МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1982

УДК 531.55

О ЗАДАЧЕ ПОЛЕТА ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА НА МАКСИМАЛЬНУЮ ДАЛЬНОСТЬ

БОРЗОВ В. И., ИГОНИНА Т. Р.

При исследовании задач о полете летательного аппарата на максимальную дальность применяются различные математические модели движения [1, 2, 5]. Вопрос о применимости выбранной математической модели при этом, как правило, не обсуждается. В статье на примере движения центра масс летательного аппарата в вертикальной плоскости рассматриваются особенности, возникающие при решении этой оптимальной задачи. Для ее решения предлагается использовать методы теории дифференциальных уравнений с сингулярными возмущениями [4]. Рассматриваются некоторые вопросы ее применимости.

Пренебрегая кривизной поверхности Земли и ее вращением, уравнения движения запишем в виде [1]

$$m\frac{dV}{dt}=-X-mg\sin\theta+P,\quad mV\frac{d\theta}{dt}=Y-mg\cos\theta$$

$$dm/dt=-\varkappa P,\quad dL/dt=V\cos\theta,\quad dH/dt=V\sin\theta \tag{1}$$

Здесь V — скорость полета по отношению к Земле, θ — угол наклона траектории (угол между вектором скорости и горизонтальной плоскостью), L — дальность и H — высота полета, X — сила сопротивления, Y — подъемная сила, mg — сила тяжести, P — тяга двигателей, $\varkappa$ — коэффициент пропорциональности. Для простоты будем считать тягу двигателей заданной функцией времени. В этом случае можно найти $m=m(t)$.

Аэродинамические силы X, Y записываются так: $X={}^1/_2\rho V^2Sc_x$, $Y={}^1/_2\rho V^2Sc_y$ [1], где ρ и S — соответственно плотность воздуха и характерная площадь аппарата (например, площадь крыльев), c_x и c_y — безразмерные аэродинамические коэффициенты сил. Для этих коэффициентов существует соотношение $c_x=c_x^0+Bc_y^2$, называемое полярой летательного аппарата. В общем случае c_x^0 и B являются функциями параметров движения. Чаще всего рассматривается $c_x^0=c_x^0(M)$, $B=B(M)$, $M=V/a$ (a — скорость звука). Однако при полете со скоростью меньше скорости звука эти функции близки к постоянным. Поэтому в дальнейшем для простоты будем считать их постоянными. Также будем считать постоянной величиной плотность воздуха ρ.

В систему уравнений (1) входят параметры разной физической природы. Осуществим переход к безразмерным переменным и безразмерному времени посредством введения соответствующих масштабов по формулам $V=V^*v$, $L=D^*l$, $H=D^*h$, $\tau T^*=t$. Масштабы V^*, D^*, T^* выберем таким образом, чтобы безразмерные величины v, l, h и безразмерное время τ были бы величинами порядка единицы. Скорость полета современных аппаратов порядка 200—300 м/с. Поэтому можно взять $V^*=100$ м/с. Если рассматривается полет на расстояние порядка тысячи километров, то можно взять $D^*=10^5$. Масштаб времени определится из соотношения $T^*\sim D^*/V^*$. Возьмем $T^*=10^3$ с.

В результате система уравнений (1) запишется в виде

$$\mu\frac{dv}{d\tau}=-c_x a v^2-\sin\theta+p,\quad \mu\frac{d\theta}{d\tau}=c_y a v-\frac{\cos\theta}{v}$$
$$\frac{dh}{d\tau}=v\sin\theta,\quad \frac{dl}{d\tau}=v\cos\theta,\quad a=\frac{\rho(V^*)^2 S}{2mg},\tag{2}$$
$$p=\frac{P}{mg},\quad \mu=\frac{V^*}{gT^*}$$

Для летательного аппарата величина $p\sim 1$, величина a тоже порядка единицы. Действительно, $a=Y^*/c_y mg$, но подъемная сила примерно равна весу, а $c_y\sim 1$. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что $\mu\sim 10^{-2}$.

При заданной тяге двигателей управление движением центра масс аппарата осуществляется соответствующим изменением аэродинамического коэффициента подъемной силы c_y, что достигается изменением ориентации его корпуса по отношению к вектору скорости. Таким образом, в качестве управления будем рассматривать $u=c_y$.

