\sin\varphi\cos\alpha\cos\beta+(\alpha^{\cdot}+\theta^{\cdot}\cos\varphi)\sin\beta]\\
\lambda=\operatorname{arctg}\{[-\sin\gamma(\cos\alpha\sin\theta+\cos\theta\sin\alpha\cos\varphi+\sin\theta\sin\alpha\sin\beta)+\cos\gamma\cos\theta(\sin\varphi\cos\beta+\\
+\sin\beta\cos\varphi\cos\alpha)](\cos\theta\cos\varphi\cos\alpha\cos\beta-\sin\varphi\sin\beta\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta\cos\beta)^{-1}\}
\end{gathered}\tag{1.1}$$

где $k>0$ — коэффициент пропорциональности демпфирующего момента.

Уравнения (1.1) допускают частное решение, соответствующее невозмущенному движению аппарата

$$\alpha_*=\beta_*=\theta_*=\varphi_*=0, \quad \gamma_*=\Omega t$$
$$V_*=\sqrt{\frac{R}{N}}\,\mathrm{th}\left[\frac{\sqrt{NR}}{m}t+\mathrm{const}\right], \quad \Omega=\frac{M_\xi^\circ}{k} \tag{1.2}$$

Проварьируем уравнения (1.1) относительно решения (1.2). Учитывая, что $\delta\alpha=\alpha-\alpha_*\equiv\alpha$, $\delta\beta=\beta-\beta_*\equiv\beta$, $\delta\theta=\theta-\theta_*\equiv\theta$, $\delta\varphi=\varphi-\varphi_*\equiv\varphi$, получим

$$\begin{gathered}
mV_*\varphi^{\cdot}-(PV_*^2+R)\beta-F\cos\gamma_*[-(\alpha+\theta)\sin\gamma_*+(\beta+\varphi)\cos\gamma_*]=0\\
mV_*\theta^{\cdot}-(PV_*^2+R)\alpha+F\sin\gamma_*[-(\alpha+\theta)\sin\gamma_*+(\beta+\varphi)\cos\gamma_*]=0\\
A[-(\alpha^{\cdot\cdot}+\theta^{\cdot\cdot})\sin\gamma_*+(\beta^{\cdot\cdot}+\varphi^{\cdot\cdot})\cos\gamma_*]-C[-(\alpha^{\cdot}+\theta^{\cdot})\Omega\sin\gamma_*+\\
+(\beta^{\cdot}+\varphi^{\cdot})\Omega\cos\gamma_*]+KV_*^2(\alpha\cos\gamma_*+\beta\sin\gamma_*)=0\\
A[-(\alpha^{\cdot\cdot}+\theta^{\cdot\cdot})\sin\gamma_*+(\beta^{\cdot\cdot}+\varphi^{\cdot\cdot})\cos\gamma_*]-C[(\alpha^{\cdot}+\theta^{\cdot})\Omega\cos\gamma_*+\\
+(\beta^{\cdot}+\varphi^{\cdot})\Omega\sin\gamma_*]+KV_*^2(-\alpha\sin\gamma_*+\beta\cos\gamma_*)+\\
+E[-(\alpha+\theta)\sin\gamma_*+(\beta+\varphi)\cos\gamma_*]=0\\
m\delta V^{\cdot}+2NV_*\delta V=0, \quad C\delta\gamma^{\cdot\cdot}+k\delta\gamma^{\cdot}=0
\end{gathered} \tag{1.3}$$

Последние два уравнения в (1.3) имеют экспоненциально убывающие решения $\delta V=d_1\,\mathrm{ch}^{-2}(\sqrt{NR}t/m)$, $\delta\gamma=d_2e^{-kt/C}+d_3$, где d_1, d_2, d_3 — произвольные постоянные.

