

- transient lateral pressures.—AIAA Journal, 1968, v. 6, No. 4, p. 589–598.— Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1968, № 4, с. 16–27.
9. *Малый В. И.* Потеря устойчивости пластической оболочки при обжатии сильным импульсом давления.—Тр. VIII Всес. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1973, с. 167–171.
 10. *Goodier J. N., McIvor I. K.* The elastic cylindrical shell under nearly uniform radial impulse.—Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1964, v. 31, No. 2, p. 259–266.— Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., 1964, т. 31, № 2, с. 111–119.
 11. *Florence A. L.* Buckling of viscoplastic cylindrical shells due to impulsive loading.—AIAA Journal, 1968, v. 6, No. 3, p. 532–537.— Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1968, № 3, с. 185–191.
 12. *Скурлатов Э. Д.* Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек под действием подвижных нагрузок.—Тр. Всес. VIII конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1973, с. 565–568.
 13. *Иванов А. Г., Клещевников О. А., Минеев В. Н., Тюнькин Е. С.* Потеря устойчивости стальной трубы при коротком осесимметричном ударе.—Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 5, с. 172–174.
 14. *Дерибас А. А.* Физика упрочнения и сварки взрывом. Новосибирск: Наука, 1972. 221 с.
 15. *Hoggat C. R., Recht R. F.* Stress-strain data obtained at high rates using expanding ring.—Expri. Mech., 1969, v. 9, No. 10, p. 441–448.
 16. *Иванов А. Г., Силицын В. А., Новиков С. А.* Масштабные эффекты при динамическом разрушении конструкций.—Докл. АН СССР, 1970, т. 194, № 2, с. 316–317.
 17. *Иванов А. Г., Минеев В. Н.* О масштабном критерии при хрупком разрушении конструкций.—Докл. АН СССР, 1975, т. 220, № 3, с. 575–578.
 18. *Иванов А. Г., Минеев В. Н.* О масштабных эффектах при разрушении.—Физика горения и взрыва, 1979, № 5, с. 70–95.

Москва

Поступила в редакцию
2.IV.1979

УДК 539.3.534.1

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

ЛОКОЩЕНКО А. М., ШЕСТЕРИКОВ С. А.

Подробный обзор ряда подходов к решению задачи устойчивости и потери несущей способности цилиндрических оболочек, выполненных из упругого материала, приведен в [1]. В данной работе изложен новый приближенный метод решения этой задачи, позволяющий получить оценки и для случая, когда материал оболочки подчиняется соотношениям нелинейной ползучести. Этим методом получено также решение для оболочек из линейно и нелинейно-упругого материала. Сравнение решения для линейно-упругой оболочки с известными решениями позволяет оценить точность развиваемого метода.

1. Общие соотношения. Рассмотрим длинную круговую цилиндрическую оболочку толщиной H и радиусом поперечного сечения R_0 , находящуюся под действием изгибающего момента M_0 . Делаются предположения о том, что реальное сечение оболочки можно заменить на двухслойное и поперечное сечение может быть представлено в виде двух дуг окружностей [2]. Обозначим расстояние между центрами слоев, полученных при замене реальной оболочки толщины H на идеализованную двухслойную, $2h$, а толщину каждого слоя — δ . Согласно [3], для материала со степенным законом деформирования $\epsilon \sim \sigma^n$ параметры двухслойной оболочки приняты следующими: $\delta = H/2$, $2h = (n/(2n+1))^{1/n} H$, $q = n/(n+1)$.

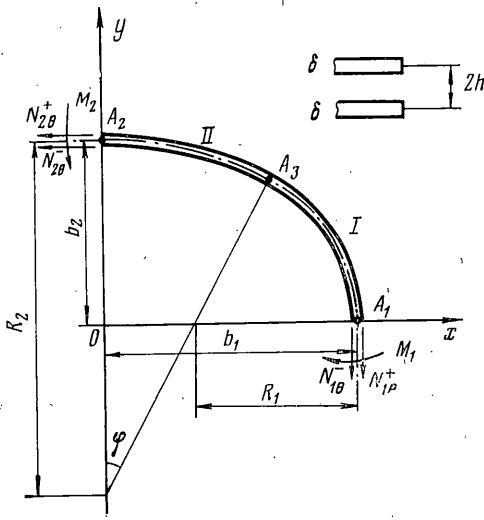
Значения всех параметров на наружном слое оболочки обозначим верхним индексом (+), значения на внутреннем слое — верхним индексом (—).

