

УДК 624.07:534.1

**ВЛИЯНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО СМЕЩЕНИЯ
НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГОЙ ВОЛНЫ ПО СТЕРЖНЮ
ПРИ НАЛИЧИИ СУХОГО ТРЕНИЯ**

ТАРХАНОВ Г. В.

Распространение продольной упругой волны по стержню, прижатому к шероховатому основанию, рассматривалось в работах [1, 2], где получено решение для периодического импульсного возбуждения и нагружения с постоянной скоростью изменения нагрузки конца стержня. Периодическое нагружение изменяет распределение сил трения по длине стержня, влияя на последующие циклы деформации. При плавном нагружении задача сводится к решению системы функциональных уравнений, определяющих фронт распространяющейся волны. Построено решение системы для случая линейного изменения нагрузки во времени.

Сведение системы функциональных уравнений к одному уравнению с запаздыванием было проведено в [3], что позволяет последовательно находить решение для любого непрерывного закона нагружения. Показано, что скорость распространения переднего фронта волны меньше фазовой и зависит от распределения по длине стержня начальных сил трения и ускорения на фронте волны.

В публикуемой работе рассматривается распространение волн, возбуждаемых гармоническим перемещением конца стержня. Так как скорость распространения переднего фронта волны меньше фазовой, а заднего — больше, то между следующими одна за другой волнами образуются зоны застоя; поэтому каждая волна продольной деформации проходит по невозмущенному участку стержня, отличающемуся только распределением сил трения по его длине. Линейное распределение остаточных деформаций можно учесть при последующем цикле нагружения приведенным коэффициентом трения в уравнении движения, что позволяет получить общее решение задачи. Так как по мере распространения задний фронт волны догоняет передний, то ее форма искажается и волна затухает. В случае гармонического возбуждения конца стержня зависимость нагрузки от перемещения имеет вид незамкнутой петли гистерезиса, стабилизирующейся через некоторое число циклов, а работа за цикл деформации при этом оказывается независимой от коэффициента трения.

Полученное решение можно использовать для определения динамических нагрузок при пуске конвейеров с гибким тяговым органом и определения гистерезисных потерь при колебаниях резинокордных элементов, контактирующих с металлическими поверхностями.

1. Перемещение $u(s, t)$ произвольной точки стержня $s \geq 0$ в момент времени t определим при помощи функции $v(s, t) = u(s, t) - u(s, 0)$, удовлетворяющей уравнению

$$\partial^2 v / \partial t^2 + \alpha f = a_0^2 \partial^2 v / \partial s^2 \tag{1.1}$$

$$\alpha = \text{sign } v_t - \beta_0, \quad v_t = \partial v / \partial t, \quad a_0 = (EF/m)^{1/2}$$

при нулевых начальных условиях, где a_0 — скорость распространения упругой волны, E — модуль упругости материала, F — площадь поперечного сечения, m — погонная масса стержня, f — сила трения на единицу погонной массы.

Коэффициент β_0 определяет предварительное смещение точек стержня

$$u(s, 0) = P_0 s / (EF) + 1/2 \beta_0 f s^2 / a_0^2$$

где P_0 — сила, приложенная к концу стержня $s=0$ при $t=0$.

Коэффициент $-1 \leq \beta_0 \leq 1$; причем границ интервала он достигает при условии, что погонная сила трения в контакте стержня с абсолютно жесткой поверхностью равна предельным значениям $\pm mf$. Если концу стержня дать прямоугольный импульс ускорения [1, 3], то после прохода по стержню упругой волны силы трения в контакте не достигают своих предельных значений, т. е. в общем случае коэффициент β_0 является функцией координаты s . Изменение β_0 равносильно изменению удельных сил трения, входящих в уравнение (1.1).

При постоянном коэффициенте α общее решение уравнения (1.1):

$$\begin{aligned} v(s, t) &= \varphi(x) + \psi(y) - \frac{1}{4} \alpha f x y \\ x &= t - s/a_0, \quad y = t + s/a_0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

отличается от решения для стержня без трения только членами, пропорциональными t^2 и s^2 , где φ и ψ — функции, определяемые из граничных условий.