2. Спроектируем первые два уравнения системы (1.3) на оси ξ и η. Вводя безразмерные параметры

$$t_1=\Omega t, \quad n=\frac{R}{mV_*\Omega}+\frac{PV_*}{m\Omega}, \quad f=\frac{F}{2mV_*\Omega}$$
$$\varepsilon=E/(2A\Omega^2), \quad \nu=K/(A\Omega^2), \quad h=C/A, \quad \mu=\sqrt{NR}/(m\Omega)$$

и новые переменные

$$\left\|\begin{matrix}\chi_1\\ \chi_2\end{matrix}\right\|=S\left\|\begin{matrix}\theta\\ \varphi\end{matrix}\right\|, \quad \left\|\begin{matrix}\psi_1\\ \psi_2\end{matrix}\right\|=S\left\|\begin{matrix}\theta+\alpha\\ \varphi+\beta\end{matrix}\right\|, \quad S=\left\|\begin{matrix}\cos t_1 & \sin t_1\\ -\sin t_1 & \cos t_1\end{matrix}\right\|$$

приведем систему (1.3) к стандартной форме

$$\begin{gathered}
\chi_1^{\cdot}=\chi_2-n(\chi_1-\psi_1), \quad \chi_2^{\cdot}=-\chi_1-n\chi_2+(n+2f)\psi_2\\
\psi_1^{\cdot}=\psi_3, \quad \psi_2^{\cdot}=\psi_4\\
\psi_3^{\cdot}=(2-h)\psi_4-(\nu-1+h)\psi_1+\nu\chi_1\\
\psi_4^{\cdot}=-(2-h)\psi_3-(2\varepsilon+\nu-1+h)\psi_2+\nu\chi_2
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь и далее точки означают производные по безразмерному времени t_1.

Предположим, что тяга R, а также коэффициенты N и P малы по сравнению с остальными величинами, а $F\ll R$. Тогда n, $\mu\ll1$, $n\sim\mu$ — малые параметры, $f\ll n$ — величина второго порядка малости, а $V_*=V_*(\mu t_1)$ — медленно меняющийся параметр. При данных предположениях (2.1) является системой с медленно меняющимися коэффициентами, и ее анализ может быть проведен при помощи метода осреднения.

Полагая $n=\mu=0$, $V_*=\mathrm{const}$, выпишем решение порождающей системы

$$\psi_1=a_1\cos\vartheta_1+a_2\cos\vartheta_2+a_3q_1\cos\vartheta_3$$
$$\psi_2=-p_1a_1\sin\vartheta_1-p_2a_2\sin\vartheta_2+a_3q_2\sin\vartheta_3$$

$$\psi_3=-\omega_1 a_1 \sin\vartheta_1-\omega_2 a_2 \sin\vartheta_2-a_3 q_1 \sin\vartheta_3$$

$$\psi_4=-p_1\omega_1 a_1 \cos\vartheta_1-p_2\omega_2 a_2 \cos\vartheta_2+a_3 q_2 \cos\vartheta_3 \tag{2.2}$$

$$\chi_1=a_3\cos\vartheta_3,\quad \chi_2=-a_3\sin\vartheta_3$$

$$\omega_{1,2}^2=\varepsilon+\nu+1-h+{}^1/_2h^2\mp[\varepsilon^2+(\varepsilon+\nu+{}^1/_4h^2)(2-h)^2]^{1/2}$$

$$p_{1,2}=\frac{\omega_{1,2}^2+1-h-\nu}{\omega_{1,2}(2-h)},\qquad q_1=\frac{\nu(2\varepsilon+\nu-4+2h)}{\nu(\nu-4+2h)+2\varepsilon(\nu-2+h)}$$

$$q_2=-[\nu(\nu-4+2h)]\,[\nu(\nu-4+2h)+2\varepsilon(\nu-2+h)]^{-1}$$

По формулам (2.2) перейдем в системе (2.1) к новым переменным a_i, ϑ_i $(i=1, 2, 3)$.

Разрешая полученные уравнения относительно производных, получим

$$a_i^{\cdot}=\ldots\ (i=1,2,3),\quad \vartheta_1^{\cdot}=\omega_1+\ldots,$$

$$\vartheta_2^{\cdot}=\omega_2+\ldots,\quad \vartheta_3^{\cdot}=1+\ldots \tag{2.3}$$