Поперечное сечение нейтральной поверхности оболочки имеет две оси симметрии Ox , Oy , поэтому можно рассматривать только одну четверть этого сечения — кривую $A_1A_3A_2$ (фиг. 1). Принимается следующая геометрическая гипотеза: кривая $A_1A_3A_2$ в процессе деформирования оболочки все время состоит из двух круговых дуг равной длины A_1A_3 и A_2A_3 , соответствующих радиусам R_1 и R_2 и центральным углам $(0,5\pi - \varphi)$ и φ . Использование этой гипотезы позволяет определить радиусы R_1 и R_2 и расстояния до максимально и минимально удаленных точек сечения $OA_1 = b_1$ и $OA_2 = b_2$:

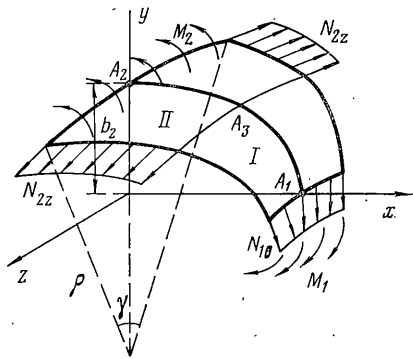
$$R_1 = 0,5\pi R_0 (\pi - 2\varphi)^{-1}, \quad R_2 = 0,25\pi R_0 \varphi^{-1}, \quad b_1 = R_1 + (R_2 - R_1) \sin \varphi, \quad b_2 = R_2 - (R_2 - R_1) \cos \varphi \quad (1.1)$$

а также все характеристики деформированного состояния через один параметр — угол φ . При изгибе оболочки изменением длины дуги $A_1A_3A_2$ в поперечном сечении можно пренебречь.

Рассмотрим участок оболочки, ограниченный двумя поперечными сечениями на расстоянии l , которые после деформации составляют двугранный угол γ . Радиус кривизны тороида ρ равен l/γ . Четвертая часть рассматриваемого участка оболочки показана на фиг. 2. Она состоит из областей I и II, разделенных образующей, проходящей через точку A_3 . Ниже параметры напряженно-деформированного состояния, относящиеся к области I, имеют первый индекс I, а параметры области II — первый индекс 2. Для простоты предполагается кусочно-постоянный характер изменения продольных нормальных усилий вдоль поперечного сечения, т.е. принимается, что все образующие области II воспринимают одинаковые погонные растягивающие усилия N_{2z} , а в области I продольные усилия N_{1z} всюду равны нулю. Распределение усилий N_{2z} вдоль всего поперечного сечения симметрично относительно плоскости yz и антисимметрично относительно плоскости xz . Напряженное состояние рассматриваемого на фиг. 2 участка оболочки определяется усилиями (на единицу длины) $N_{1\theta} = N_{1\theta}^+ + N_{1\theta}^-$, $N_{2\theta} = N_{2\theta}^+ + N_{2\theta}^-$ и



Фиг. 1



Фиг. 2

N_{2z} и изгибающими моментами (на единицу длины) M_1 и M_2 . Из статических условий получаем следующие уравнения:

$$M_1 = (N_{10}^+ - N_{10}^-)h, \quad M_2 = (N_{20}^+ - N_{20}^-)h, \quad N_{10}^\pm = \delta\sigma_{1\theta}^\pm, \quad N_{20}^\pm = \delta\sigma_{2\theta}^\pm, \quad N_{2z}^\pm = \delta\sigma_{2z}^\pm \quad (1.2)$$

$$N_{20}^+ + N_{20}^- = 0, \quad l(N_{10}^+ + N_{10}^-) + 0,25\pi R_0\gamma(N_{2z}^+ + N_{2z}^-) = 0 \quad (1.3)$$

$$M_2(l + \gamma b_2) - M_1l - (N_{10}^+ + N_{10}^-)lb_1 = (N_{2z}^+ + N_{2z}^-)\gamma R_2^2(1 - \cos\varphi)$$

$$M_0 = 4(N_{2z}^+ + N_{2z}^-)R_2[R_2 \sin\varphi - (R_2 - R_1)\varphi \cos\varphi] \quad (1.4)$$