Рассмотрим поведение функции $v(s, t)$ в окрестности фронта волны. Пусть в момент t_1 фронт находится в точке x_1 , а в момент $t_1 + \Delta t$ переместился в точку $s_1 + \Delta s$.

Тогда

$$v(s_1 + \Delta s, t_1 + \Delta t) = \Delta t v_t(s_1, t_1) + \Delta s v_s(s_1, t_1) = 0$$

Следовательно, скорость и относительная деформация на фронте волны связаны соотношением $v_t + a v_s = 0$, где $a = ds_1/dt$ — скорость распространения фронта волны $s_1(t)$. Будем рассматривать волну с непрерывным изменением скорости, т. е. $v_t[s_1(t), t] = 0$. Тогда на фронте волны относительная деформация $v_s[s_1(t), t]$ также равна нулю. Дифференцируя скорость и относительную деформацию в точке $s_1(t)$ по времени, получим соотношение для окрестности фронта волны $a^2 v_{ss} = v_{tt}$, которое с учетом уравнения (1.1) показывает, что скорость распространения фронта волны a зависит от удельной силы трения и ускорения

$$a/a_0 = \pm (1 + \alpha f / v_{tt})^{-1/2} \quad (1.3)$$

Скорость и ускорение в окрестности фронта волны имеют одинаковые знаки $v_t \approx \Delta t v_{tt}$, поэтому отношение $\alpha f / v_{tt} \geq 0$ и, следовательно, $|a| \leq a_0$.

Таким образом, действие сухого трения на стержень приводит к уменьшению скорости распространения переднего фронта волны и волна $\varphi(x)$, вызванная перемещением конца стержня, распространяясь с фазовой скоростью a_0 , догоняет фронт и, частично отражаясь, порождает обратную волну $\psi(y)$.

Если $\alpha = \text{sign } v_t - \beta_0 = 0$, т. е. начальные силы трения достигали предельного значения $|\beta_0| = 1$ и распространяющаяся волна $\varphi(x)$ не изменяет их направления, то фронт волны распространяется со скоростью a_0 и обратной волны $\psi(y)$ не возникает. Аналогичное решение получается, если не равна нулю скорость на фронте волны и, следовательно, ускорение бесконечно большое. Такие задачи изучены в [1, 2].

2. Рассмотрим распространение по полубесконечному стержню волны с конечным ускорением на фронте и равными нулю скоростью и относительной деформацией v_s . Решение уравнения (1.1) при граничном условии $u(0, t) = u_0(t)$ для участка стержня, где постоянны коэффициент α , направление скорости v_t и скорости распространения волны $a = ds_1/dt$, выражается, согласно [3], через обратную функцию $x = z_{-1}(y)$:

$$\begin{aligned} a_0 v_s &= u_0'(x) + \frac{1}{4} \alpha f [z_{-1}(x) + z_{-1}(y) - 3x + y] \\ v_t &= u_0'(x) - \frac{1}{4} \alpha f [z_{-1}(x) - z_{-1}(y) - x + y] \\ u_0' &= du_0/dt, \quad u_0'/\alpha > 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Функция $y=z(x)$ определяет фронт распространяющейся волны $s=s_1(t)$ и находится из функционального уравнения

$$z(t) + z_{-1}(t) = 2t + 4u_0^{\cdot}(t) / (\alpha f). \quad (2.2)$$

Функция $z(t)$ монотонно возрастающая и $z(0)=0$, поэтому для малых t можно положить $z(t) = kt$, где

$$k = 1 + 2u_0^{\cdot\cdot}(0) / \alpha f + \{ [1 + 2u_0^{\cdot\cdot}(0) / \alpha f]^2 - 1 \}^{1/2}$$

$u_0^{\cdot\cdot}(0)$ — начальное ускорение, причем $u_0^{\cdot\cdot}(0) / \alpha > 0$.

