УДК 539.3

КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ

СУЮНШКАЛИЕВ Н. Х.

Рассматривается деформация упругой сжимаемой среды, сохраняющая цилиндрическую поверхность радиуса $r=\text{const}$ цилиндрической поверхностью другого радиуса $R(r)$ и повернутой относительно оси цилиндра на угол $\theta(r)$. При этом протяженность цилиндра в аксиальном направлении предполагается значительной, т. е. принимаются условия плоской деформации.

Так сформулированные условия задачи могут быть реализованы в упругом сжимаемом цилиндрическом слое с внутренним и наружным радиусами r_0, r_1, деформируемом поворотом жесткого вала, сцепленного по всей длине с упругой средой, на произвольный конечный угол α при неподвижной наружной поверхности $r=r_1$, спаянной также с жестким телом (фиг. 1, *а*). Сказанное, конечно, распространяется и на «слой бесконечной толщины», для которого роль наружной поверхности отводится контуру Г, находящемуся в бесконечно удаленной точке (фиг. 1, *б*).

Упругий сжимаемый материал слоя принимается полулинейным с законом состояния[1] $\mathbf{P}=(\lambda s-2\mu)\mathbf{\Pi}+2\mu\nabla\mathbf{R}$, где $\mathbf{P}$ – несимметричный тензор напряжений Пиола, $\mathbf{\Pi}$ – тензор поворота, $\nabla\mathbf{R}$ – градиент вектора места актуальной конфигурации, λ и μ – константы, которые при линеаризации данного соотношения переходят в постоянные Ламе линейной теории упругости, смысл скаляра s будет пояснен ниже.

1. Геометрические соотношения. Введя цилиндрическую систему координат r, φ, z, далее принимаемых за материальные, представим векторы места частицы среды $\mathbf{r}$ – в отсчетной, $\mathbf{R}$ – в актуальной конфигурациях выражениями

$$\mathbf{r}=r\mathbf{e}_r+z\mathbf{k},\qquad \mathbf{R}=R\mathbf{e}_R+Z\mathbf{k} \tag{1.1}$$

Точечное преобразование первой конфигурации во вторую задается соотношениями

$$R=R(r),\qquad \Phi=\varphi+\theta(r),\qquad Z=z \tag{1.2}$$

в которых функции R и θ подлежат определению.

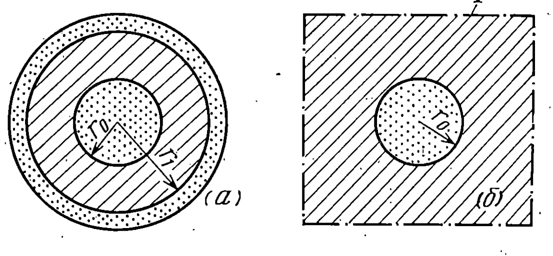
Очевидно, соотношения (1.2) отвечают поставленным выше условиям деформирования: материальная окружность радиуса r переходит в окружность радиуса $R(r)$, повернутую вокруг оси цилиндра на угол $\theta(r)$. Из (1.2) вытекают следующие формулы дифференцирования векторов ортонормированного базиса актуальной конфигурации:

$$\frac{\partial\mathbf{e}_R}{\partial r}=\theta'\mathbf{e}_\Phi,\qquad \frac{\partial\mathbf{e}_R}{\partial\varphi}=\mathbf{e}_\Phi,\qquad \frac{\partial\mathbf{e}_\Phi}{\partial r}=-\theta'\mathbf{e}_R,\qquad \frac{\partial\mathbf{e}_\Phi}{\partial\varphi}=-\mathbf{e}_R \tag{1.3}$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по независимой переменной r. Применение набла-оператора отсчетной конфигурации к вектору места R по (1.1) приводит к тензорам-градиентам

$$\nabla\mathbf{R}=R'\mathbf{e}_r\mathbf{e}_R+R\theta'\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\Phi+\frac{R}{r}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\Phi+\mathbf{k}\mathbf{k}$$

$$\nabla\mathbf{R}^T=R'\mathbf{e}_R\mathbf{e}_r+R\theta'\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_r+\frac{R}{r}\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_\varphi+\mathbf{k}\mathbf{k} \tag{1.4}$$



Фиг. 1

[1] Основные соотношения нелинейной теории упругости и обозначения, принятые здесь, соответствуют монографии А. И. Лурье «Теория упругости». М.: Наука, 1970. 940 с.