Величины деформаций $\epsilon_{1\theta}^\pm$ в области I и величины продольной ϵ_{2z}^\pm и поперечной $\epsilon_{2\theta}^\pm$ деформаций в области II таковы:

$$\epsilon_{1\theta}^\pm = (\epsilon_{1\theta}^\pm \kappa_1 h), \quad \epsilon_{2\theta}^\pm = (\epsilon_{2\theta}^\pm \kappa_2 h), \quad \epsilon_{2z}^\pm = (b_2 \pm h) / \rho \quad (1.5)$$

$$\kappa_1 = (1/R_1 - 1/R_0) = (\pi - 4\varphi) / \pi R_0, \quad \kappa_2 = (1/R_2 - 1/R_0) = -\kappa_1$$

Для решения задачи необходимо дополнить статические и геометрические условия физическими соотношениями, характеризующими связь напряжений и деформаций в материале. Ниже приведены решения задач о деформировании оболочки для трех различных типов физических соотношений, характеризующих материал оболочки.

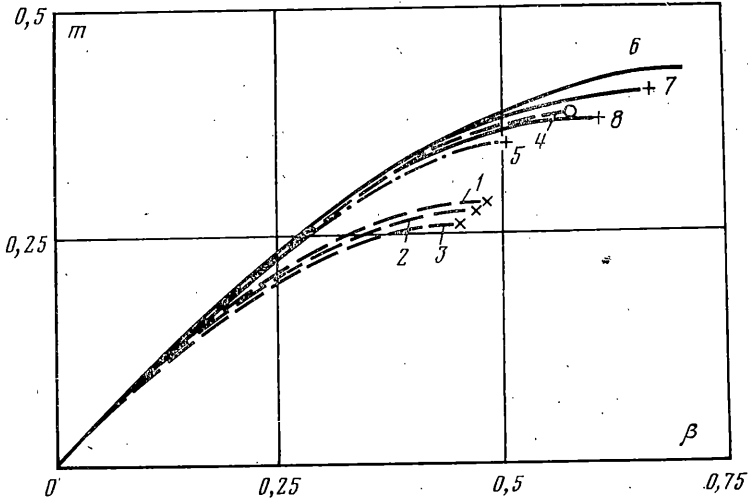
2. Линейно-упругий материал. В любом сечении области I существует одноосное напряженное состояние $\sigma_{1\theta}^\pm = E(\epsilon_{1\theta}^\pm \kappa_1 h)$. Сечение A_2 , как и любое сечение области II, при учете обычного в теории оболочек допущения $\sigma_r^\pm = 0$ находится в плоском напряженном состоянии. Согласно закону Гука, имеем

$$\sigma_{2z}^\pm = E(\epsilon_{2z}^\pm + \nu\epsilon_{2\theta}^\pm) / (1 - \nu^2), \quad \sigma_{2\theta}^\pm = E(\epsilon_{2\theta}^\pm + \nu\epsilon_{2z}^\pm) / (1 - \nu^2)$$

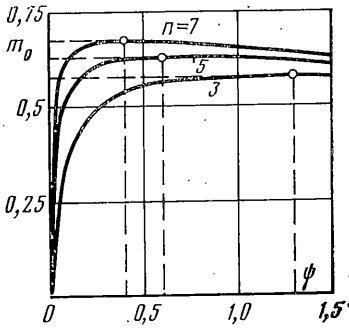
Введем безразмерные параметры изгибающего момента и кривизны

$$m = \sqrt{1,5(1 - \nu^2)} M_0 / (\pi E H^2 R_0), \quad \beta = \sqrt{1,5(1 - \nu^2)} R_0^2 / (H \rho)$$