Для больших значений t функцию $z(t)$ можно найти последовательным продолжением

$$z(t) = 2t - 4u_0^{\cdot}(t) / (\alpha f) - \gamma, \quad t = z(\gamma)$$

Если в промежутке $t < t_0$ скорость конца стержня изменяется приблизительно линейно, то

$$z(t) \approx (2 - 1/k)t + 4u_0^{\cdot}(t) / \alpha f \quad \text{при } t < kt_0$$

Отсюда можно найти в параметрическом виде зависимость перемещения фронта волны от времени

$$\frac{2s_1(\xi)}{a_0} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \xi + 4 \frac{u_0^{\cdot}(\xi)}{\alpha f}, \quad 2t = \left(3 - \frac{1}{k}\right) \xi + 4 \frac{u_0^{\cdot}(\xi)}{\alpha f} \quad (2.3)$$

Скорость распространения фронта волны $a > 0$, если $z^{\cdot}(x) > 1$ и соответственно $z_{-1}^{\cdot}(x) = 1/z^{\cdot}(x) < 1$. Из уравнения (2.2) видно, что $z^{\cdot}(x) > 0$, если $u_0^{\cdot\cdot}(x) / \alpha f > 0$. При этом согласно (1.3) скачок ускорения на фронте волны v_{ii} увеличивается с ростом скорости распространения фронта a , стремясь к бесконечности при $a \rightarrow a_0$.

Условия $s_1^{\cdot} \geq 0$ и $dt/d\xi > 0$ дают зависимость, определяющую предельное значение параметра ξ_0 и соответственно предельную длину $s_{10} = s_1(\xi_0)$, на которую распространится волна

$$u_0^{\cdot\cdot}(\xi_0) = \frac{1}{4} \frac{1-k}{k} \alpha f, \quad \text{если } \xi_0 < kt \quad (2.4)$$

Пусть конец стержня совершает гармонические колебания $u_0(t) = A(\cos \omega t - 1)$, а силы трения в начальный момент достигают своего предельного значения, т. е. $\beta_0 = 1$ и $\alpha = -2$. Будем рассматривать распространение первой полуволны растяжения стержня.

Введем обозначения: $\sigma = s\omega/a_0$, $\tau = \omega t$, $\eta = \tau - \sigma$, $C = 2A k \omega^2 / [\alpha f(1-k)]$, $v_s^{\cdot} = 2k a_0 \omega v_s / [\alpha f(1-k)]$, $v_i^{\cdot} = 2k \omega v_i / [\alpha f(1-k)]$, ($k \geq 1$).

Скорость конца стержня можно считать изменяющейся линейно до $\tau < 0,4$ и $\tau + \sigma < 0,4k$, обратные функции можно заменить их приближенными выражениями $z_{-1}(\tau) = \tau/k$. Тогда с учетом введенных обозначений выражения для скорости и относительной деформации стержня (2.1) будут иметь вид

$$v_i^{\cdot} = \sigma - C \sin \eta, \quad v_s^{\cdot} = \tau + C \sin \eta + 2k\sigma / (1-k), \quad \sigma + \tau < 0,4k \quad (2.5)$$

Приравнивая нулю скорость стержня, получим в параметрическом виде зависимость перемещения фронта волны $\sigma = C \sin \eta$, $\tau = \eta + C \sin \eta$.

Приближенное решение (2.5) при $\tau < \pi$ имеет одну ветвь $\sigma_1(\tau)$, соответствующую переднему фронту волны. Если $k > \pi/0,4$, то при $\tau > \pi$ появляется вторая ветвь $\sigma_2(\tau)$, соответствующая заднему фронту волны.

Заменив $\sin \tau$ линейной функцией в окрестности $\tau = 0$ и $\tau = \pi$, получим приближенные выражения перемещений фронтов волны $\sigma_1 = (k-1)/(k+1)\tau$, $\sigma_2 = C(\tau - \pi)/(C-1)$. Отсюда видно, что скорость распространения переднего фронта волны $s_1^{\cdot} = a_0 \sigma_1^{\cdot} = a_0(k-1)/(k+1) < a_0$, скорость заднего фронта $s_2^{\cdot} = a_0 \sigma_2^{\cdot} = a_0 C / (C-1) > a_0$. Следовательно, по мере распростра-

нения волны растяжения ее задний фронт догоняет передний и длина волны уменьшается, обращаясь в нуль, согласно (2.4), при $\cos \xi_0 = -1/2C$, если $C \gg 1$.