Здесь точками обозначены члены порядка n и μ. Осредняя левые части уравнений (2.3) по трем быстрым переменным ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 и интегрируя осредненную систему, имеем

$$\langle a_1\rangle=c_1\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^{t_1}\left\{n\left[\frac{q_1p_2\omega_2+q_2}{p_1\omega_1-p_2\omega_2}-\frac{p_1(q_2\omega_2+q_1p_2)}{p_2\omega_1-p_1\omega_2}\right]-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\mu\left[\frac{\omega_1'p_2-\omega_2p_1'}{p_2\omega_1-p_1\omega_2}+\frac{(\omega_1p_1)'}{p_1\omega_1-p_2\omega_2}\right]\right\}dt_1\right\}+O(f)$$

$$\langle a_2\rangle=c_2\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^{t_1}\left\{n\left[\frac{p_2(q_2\omega_1+q_1p_1)}{p_2\omega_1-p_1\omega_2}-\frac{q_1p_1\omega_1+q_2}{p_1\omega_2-p_2\omega_2}\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\mu\left[\frac{\omega_2'p_1-\omega_1p_2'}{p_2\omega_1-p_1\omega_2}+\frac{(\omega_2p_2)'}{p_1\omega_1-p_2\omega_2}\right]\right\}dt_1\right\}+O(f) \tag{2.4}$$

$$\langle a_3\rangle=c_3\exp\left\{\int_0^{t_1}\left\{n\left[-1+\frac{1}{2}(q_1-q_2)\right]\right\}dt_1\right\}+O(f)$$

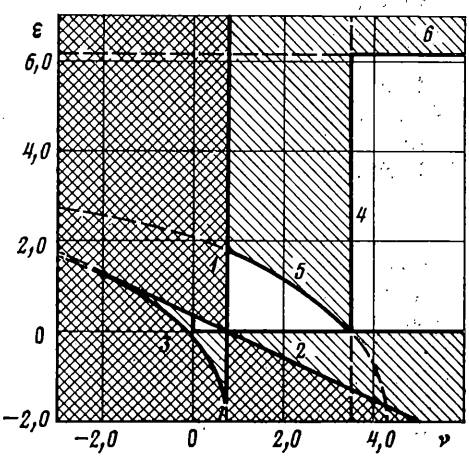
$$\langle\vartheta_1\rangle=\int_0^{t_1}\omega_1dt_1+c_4,\qquad \langle\vartheta_2\rangle=\int_0^{t_1}\omega_2dt_1+c_5,\qquad \langle\vartheta_3\rangle=t_1+c_6$$

$$\langle a_i^{\cdot}\rangle=\frac{1}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}a_i^{\cdot}d\vartheta_1d\vartheta_2d\vartheta_3,\qquad \langle\vartheta_i^{\cdot}\rangle=\frac{1}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\vartheta_i^{\cdot}d\vartheta_1d\vartheta_2d\vartheta_3\ (i=1,2,3)$$

Здесь c_i $(i=1, 2, \ldots, 6)$ — произвольные постоянные, штрихи обозначают производные по медленному времени $\tau=\mu t_1$.

Для экспоненциальной устойчивости тривиального решения осредненной системы (2.1) достаточно, чтобы подынтегральные выражения в первых трех уравнениях (2.4) были отрицательны, а порождающее решение (2.2) носило колебательный характер. В этом случае, в силу независимости ω_1, ω_2 от медленных переменных a_i, из теоремы Н. Н. Боголюбова

о соответствии между квазистатическим решением осредненной системы и решением точной системы уравнений [6] следует экспоненциальная устойчивость тривиального решения системы (2.1), а все характеристические числа уравнений в вариациях (1.3), кроме одного, равного нулю и соответствующего переменной $\delta\gamma$, отрицательны, и в силу теоремы 31 из [7] решение (1.2) системы (1.1) экспоненциально устойчиво по всем переменным, исключая угол γ. Области значений параметров ε, ν и h, при которых решение (2.2) экспоненциально возрастает, являются областями экспоненциальной неустойчивости тривиального решения системы (2.1) и, следовательно, решения (1.2) системы (1.1). Эти области были построены в [4]. Если хотя бы одно подынтегральное выражение в первых трех уравнениях в (2.4) положительно, то тривиальное решение осредненной системы (2.1) экспоненциально неустойчиво и заключения об устойчивости решения (1.2) сделать нельзя.



Фиг. 2

Результаты исследования устойчивости решения (1.2), соответствующего невозмущенному движению аппарата, приведены на фиг. 2, где незаштрихованные области являются областями экспоненциальной устойчивости решения (1.2) при любых достаточно малых значениях параметров n и μ (согласно постановке задачи, n и μ всегда положительны).