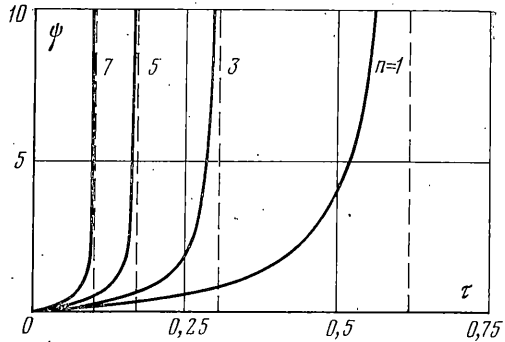
В результате преобразований можно определить нелинейную связь между изгибающим моментом m и кривизной β оси тонкой цилиндрической оболочки ($H/R_0 \ll$



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

$\ll 1$), выраженную через параметр φ :

$$m = \beta \frac{4R_2 b_2}{\pi R_0^3} [R_2 \sin \varphi - (R_2 - R_1) \varphi \cos \varphi], \quad \beta^2 = \frac{(2 - \nu^2) \kappa_1 R_0^4}{2l[\pi R_0 b_4 - 4R_2^2(1 - \cos \varphi)]}$$

При любом значении коэффициента Пуассона существует максимально допустимое значение изгибающего момента m_* , которое выдерживает рассматриваемая упругая оболочка. Дальнейший изгиб оболочки сопровождается уменьшением изгибающего момента.

Зависимость $m(\beta)$ для $\nu=0; 0,3$ и $0,5$ приводится на фиг. 3 (кривые 1-3). Для сравнения на фиг. 3 приводятся кривые $m(\beta)$, полученные в [4] (кривая 4), в [5] (кривая 5) и в [6] (кривые 6-8 соответствуют $\nu=0; 0,3, 0,5$).

Анализ напряженно-деформированного состояния несжимаемой оболочки (при $\nu=0,5$) в предельном состоянии показывает, что деформации $\varepsilon_{2\theta^-}$ и ε_{2r^+} по абсолютной величине на порядок меньше остальных компонент тензора деформации, поэтому в дальнейшем для простоты можно считать их равными нулю.

3. Нелинейно-упругий несжимаемый материал. Пусть интенсивности σ_u и ε_u связаны между собой степенной зависимостью

$$\varepsilon_u = B \sigma_u^n \quad (n \geq 1), \quad \sigma_u = (1/\sqrt{2}) \sqrt{(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + \sigma_\theta^2 + \sigma_z^2},$$

$$\varepsilon_u = (\sqrt{2}/3) \sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2}$$

а компоненты девиаторов напряжений и деформаций пропорциональны

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} B \sigma_u^{n-1} [\sigma_{ij} - (\sigma_\theta + \sigma_z)/3] \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (3.1)$$

Принимаем

$$\varepsilon_{2\theta^-} = \varepsilon_{2r^+} = 0 \quad (3.2)$$

Введем обозначение $\sigma_{zz}^+ = \omega > 0$. С помощью соотношений (3.1), (3.2) можно все компоненты напряженного состояния выразить через ω :

$$\sigma_{zz}^- = 2\omega, \quad \sigma_{2\theta}^+ = -\omega, \quad \sigma_{2\theta}^- = \omega, \quad \sigma_{2u}^\pm = \sqrt{3}\omega \quad (3.3)$$

Деформация внешнего слоя в области II согласно (3.1) такова:

$$\varepsilon_{2\theta}^+ = 1/2 B (\sigma_{2u}^+)^{(n-1)} (2\sigma_{2\theta}^+ - \sigma_{zz}^+) = -3^{0,5(n+1)} B \omega^n / 2 \quad (3.4)$$

При помощи (1.5), (3.2) и (3.4) определяется связь ω и $\psi = (R_2/R_0) - 1$:

$$\omega = \left[3^{-0,5(n+1)} \frac{4h}{B} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_2} \right) \right]^{1/n} = \left[3^{-0,5(n+1)} \frac{4h\psi}{BR_0(1+\psi)} \right]^{1/n} \quad (3.5)$$