Поставим следующую оптимальную задачу: при каком изменении u дальность полета при заданной тяге двигателей за заданное время T будет максимальной. Воспользуемся принципом максимума Понтрягина. В качестве функционала возьмем $J=-L$. Функция Гамильтона имеет вид

$$H=\frac{1}{\mu}[-(c_x^\circ+Bu^2)av^2-\sin\theta+p]\psi_1+\frac{1}{\mu}\left(uav-\right.$$
$$\left.-\frac{\cos\theta}{v}\right)\psi_2+v\sin\theta\psi_3+v\cos\theta\psi_4$$

Из условия $\partial H/\partial u=0$ можно найти значение управления $u=\psi_2/(2Bv\psi_1)$, доставляющее экстремум функции H. Поскольку $\partial^2H/\partial u^2=-2Bav^2\psi_1/\mu$, то при $\psi_1>0$ функция H имеет максимум. Сопряженная система уравнений записывается в виде

$$\frac{d\psi_1}{d\tau}=\frac{2\psi_1}{\mu}(c_x^\circ+Bu^2)av-\frac{\psi_2}{\mu}\left(ua+\frac{\cos\theta}{v^2}\right)-\psi_3\sin\theta-\psi_4\cos\theta$$
$$\frac{d\psi_2}{d\tau}=\frac{\psi_1}{\mu}\cos\theta-\frac{\psi_2}{\mu}\frac{\sin\theta}{v}-v\cos\theta\psi_3+v\sin\theta\psi_4$$
$$d\psi_3/d\tau=0,\quad d\psi_4/d\tau=0$$

и из условия трансверсальности можно найти $\psi_4=1$.

Сделаем замену переменных $\psi_1=\mu\xi_1$, $\psi_2=\mu\xi_2$, $\psi_3=\xi_3$, $\psi_4=\xi_4$. Таким образом, для решения оптимальной задачи необходимо решить следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\mu\frac{dv}{d\tau}=-(c_x^\circ+Bu^2)av^2-\sin\theta+p$$
$$\mu\frac{d\theta}{d\tau}=uav-\frac{\cos\theta}{v},\quad \frac{dh}{d\tau}=v\sin\theta,\quad \frac{dl}{d\tau}=v\cos\theta\tag{3}$$
$$\mu\frac{d\xi_1}{d\tau}=2\xi_1(c_x^\circ+Bu^2)av^2-\xi_2\left(au+\frac{\cos\theta}{v^2}\right)-\xi_3\sin\theta-\cos\theta$$
$$\mu\frac{d\xi_2}{d\tau}=\xi_1\cos\theta-\xi_2\frac{\sin\theta}{v}-\xi_3 v\cos\theta+v\sin\theta$$

$\xi_3=\text{const}$, $u=\xi_2/(2Bv\xi_1)$, с краевыми условиями

$$v(0)=v_0,\ \theta(0)=\theta_0,\ h(0)=h_0,\ l(0)=0,\ v(T)=v_k,\ \theta(T)=\theta_k,\ h(T)=h_k \quad (4)$$

Исследование задачи о полете на максимальную дальность свелось к исследованию краевой задачи (3), (4). При принятом предположении о том, что ρ и g не зависят от высоты полета, переменные h и l могут быть найдены квадратурами, если найдены v и θ. Вследствие существенной нелинейности системы уравнений (3) найти ее аналитическое решение не представляется возможным. Для исследования могут быть использованы численные методы [2, 3]. Однако их применение вызывает существенные трудности при достаточно большом времени полета ($\tau\sim1$). Покажем это на примере применения метода квазилинеаризации.

Рассмотрим частный случай — полет на максимальную дальность при планировании. При этом $p=0$ и конечное время T определяется как время прихода на многообразие $v(T)=v_k$, $\theta(T)=\theta_k$, $h(T)=h_k$. Из условия трансверсальности следует $\psi_4=1$ и $H=0$. Последнее условие позволяет исключить переменную $\psi_3=\xi_3$ из уравнений, в результате система (3) принимает вид

$$\begin{gathered}
\mu\frac{dv}{d\tau}=-(c_x{}^\circ+Bu^2)av^2-\sin\theta,\quad u=\frac{\xi_2}{2Bv\xi_1}\\
\mu\frac{d\theta}{d\tau}=uav-\frac{\cos\theta}{v},\quad \frac{dh}{d\tau}=v\sin\theta,\quad \frac{dl}{d\tau}=v\cos\theta\\
\mu\frac{d\xi_1}{d\tau}=\xi_1\left[(c_x{}^\circ+Bu^2)av-\frac{\sin\theta}{v}\right]-\frac{2\cos\theta}{v^2}\xi_2\\
\mu\frac{d\xi_2}{d\tau}=-\xi_1\operatorname{ctg}\theta(c_x{}^\circ+Bu^2)av^2+\xi_2\left(uav\operatorname{ctg}\theta-\frac{1}{v\sin\theta}\right)+\frac{v}{\sin\theta}
\end{gathered}\qquad(5)$$