Путь, пройденный волной растяжения, определяется выражением (2.3). Согласно (2.5), относительные деформации стержня на фронте волны $v_s^\circ = \tau - \sigma(k+1)/(k-1)$, т. е. на переднем фронте $v_s^\circ = 0$, а на заднем $v_s^\circ \approx \pi - 4\sigma/(k-1)$. После прохода волны растяжения относительные деформации в начальной части стержня изменяются от $u_s = P_0/(EF) + fs/a_0^2$ до $u_s = P_0/(EF) + \pi f(k-1)/(ka_0\omega) + (k-4)fs/(ka_0^2)$, а коэффициент β_0 — от 1 до $1-4/k$.

Если $k > 2$, то $1-4/k > -1$ и контактные силы трения не достигают своего предельного значения, поэтому условия распространения волны растяжения и сжатия различаются, т. е. процесс происходит не стационарно. Для получения стационарного движения конца стержня необходимо, чтобы начальное смещение характеризовалось коэффициентом $\beta_0 = 2/k$. В этом случае после прохода упругой волны растяжения смещения в начальной части стержня будут характеризоваться коэффициентом $\beta_0 = -2/k$ и условия распространения волн сжатия и растяжения будут аналогичными.

Линеаризованное решение (2.3) действительно только при $\tau < 0,4k$. Для больших τ после того, как пройдет задний фронт волны растяжения, относительные деформации вдали от начала стержня будут характеризоваться коэффициентом β_0 , зависящим от координаты s . Для решения задачи о распространении колебаний по участку с переменным коэффициентом β_0 требуются дополнительные исследования, но волны, отраженные от распространяющегося по этому участку переднему фронту волны сжатия, не доходят до конца стержня и не влияют на входную податливость.

Положим $A\omega^2 = 0,5g$, $f = 0,1g$, $\omega = 628/C$, где g — ускорение свободного падения, тогда $k = 11,925$, $C = 5,5$. Для $\tau < 0,4k = 4,8$ обратные функции можно заменить приближенными выражениями $z_{-1}(\tau) = \tau/k$. Предельная величина параметра $\xi_0 = \pi/2 + 1/(2C) \approx 1,66$ определяет, согласно (2.3), предельное время существования волны растяжения и пройденный ею путь

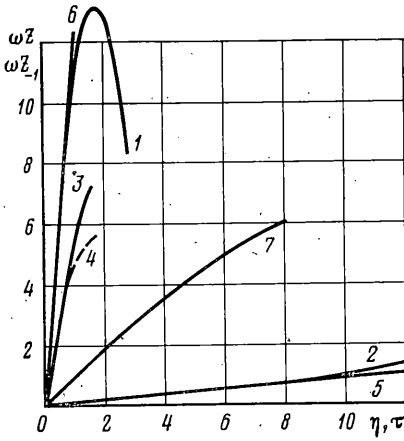
$$\tau_{10} = \frac{1}{2} \frac{3k-1}{k} \xi_0 + C \frac{k-1}{k} \sin \xi_0 = 7,46, \quad \sigma_{10} = 5,8$$

На фиг. 1 показана зависимость функции z (кривая 1) и обратной функции z_{-1} (кривая 2) от η/ω . Обратная функция начинает заметно отличаться от прямой линии η/k только при $\eta > 10$. На этой же фигуре приведены зависимости времени $\tau = [\eta + \omega z(\eta/\omega)]/2$ (кривая 3) и расстояния до фронта волны $\sigma_1 = [\omega z(\eta/\omega) - \eta]/2$ (кривая 4) от параметра η (прямые η/k и $k\eta$ обозначены цифрами 5 и 6).