Выразим связь между изгибающим моментом M_0 и кривизной оболочки $1/\rho$. Подставляя (1.1) и (3.5) в (1.4), получим

$$\frac{2}{\sqrt{3} \pi H R_0^2} \left(\frac{\sqrt{3} B R_0}{4h} \right)^{1/n} M_0 = m_0 = \psi^{1/n} (1+\psi)^{(1-1/n)} \left[\frac{\sin \varphi}{\varphi} - \frac{2\psi \cos \varphi}{(1+2\psi)} \right] \quad (3.6)$$

$$\varphi = 0,25\pi / (1+\psi)$$

Для определения кривизны оси тороида воспользуемся уравнениями (3.4) и (3.5):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_{2z}}{b_2} = \frac{2h\psi}{R_0^2 (1+\psi)^2} \left[1 - \frac{2\psi}{(1+2\psi)} \cos \frac{\pi}{4(1+\psi)} \right]^{-1} \quad (3.7)$$

Совместное решение системы двух нелинейных алгебраических уравнений (3.6) и (3.7) позволяет найти зависимость кривизны $1/\rho$ оси оболочки от величины приложенного изгибающего момента. Анализ системы показывает, что при любом h существует максимальное значение изгибающего момента m_0 , которое способна выдержать цилиндрическая оболочка. Зависимость $m_0(\psi)$, определяемая согласно (3.6), приведена для различных значений показателя n на фиг. 4.

4. **Материал, характеризующийся установившейся ползучестью.** Здесь рассматривается чистый изгиб несжимаемой цилиндрической оболочки, материал которой подчиняется условию установившейся ползучести. Пусть компоненты тензоров скоростей деформаций ползучести p_{ij} и напряжений σ_{ij} подчиняются следующим соотношениям:

$$p_{ij} = 3/2 A \sigma_u^{(n-1)} [\sigma_{ij} - (\sigma_\theta + \sigma_z)/3], \quad p_u = A \sigma_u^n \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4.1)$$

Эта задача рассматривается в той же постановке, что и предыдущая (см. п. 3); физические соотношения (3.1) следует заменить на (4.1). Аналогично п. 3 все напряжения определяются уравнениями (3.3) при помощи параметра ω . Используя (4.1) при записи скорости деформации внешнего слоя в области II оболочки $p_{2\theta}^+ = -1/2 3^{0,5(n+1)} A \omega^n = -2hR_2^{-2} R_2^2$, получим

$$t = \frac{3^{-0,5(n+1)} 4h}{A} \int_{R_0}^{R_2} \frac{dR_2}{\omega^n R_2^2} \quad (4.2)$$

Нижний предел интеграла $R_2 = R_0$ соответствует предположению малости мгновенных деформаций по сравнению с деформациями ползучести. Связь ω и R_2 найдем используя моментное уравнение равновесия (1.4) с учетом (1.2) и (3.3). Переходя затем к параметру ψ , получаем вместо (4.2) уравнение

$$\tau = A_1 t^{\frac{1}{n}} \int_0^\psi (1+\psi)^{(n-2)} \left[\frac{4}{\pi} (1+\psi) \sin \frac{\pi}{4(1+\psi)} - \frac{2\psi}{(1+2\psi)} \cos \frac{\pi}{4(1+\psi)} \right]^n d\psi$$

$$A_1 = 3^{0,5(n+1)} \left(\frac{A R_0}{4h} \right) \left(\frac{2M_0}{3\pi H R_0^2} \right)^n$$

В качестве критерия времени сплющивания t_* можно принять время, которому соответствует $\psi \rightarrow +\infty$. Кривые $\psi = \psi(\tau)$ для различных значений n нанесены на фиг. 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978, 359 с.
2. Алиев Р. Л., Локощенко А. М., Шестериков С. А. Большие прогибы нелинейно-упругого кольца под внешним давлением. - Вестн. МГУ. Сер. Матем., механ., 1969, № 3, с. 97-102.

3. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966, 752 с.
4. Brazier L. G. On the flexure of thin cylindrical shells and other «thin» sections.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1927, v. 116, No. A773, p. 104–114.
5. Reissner E. On finite bending of pressurized tubes.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1959, v. 26, No. 3, p. 386–392.
6. Hoff N. Y. Buckling at high temperature.— J. Roy. Aeronaut. Soc., 1957, v. 61, No. 563, p. 756–774.— Рус. перев.: Механика: Сб. перев. иностр. статей, 1958, № 5, с. 65–100.

Москва

Поступила в редакцию:
5.II.1980

УДК 531/534:061.6

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ АН СССР. СЕМИНАРЫ

Семинар по динамике сплошной среды
под руководством Зволинского Н. В., Шапиро Г. С., Григоряна С. С.

14.X.1980. Багдоев А. Г., Ванцян А. А. (Ереван) *Проникание тонких тел в металлы.*

Приводится решение задачи проникания при наличии фронта разрушения, отделяющего область пластичности вблизи тела от упругой области. Предположено, что решение в основных порядках зависит лишь от радиальной координаты и среда вблизи тела несжимаема. Используя упругую асимптотику вблизи поверхности фронта и условия на ней, включая уравнения ударной адиабаты, и предполагая, что диссипация энергии слабо зависит от осевой координаты, удается получить простое решение, в котором нормальная компонента напряжения на теле постоянна, а также поверхность фронта подобна поверхности тела. Определена максимальная глубина проникания для тела, состоящего из криволинейного конуса, переходящего в цилиндр с учетом и без учета трения на цилиндрической части. Показано соответствие полученных теоретических и экспериментальных результатов по прониканию в дюраль, алюминий, латунь, медь. Указывается способ уменьшения глубины проникания. Приводится решение для хрупкой среды.

25.XI.1980. Ставрогин А. Н., Ширкес О. А., Тарасов Б. Г., Певзнер Е. Д. (Ленинград) *Исследование прочности и деформируемости горных пород в допредельной и запредельной областях.*

Даны результаты экспериментов и их интерпретация деформирования и разрушения горных пород (в частности, мрамор и песчаник). Установлено наличие упругих и упругопластических областей деформирования, существование падающего участка диаграммы напряжение — деформация. Найдены закономерности развития остаточных деформаций, условия предельного состояния и прочности. Предложена модель деформирования среды, основанная на существовании микро- и макроскопических площадок скользяния и отрыва.

2.XII.1980. Гарабрин Г. Т. (Волгоград) *Об одном численном методе решения нестационарных задач динамики анизотропных упругих массивов.*

Предлагается явная разностная схема второго порядка точности для решения задачи с начальными и граничными условиями применительно к телам произвольной конфигурации с граничными поверхностями кусочно-непрерывной кривизны. Уравнения схемы являются интегралами второго порядка точности в пределах шага по времени от определяющих уравнений и от дифференциальных соотношений на характеристиках. В качестве примера выполнен расчет динамически изгибаемого ортотропного параллелепипеда, абсолютно закрепленного одной гранью.

17.III.1981. Секерж-Зенькович С. Я. (Москва) *Внутренние волны в стратифицированной жидкости, вызванные начальным возмущением.*

В рамках линейной теории и приближения Буссинеска интегральные представления решения задачи Коши для идеальной несжимаемой непрерывно стратифицированной жидкости с постоянной частотой Брента — Вэйсяля можно получить в виде трехкратного интеграла Фурье или в виде свертки с фундаментальным решением оператора внутренних волн. Проводится асимптотический анализ в случаях: в дальней зоне при ограниченном времени; далеко от области локализации начальных возмущений при фиксированном положении точки наблюдения. Дается гидродинамическая интерпретация результатов.

21.IV.1981. Златин Н. А., Пугачева Г. С. (Ленинград) *Разрушение твердых тел при импульсном нагружении.*

Работы, выполненные в Физико-техническом институте им. А. Ф. Иоффе АН СССР в 1972–1980 гг. и основанные на использовании явления откола, позволили определить характеристики прочности и временные закономерности этих характе-