В качестве начального приближения возьмем решение системы (5) при $\mu=0$. В этом случае динамические уравнения движения центра масс аппарата обращаются в уравнения равновесия сил в проекциях на касательную и нормаль к траектории. Соответствующие этим переменным сопряженные уравнения также обращаются в равенства. Обозначим это решение индексом m. Из системы алгебраических уравнений найдем

$$\begin{gathered}
u_m=\sqrt{c_x{}^\circ/B},\quad \operatorname{tg}\theta_m=-2Bu_m=-2\sqrt{c_x{}^\circ B}\\
v_m=\sqrt[4]{B/[a^2c_x{}^\circ(1+4c_x{}^\circ B)]},\quad \xi_{1m}=-v_m\operatorname{ctg}\theta_m,\quad \xi_{2m}=v_m{}^2
\end{gathered}\qquad(6)$$

и из оставшихся кинематических уравнений получим

$$T_m=(h_k-h_0)/(v_m\sin\theta_m),\quad L_m=(h_0-h_k)/2\sqrt{c_x{}^\circ B}\qquad(7)$$

Решение (6) имеет определенный физический смысл. В динамике полета известна функция $K=c_y/c_x=u/(c_x{}^\circ+Bu^2)$, называемая качеством летательного аппарата. Качество полета есть функция управления. Максимальное значение качества достигается при $c_y=u_m=(c_x{}^\circ/B)^{1/2}$ и равно $K_m=-\operatorname{ctg}\theta_m$. Максимальная дальность полета при планировании в данном приближении есть $L_m=(h_0-h_k)K_m$. Полученное решение удовлетворяет начальным и конечным условиям по h и не удовлетворяет по переменным v и θ. Согласно методу квазилинеаризации, составим уравнения в вариациях, полагая $v=v_m+x_1$, $\theta=\theta_m+x_2$, $\xi_1=\xi_{1m}+x_3$, $\xi_2=\xi_{2m}+x_4$. Кинематические уравнения могут при этом рассматриваться отдельно. Уравнения в вариациях запишем в матричном виде $dx/d\tau=Ax$, где матрица A находится известным способом. Краевые условия для уравнения в вариациях имеют вид $x_1(0)=v_0-v_m$, $x_2(0)=\theta_0-\theta_m$, $x_1(T)=v_k-v_m$, $x_2(T)=\theta_k-\theta_m$. Поскольку при движении с максимальным качеством переменные v_m, θ_m, ξ_{1m}, ξ_{2m} стационарны, то матрица A постоянна. Характеристическое уравнение системы в вариациях имеет вид

$$\lambda^4-\lambda^2\frac{9\sin^2\theta_m}{v_m{}^2\mu^2}+\frac{4}{v_m{}^4\mu^4}=0 \qquad (8)$$

Корни его определяются по формуле

$$\lambda_j=\pm\frac{1}{v_m\mu\sqrt{2}}(9\sin^2\theta_m\pm\sqrt{81\sin^4\theta_m-16})^{1/2} \qquad (j=1,2,3,4)$$

При $K_m>\sqrt{5}/4$ имеет место неравенство $81\sin^4\theta_m-16<0$. Для современных аппаратов величина K_m значительно больше единицы. С учетом этого корни характеристического уравнения можно записать в виде

$$\lambda_j=\pm\frac{1}{2\mu v_m}(\sqrt{4+9\sin^2\theta_m}\pm i\sqrt{4-9\sin^2\theta_m}) \qquad (j=1,2,3,4) \qquad (9)$$

Из (9) следует, что в процессе решения системы в вариациях приходится использовать величины вида $e^{\tau/(\mu v_m)}$, $e^{-\tau/(\mu v_m)}$. Поскольку $v_m\sim1$ и $\mu\sim10^{-2}$, то при достаточно больших значениях времена полета $(\tau\sim1)$ в процессе решения необходимо учитывать величины, отношение которых порядка e^{100}. Возникающие при этом вычислительные погрешности приводят к расходимости численных методов. Решение задачи о полете на максимальную дальность при планировании для небольших значений τ в более общей постановке было получено И. А. Крыловым и Ф. Л. Черноусько методом последовательных приближений [2]. Не следует думать, что указанные затруднения присущи тому или иному численному методу. Причиной указанных затруднений является наличие существенно отличающихся по временным характеристикам быстрых и медленных движений в системе и необходимость их учета на большом интервале времени. Системы (3), (5) можно рассматривать как системы дифференциальных уравнений с сингулярными возмущениями и для их исследования использовать соответствующие методы решения краевых задач, разработанные в [4]. Уравнения движения аппарата в рассматриваемом случае могут быть записаны в виде

$$\mu dz/d\tau=F(z,y),\quad dy/d\tau=f(z,y) \qquad (10)$$

где $y=(h,l)^T$, $z=(v,\theta,\xi_1,\xi_2)^T$ — вектор-столбцы соответственно медленных и быстрых переменных.