Области, заштрихованные двойной штриховкой, являются областями, в которых порождающее решение (2.2) и, следовательно, решение (1.2) экспоненциально возрастают при любых малых n и μ.

Если параметры ε и ν принадлежат областям, заштрихованным одинарной штриховкой, то соответствующим выбором n и μ тривиальное решение осредненной системы (2.1) может быть сделано экспоненциально неустойчивым, что может привести к потере устойчивости решения (1.2). Линии *1—6* на фиг. 2 определяются соотношениями: $\nu=1-h$, $2\varepsilon=1-h-\nu$, $\varepsilon^2+\varepsilon(2-h)^2+(\nu+{}^1/_4h^2)(2-h)^2=0$, $\nu=2(2-h)$, $\varepsilon^2+\varepsilon(2-h)^2-2(2-h)^3+\nu(2-h)^2=0$, $\varepsilon=2(2-h)^2$.

3. Рассмотрим движение аппарата по инерции, т. е. при отсутствии тяги и управляющей силы. В этом случае аппарат аналогичен неуправляемому артиллерийскому снаряду, рассматривавшемуся в [1—3].

Уравнения движения аппарата получаются из уравнений (1.1), если положить в них $R=F=E=0$. Обозначим их (1.1.1). Система (1.1.1) допускает частное решение

$$\alpha_{**}=\beta_{**}=0,\quad \theta_{**}=\theta^\circ,\quad \varphi_{**}=\varphi^\circ,\quad \gamma_{**}=\Omega t,\quad V_{**}=\left(\frac{N}{m}t+\mathrm{const}\right)^{-1} \tag{3.1}$$

где θ°, φ° — произвольные постоянные.

Проварьировав систему (1.1.1) относительно решения (3.1) и проведя преобразования, получим

$$\begin{gathered}\alpha^{\cdot\cdot}+h\beta^{\cdot}+n_1\alpha^{\cdot}+hn_1\beta+\nu\alpha=0\\ \beta^{\cdot\cdot}-h\alpha^{\cdot}+n_1\beta^{\cdot}-hn_1\alpha+\nu\beta=0\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\delta\theta^{\cdot}\cos\varphi^{\circ}-n_1\alpha=0,\quad \delta\varphi^{\cdot}-n_1\beta=0,$$

$$n_1=PV_{**}/m\Omega$$

Уравнения в вариациях для V и γ отделяются и дают экспоненциально убывающие решения.

В сделанных в п. 2 предположениях о малости коэффициентов N и P система (3.2) является системой с малым параметром n_1 и медленно меняющимися коэффициентами, зависящими от медленного времени $\tau_1=\mu_1 t_1$ ($\mu_1=N/m\Omega$).

Исследовав систему (3.2) методом осреднения, получим простые условия экспоненциальной устойчивости тривиального решения осредненной системы (3.2) и, следовательно, экспоненциальной устойчивости решения (3.1) системы (1.1.1) по всем переменным кроме угла γ

$$K>0,\quad N<{}^1/_2P \tag{3.3}$$

Условия (3.3) согласуются с условиями асимптотической устойчивости вращательного движения снаряда при равномерном и прямолинейном перемещении его центра масс ($K>0$), которое было получено Н. Г. Четаевым [3] в предположении, что вращательное движение не влияет на движение центра масс снаряда.

Автор благодарит В. Ф. Журавлева за постановку задачи и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Майевский Н. В.* О влиянии вращательного движения на полет продолговатых снарядов в воздухе. СПб, 1865. 89 с.
2. *Крылов А. Н.* О вращательном движении продолговатого снаряда во время полета. Л.: Изд-во АН СССР, 1929. 367 с.
3. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
4. *Кухтевич С. Е.* Об устойчивости движения относительно центра масс летательного аппарата с одноканальной системой стабилизации.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 3, с. 102—106.
5. *Дмитриевский А. А., Кошевой В. Н.* Основы теории полета ракет. М.: Воениздат, 1964. 311 с.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 410 с.
7. *Озиранер А. С., Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных.— ПММ, т. 36, в. 2, 1972, с. 364—384.

Москва

Поступила в редакцию
30.I.1981