по которым определяется мера деформации Коши – Грина $\mathbf{G}=\nabla\mathbf{R}\cdot\nabla\mathbf{R}^T$:

$$\mathbf{G}=(R'^2+R^2\theta'^2)\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r+\frac{R^2\theta'}{r}(\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\varphi+\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_r)+\frac{R^2}{r^2}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi+\mathbf{kk} \tag{1.5}$$

Матрица ковариантных компонент этого тензора имеет детерминант

$$\det\|G_{sk}\|=G=(R'^2+R^2\theta'^2)\frac{R^2}{r^2}-\left(\frac{R^2\theta'}{r}\right)^2=\left(\frac{RR'}{r}\right)^2,\qquad \sqrt{G}=\frac{RR'}{r} \tag{1.6}$$

Для определения ковариантных компонент тензора $\mathbf{U}=\mathbf{G}^{1/2}$ имеются следующие уравнения: $U_{11}{}^2+U_{12}{}^2=G_{11}$, $U_{12}{}^2+U_{22}{}^2=G_{22}$, $U_{12}(U_{11}+U_{22})=G_{12}$, $U_{11}+U_{22}=G_{11}+G_{22}+$ $+2\sqrt{G}=\Delta$, решая которые, находим

$$U_{12}=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}G_{12},\qquad U_{11}=\frac{1}{2\sqrt{\Delta}}(\Delta+G_{11}-G_{22}),\qquad U_{22}=\frac{1}{2\sqrt{\Delta}}(\Delta+G_{22}-G_{11})$$

Для рассматриваемой задачи на основании (1.5), (1.6) получим

$$\Delta=R'^2+R^2\theta'^2+\frac{R^2}{r^2}+2\frac{RR'}{r}=\left(R'+\frac{R}{r}\right)^2+(R\theta')^2$$

$$\Delta+G_{11}-G_{22}=2(G_{11}+\sqrt{G})=2(R'^2+R^2\theta'^2+RR'/r)$$

$$\Delta+G_{22}-G_{11}=2(G_{22}+\sqrt{G})=2(R^2/r^2+RR'/r) \tag{1.7}$$

поэтому матрица ковариантных компонент тензора $\mathbf{U}$ имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\begin{Vmatrix} R'^2+R^2\theta'^2+RR'/r & R^2\theta'/r & 0\\ & R^2/r^2+RR'/r & 0\\ & & \sqrt{\Delta}\end{Vmatrix} \tag{1.8}$$

а ее определитель оказывается равным

$$\det\|U_{sk}\|=\sqrt{\Delta} \tag{1.9}$$

Первый инвариант тензора $\mathbf{U}$ представим в виде

$$I_1(\mathbf{U})=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left[\left(R'+\frac{R}{r}\right)^2+(R\theta')^2\right]+1=\sqrt{\Delta}+1$$

Поэтому скаляр s, входящий в закон состояния, определяется равенством

$$s=I_1(\mathbf{U})-3=\sqrt{\Delta}-2 \tag{1.10}$$

Обращение матрицы (1.8) приводит к следующему выражению для тензора $\mathbf{U}^{-1}$:

$$\mathbf{U}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left[\left(1+\frac{R}{2R'}\right)\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r-\frac{R\theta'}{R'}(\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\varphi+\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_r)+\left(1+\frac{rR}{R'}\theta'^2\right)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi\right]+\mathbf{kk} \tag{1.11}$$

По формуле $\mathbf{\Pi}=\mathbf{U}^{-1}\cdot\nabla\mathbf{R}$, учитывая (1.4) и (1.11), приходим к следующему представлению тензора поворота:

$$\mathbf{\Pi}=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left[(R'+R/r)(\mathbf{e}_r\mathbf{e}_R+\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\Phi)+R\theta'(\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\Phi-\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_R)+kk\right. \tag{1.12}$$

2. Тензор напряжений. Уравнения равновесия. 2.1. В рассматриваемой задаче тензор напряжений Пиола

$$\mathbf{P}=p^{11}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_R+p^{12}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\Phi+p^{21}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_R+p^{22}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\Phi+p^{33}\mathbf{kk} \tag{2.1}$$