При выполнении определенных условий [4], которые имеют место для систем (3), (5), решение краевой задачи (10) при следующих краевых условиях: $v(0)$, $\theta(0)$, $h(0)$, $v(T)$, $\theta(T)$, $h(T)$, ищется в виде асимптотических разложений

$$\begin{aligned} y(\tau)&=y_0(\tau)+\mu y_1(\tau)+\ldots+\Pi_0y(\tau_0)+\mu\Pi_1y(\tau_0)+\ldots\\ &\ldots+Q_0y(\tau_1)+\mu Q_1y(\tau_1)+\ldots \qquad (11)\\ z(\tau)&=z_0(\tau)+\mu z_1(\tau)+\ldots+\Pi_0z(\tau_0)+\mu\Pi_1z(\tau_0)+\ldots\\ &\ldots+Q_0z(\tau_1)+\mu Q_1z(\tau_1)+\ldots\\ \tau_0&=\tau/\mu,\quad \tau_1=(\tau-T)/\mu T\end{aligned}$$

Здесь разложения $\Pi x(\tau_0,\mu)$, $Qx(\tau_1,\mu)$ представляют пограничные ряды в окрестности $\tau=0$ и $\tau=T$ соответственно. Члены рядов $y_0(\tau)$, $z_0(\tau)$ определяются как решения вырожденной системы $F(y_0,z_0)=0$, $dy_0/d\tau=f(y_0,z_0)$ с краевыми условиями $h(0)$, $h(T)$, $l(0)$, получающейся из (10) при $\mu=0$. Вырожденная система уравнений часто используется при исследовании задач о полете на максимальную дальность [2, 5]. Иногда такой подход называют энергетическим [5].

Построение регулярной части разложения (11) $y(\tau, \mu)$, $z(\tau, \mu)$ позволяет с необходимой степенью точности по μ удовлетворить граничным условиям по медленным переменным задачи. Построение части асимптотических разложений в виде $y(\mu, \tau)+\Pi y(\tau_0, \mu)$, $z(\tau, \mu)+\Pi z(\tau_0, \mu)$ позволяет описать процесс перехода из заданных начальных значений по медленным и быстрым переменным в окрестность движения, описываемого регулярной частью. Аналогично посредством построения $y(\tau, \mu)+Qy(\tau_1, \mu)$, $z(\tau, \mu)+Qz(\tau_1, \mu)$ можно описать процесс перехода из окрестности движения, описываемого регулярной частью асимптотического разложения, в конечную точку. Алгоритм построения пограничных функций в общем случае изложен в [4].

Исследования по построению решения исходной системы в виде асимптотических разложений (11) в полном объеме здесь не приводятся.

Рассматриваемая задача носит методический характер. В ней опущены существенные для численных результатов некоторые обстоятельства движения (зависимость плотности воздуха от высоты, зависимость аэродинамических коэффициентов от параметров движения и т. д.). Все это сделано для более ясного изложения принципиальных вопросов, связанных с наличием быстрых и медленных движений в системе, и может быть учтено при исследовании конкретной задачи.

Отметим, что величина малого параметра зависит от длительности полета. С увеличением длительности (а значит, и дальности полета) возрастает масштаб времени T^*. Следовательно, параметр $\mu = V^*/gT^*$ уменьшается и при этом относительное влияние изменения дальности вследствие переходного процесса по быстрым переменным (влияние пограничных функций) также уменьшается. Этим обстоятельством можно воспользоваться для обоснования применимости тех или иных математических моделей движения летательного аппарата в задачах о полете на максимальную дальность.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Остославский И. В., Стражева И. В.* Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1963. 430 с.
2. *Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В.* Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. 238 с.
3. *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968. 183 с.
4. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
5. *Bryson A. E., Desai M. N.* Energy-state approximation in performance optimisation of supersonic aircraft.— J. Aircraft., 1969, v. 6, No. 6, p. 481—488.

Москва

Поступила в редакцию
22.XII.1980