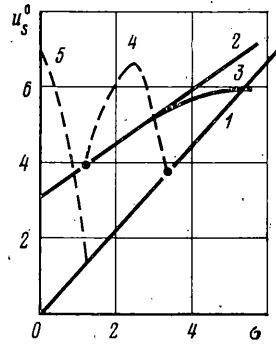
Время τ достигает максимального значения τ_{10} при $\eta = 1,8$, что несколько больше приближенного значения $\eta = \xi_0 = 1,66$. Исключая параметр η , можно получить зависимость $\sigma_1(\tau)$ (кривая 7). Скорость распространения волны убывает от $0,92a_0$ при $\tau = 0$ до $0,54a_0$ при $\tau = 7,46$.

Скорость и относительную деформацию точек стержня можно приближенно определить графически, вычитая из функции $C \sin \tau$ (кривая 1 на фиг. 2, а) линейную функцию $\sigma = \tau - \eta$. Так, например, при $\tau = 1$ скорости точек стержня определяются разностью между отрезком AB синусоиды и прямой $\sigma = 1 - \eta$, где точка A соответствует скорости конца стержня, а B — скорости фронта волны.

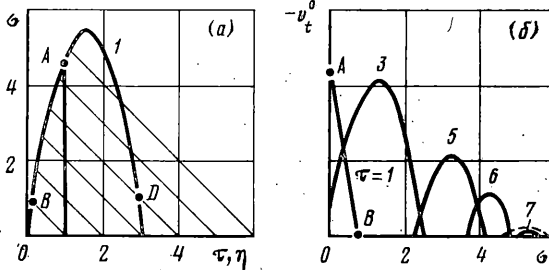
Точка D на линии $\sigma = 4 - \eta$ соответствует заднему фронту волны, который появляется при $\tau > \pi$. На фиг. 2, б показано распределение скоростей по длине стержня в различные моменты времени, построенное по приближенным зависимостям (штриховая кривая соответствует точным уравнениям при $\tau = 7$). Волна, удаляясь от начала стержня, постепенно затухает.



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

Распределение относительных деформаций по длине стержня в различные моменты времени приведено на фиг. 3. Прямая 1 с угловым коэффициентом $k/(k-1)$ соответствует начальному распределению деформаций, прямая 3 — после прохода и затухания волны растяжения на длине $\sigma < 5,8$. Касательная 2 к кривой 3 в точке $\sigma=0$ характеризуется уравнением $u_s^0 = \pi + \sigma(k-4)(k-1)$. При $\tau=1,5$ относительные деформации уменьшаются от $u_s^0=6,8$ а при $\sigma=0$ до $u_s^0=1,3$ при $\sigma=1,2$ (кривая 5), а дальше возрастают по линии 1. При $\tau=4$ относительные деформации изменяются в начальной части стержня по линии 3, дальше по кривой 4 и линии 1.

Волна сжатия, распространяясь по участку $\sigma < 3$ с примерно линейным распределением деформаций и постоянным коэффициентом $\beta_0 = (k-4)/k$, вызовет вторичные волны, определяемые уравнением (2.2), а на участке $3 < \sigma < 5,8$, вторичные волны будут определяться уравнением (1.1) с параметром α , зависящим от координаты σ . Если вторичные волны, отраженные от фронта волны, распространяющегося по участку стержня с нелинейно изменяющейся относительной деформацией не доходят до конца стержня, относительную деформацию u_{sn} в точке $\sigma=0$ можно определить по приближенным зависимостям (2.5) для любого номера n полуцикла деформации, если известны относительная деформация $u_{s_{n-1}}$ и коэффициент β_{n-1} предыдущего полуцикла

$$\frac{a_0 \omega}{f} (u_{sn} - u_{s_{n-1}}) = (-1)^n \frac{A \omega^2}{f} \sin \tau - \frac{1}{2} \alpha_n \tau \frac{k_n - 1}{k_n}$$