согласно закону состояния и геометрическим соотношениям (1.4), (1.10), (1.12), имеет компоненты, определяемые следующими выражениями:

$$p^{11}=k(R'+R/r)+2\mu R',\qquad p^{22}=k(R'+R/r)+2\mu R/r$$

$$p^{12}=(k+2\mu)R\theta',\qquad p^{21}=-kR\theta',\qquad p^{33}=\lambda(\sqrt{\Delta}-2)$$

$$p^{\alpha 3}=p^{3\alpha}=0\quad(\alpha=1,2),\qquad k=\lambda-\frac{2}{\sqrt{\Delta}}(\lambda+\mu) \tag{2.2}$$

2.2. Уравнения равновесия в объеме слоя при отсутствии массовых сил $\nabla\cdot\mathbf{P}=0$ (принимая во внимание, что компоненты тензора напряжений зависят лишь от одной материальной координаты r, а производные базисных векторов актуальной конфигурации вычисляются с учетом формул (1.3)) можно представить в следующей форме:

$$\left(\frac{dp^{11}}{dr}+\frac{p^{11}-p^{22}}{r}-\theta' p^{12}\right)\mathbf{e}_R+\left(\frac{dp^{12}}{dr}+\frac{p^{12}+p^{21}}{r}+\theta' p^{11}\right)\mathbf{e}_\Phi=0$$

из которой следуют два скалярных уравнения

$$\frac{dp^{11}}{dr}+\frac{p^{11}-p^{22}}{r}-\theta' p^{12}=0,\qquad \frac{dp^{12}}{dr}+\frac{p^{12}+p^{21}}{r}+\theta' p^{11}=0 \tag{2.3}$$

Третье уравнение удовлетворяется тождественно, так как $dp^{33}/dz=0$. Вводятся обозначения: $u(r)=R'+R/r=(Rr)'/r$, $v(r)=R\theta'$ так, что из (1.7) следует $\Delta=u^2+v^2$.

Теперь выражения (2.2) для компонент напряжений p^{sk} и уравнения равновесия (2.3) можно представить в виде

$$p^{11}=ku+2\mu R',\qquad p^{22}=ku+2\mu R/r$$

$$p^{12}=(k+2\mu)v,\qquad p^{21}=-kv,\qquad p^{33}=\lambda(\sqrt{\Delta}-2) \tag{2.4}$$

$$[(k+2\mu)u]'-(k+2\mu)v\theta'=0,\qquad [(k+2\mu)v]'+(k+2\mu)u\theta'=0 \tag{2.5}$$

или

$$[(k+2\mu)w]'+i(k+2\mu)w\theta'=0,\qquad w=u+iv \tag{2.6}$$

2.3. При интегрировании дифференциального уравнения первого порядка (2.6) относительно вспомогательной комплексной функции $w(r)$ появляется одна комплексная произвольная постоянная или две вещественные постоянные. Далее, при нахождении основных «физических» функций R, θ появляются еще две постоянные интегрирования. Для отыскания этих постоянных необходимы четыре краевых условия.

В случае конечного слоя (фиг. 1, a), если поворотом жесткого вала внутренняя поверхность поворачивается на конечный угол α, геометрическими краевыми условиями будут соотношения

$$R(r_0)=r_0,\qquad R(r_1)=r_1,\qquad \theta(r_1)=0,\qquad \theta(r_0)=\alpha \tag{2.7}$$

Если же к валу приложен крутящий момент m, рассчитанный на единицу длины слоя (в направлении оси z), то четвертое краевое условие должно быть заменено «силовым», выражающим тот факт, что главный момент на цилиндрической поверхности $r=r_0$ равен заданному $\mathbf{k}m$.

Система внутренних сил упругой среды на элементе do^1 поверхности $r=r_0$ единичной длины в направлении оси z определяется равенством

$$[\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{P}do^1]_{r=r_0}=[p^{11}(r_0)\mathbf{e}_R+p^{12}(r_0)\mathbf{e}_\Phi]r_0d\varphi$$

а ее главный момент относительно оси цилиндра равен

$$[\mathbf{R}\times\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{P}do^1]_{r=r_0}=\mathbf{e}_R\times[p^{11}(r_0)\mathbf{e}_R+p^{12}(r_0)\mathbf{e}_\Phi]r_0^2d\varphi=\mathbf{k}p^{12}(r_0)r_0^2d\varphi$$

В этом случае четвертое краевое условие принимает вид $2\pi r_0^2p^{12}(r_0)=m$.

3. Интегралы задачи. Возвращаясь к дифференциальному уравнению (2.6), находим его интеграл

$$(k+2\mu)w=D\exp[i(\beta-\theta)] \tag{3.1}$$

в котором D и β – вещественные постоянные. Отделив в (3.1) вещественную и мнимую части, приходим к равенствам

$$(k+2\mu)u=D\cos(\beta-\theta),\qquad (k+2\mu)v=D\sin(\beta-\theta) \tag{3.2}$$

Разделив первое из равенств (3.2) на второе, получим дифференциальное уравнение $(Rr)'/Rr=\operatorname{ctg}(\beta-\theta)\theta'$, интеграл которого имеет вид

$$Rr\sin(\beta-\theta)=C,\qquad C=\text{const} \tag{3.3}$$

Возведя равенства (3.2) в квадрат и сложив их, с учетом (2.6) получим

$$(k+2\mu)^2\Delta=D^2 \tag{3.4}$$

Из равенства $k=\lambda-2(\lambda+\mu)/\sqrt{\Delta}$ с учетом (3.4) следует, что величина Δ постоянна

$$\Delta=u^2+v^2=(\lambda+2\mu)^{-2}[D+2(\lambda+\mu)]^2=B^2$$

Поэтому имеем $(Rr)'^2+(Rr\theta')^2=B^2r^2$, исключая из этого выражения Rr с помощью (3.3), приходим к дифференциальному уравнению $C\theta'/\sin^2(\beta-\theta)=Br$, решение которого имеет вид

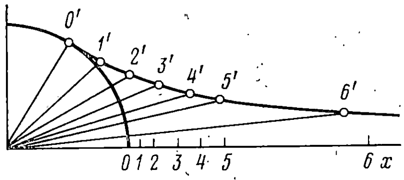
$$C\operatorname{ctg}(\beta-\theta)={}^1/_2Br^2+A \tag{3.5}$$

Постоянные интегрирования β, A, B, C, входящие в решения (3.3), (3.5), определяются из краевых условий (2.7)

$$A=\frac{C}{r_1^2-r_0^2}[r_1^2\operatorname{ctg}(\beta-\alpha)-r_0^2\operatorname{ctg}\beta],\quad B=\frac{2C}{r_1^2-r_0^2}[\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}(\beta-\alpha)]$$

$$C=r_0^2\sin(\beta-\alpha)=r_1^2\sin\beta,\quad \sin\beta/\sin(\beta-\alpha)=r_0^2/r_1^2$$

В случае слоя бесконечной толщины $(r_1\to\infty)$ имеем $\beta=0$, $A=r_0^2(\cos\alpha-1)$, $B=2$, $C=-r_0^2\sin\alpha$.



Фиг. 2

В силу последних равенств функции $R(r)$ и $\theta(r)$ принимают вид

$$R(r)=r_0\sqrt{f(x)},\quad \theta(r)=\operatorname{arcctg}[\operatorname{ctg}\alpha+(x^2-1)/\sin\alpha]$$

$$x=r/r_0,\quad f(x)=x^2-4(1-1/x^2)(\sin^2\alpha/2) \tag{3.6}$$

На фиг. 2 изображена актуальная конфигурация луча $\varphi=\text{const}$ отсчетной конфигурации при повороте внутреннего контура на угол 60°.

По формулам (2.4), учитывая равенство $k=-\mu$ при $B=2$, имеем следующие представления ненулевых компонент тензора напряжений Пиола:

$$p^{11}=\mu(R'-R/r),\quad p^{22}=\mu(R/r-R'),\quad p^{12}=p^{21}=\mu R\theta'$$

По ним следуют формулы для физических компонент «истинного» тензора напряжений Коши:

$$\tau_{R\Phi}=\mu r\theta',\quad \sigma_R=\mu\left(\frac{rR'}{R}-1\right),\quad \sigma_\Phi=\mu\left[(1+x^2\theta'^2)\frac{R}{rR'}-1\right]$$

Подстановка в последние выражения значений функций R, θ по (3.6) после несложных преобразований приводит к следующим формулам:

$$\tau_{R\Phi}^\circ=\frac{\tau_{R\Phi}}{\mu}=\frac{x^2}{f(x)}\sin\alpha,\quad \sigma_R^\circ=\frac{\sigma_R}{\mu}=\frac{x^2-2}{f(x)}\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sigma_\Phi^\circ=\sigma_\Phi/\mu=(\tau_{R\Phi}^{\circ 2}-\sigma_R^\circ)/1+\sigma_R^\circ$$

Автор сердечно благодарен покойному Анатолию Исааковичу Лурье, беседы с которым способствовали написанию этой работы.

Ташкент

Поступила в редакцию
11.III.1979