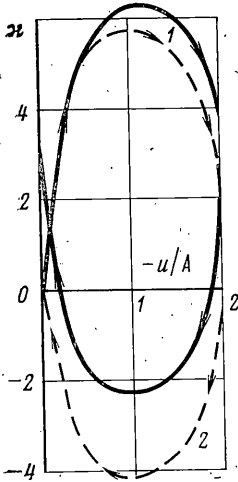
$$\alpha_n = (-1)^n - \beta_{n-1}, \quad k_n = 1 + 2A \omega^2 / (f |\alpha_n|) + \{ [1 + 2A \omega^2 / (f |\alpha_n|)]^2 - 1 \}^{1/2}$$

$$0 \leq \tau \leq \pi, \quad t = [\pi(n-1) + \tau] / \omega, \quad u_{s_0} = P_0 / (EF), \quad \beta_0 = 1 \quad (n=1, 2, \dots)$$

При каждом полуцикле деформирования коэффициент β в окрестности конца стержня изменяется на $(-1)^h 4/k$, следовательно

$$\beta_n = \beta_0 - 4 \sum_{h=1}^n (-1)^{h-1} k_h^{-1}$$

Зависимость относительной деформации или нагрузки $\kappa = a_0 \omega (u_{sn} - u_{s_{n-1}})/f$, действующей на конец стержня, от перемещения конца стержня $u = A(\cos \tau - 1)$, при первом цикле деформирования (кривая 1 на фиг. 4) представляет незамкнутую петлю гистерезиса, площадь которой равна работе, затраченной за цикл. После некоторого числа циклов деформирования петля гистерезиса стабилизируется (кривая 2) и коэффициент β принимает значения $\pm 2/k_n$, где k_n определяется из уравнения $k^3 - 4k^2 A \omega^2 / f - 3k + 2 = 0$.



Фиг. 4

Площадь стабилизированной петли гистерезиса $\pi A^2 \omega (EFm)^{1/2}$ равна работе, затрачиваемой при гармонических колебаниях конца полубесконечного стержня без трения. Независимость работы за цикл колебания от силы трения объясняется тем, что при кинематическом возбуждении конца стержня сила возбуждения складывается из составляющей $A \omega (EFm)^{1/2} \sin \omega t$, равной силе возбуждения стержня без трения, и изменяющей потенциальную энергию стержня положительной треугольной импульсной функции, равной Bt при нечетном полуцикле n и $B(\pi - \tau)$ при четном n , где $B = (EFm)^{1/2} f (k_n + 2)(k_n - 1) / (2 \omega k_n^2)$. При установившихся колебаниях работа за цикл колебания второй составляющей равна нулю.

Треугольную импульсную функцию можно разложить в ряд Фурье, тогда выражение для нагрузки на конце стержня при установившемся движении будет иметь вид

$$P(0, t) = P_{01} + (EFm)^{1/2} A \omega \sin \omega t + \frac{4B}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos(2p+1)\omega t}{(2p+1)^2}$$

Амплитуды гармоник, кратных основной частоте ω , значительно меньше амплитуды основной гармоники, поэтому для кинематического возбуждения конца стержня $u = A(\cos \omega t - 1)$ к нему необходимо приложить силу, примерно равную $N \sin(\omega t + \varphi)$, где фаза $\varphi = \arctg B / [A \omega (EFm)^{1/2}]$ зависит от отношения начального ускорения к удельной силе трения $A \omega^2 / f$, а амплитуда $N = [A^2 \omega^2 EFm + B^2]^{1/2}$ пропорциональна импедансу полубесконечного стержня без трения и нелинейно зависит от амплитуды перемещения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никитин Л. В. Распространение волн в упругом стержне при наличии сухого трения. — Инж. ж., 1963, т. 3, вып. 1, с. 126–130.
2. Никитин Л. В. Продольные колебания упругих стержней при наличии сухого трения. — Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 6, с. 137–145.
3. Тарханов Г. В. Распространение волны по упругому полубесконечному стержню при наличии сухого трения. — Виброакустическая активность механизмов с зубчатыми передачами: Сб. статей. М.: Наука, 1971, с. 184–187.

Москва

Поступила в редакцию
25.III.1980