

**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1982**

УДК 533.6.013.42

**О ДИНАМИКЕ ВЗАЙМОДЕЙСТВИЯ СДАВЛИВАЕМОГО СЛОЯ
ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С УПРУГИМИ СТЕНКАМИ**

АНДРЕЙЧЕНКО К. П., МОГИЛЕВИЧ Л. И.

Исследуется гидродинамическая реакция тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости, сдавливаемого непроницаемыми стенками. Рассматривается распределение давления и силовых динамических характеристик слоя жидкости при вынужденных течениях жидкости вдоль зазора между вибратором (представляющим собой твердую плоскость) и статором (представляющим собой упругую пластинку с шарнирным опиранием), обусловленных движением вибратора. Учитываются силы инерции движения вязкой несжимаемой жидкости и упругие свойства статора.

1. Рассматривается сдавливание тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости плоскостями (фигура). Абсолютно твердая стенка 1 (вибратор) совершает колебания в вертикальном направлении относительно стенки 2 (статора), представляющую собой упругую шарнирно опертую пластинку толщины δ_0 . Длина вибратора 1 и статора 2, равная $2l$, значительно меньше их ширины $b \gg 2l$. В направлении оси z эти плоскости можно считать неограниченными. Ширина зазора h между статором и вибратором значительно меньше их длины $2l \gg h$.

Закон движения вибратора имеет вид

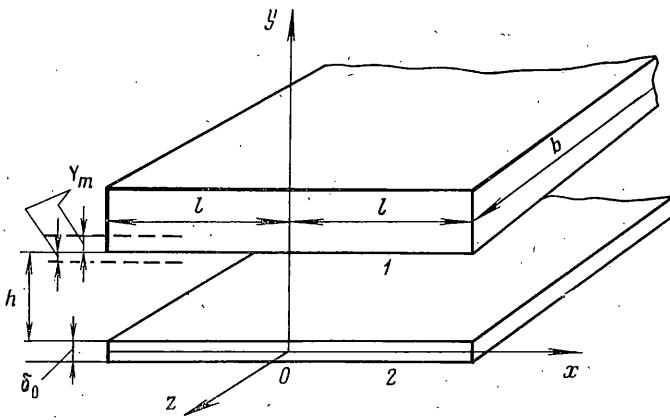
$$y = h(t) = h_0 + Y_m f(\omega t) \quad (1.1)$$

Здесь h_0 — среднее значение h , Y_m — амплитуда колебаний стенки 1 в вертикальном направлении, ω — частота колебаний стенки 1, t — время, $f(\omega t)$ — закон движения вибратора, например $f(\omega t) = \cos \omega t$.

Между статором 2 и вибратором 1 находится вязкая несжимаемая жидкость, динамика которой в двумерном случае описывается системой уравнений Навье — Стокса [1, 2] (в безразмерных переменных):

$$\begin{aligned} R \left[\frac{\partial U}{\partial \tau} + \lambda \left(U \frac{\partial U}{\partial \xi} + V \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) \right] &= - \frac{\partial P}{\partial \xi} + \varepsilon_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}, \\ \varepsilon_1^2 R \left[\frac{\partial V}{\partial \tau} + \lambda \left(U \frac{\partial V}{\partial \xi} + V \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right) \right] &= - \frac{\partial P}{\partial \zeta} + \varepsilon_1^2 \left(\varepsilon_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} \right), \\ \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \zeta} &= 0, \quad \varepsilon_1 = h_0/l \ll 1, \quad \lambda = Y_m/h_0, \quad R = h_0^2 \omega / v, \\ \tau &= \omega t, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \zeta = \frac{y}{h_0}, \quad V_x = Y_m \omega \frac{l}{h_0} U, \quad V_y = Y_m \omega V, \\ p &= p_0 + \frac{\rho v l^2 Y_m \omega}{h_0^3} P. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь x, y — декартовы координаты, V_x, V_y — проекции вектора скорости на оси координат, p — давление, ρ , v — плотность и коэффициент кинематической вязкости жидкости; $\varepsilon_1, \lambda, R$ — параметры, характеризующие задачу.



Для краевых условий системы (1.2) учитывается, что скорость жидкости на вибраторе и статоре совпадает со скоростями этих стенок [3, 4]:

$$U=0, \quad V=df/d\tau \text{ при } \xi=\delta_0/2h_0+1+\lambda f(\tau) \quad (1.3)$$

$$U=\varepsilon_1 \frac{u_m}{Y_m} \frac{\partial W_1}{\partial \tau}, \quad V=-\frac{w_m}{Y_m} \frac{\partial W_3}{\partial \tau} \quad \text{при} \quad \xi=\frac{\delta_0}{2h_0}(1-2\varepsilon_4 W_3)$$

где $\varepsilon_4=(w_m/\delta_0)\ll 1$ — параметр задачи; перемещения средней плоскости статора 2 в направлении оси Ox и в направлении, противоположном оси Oy , представлены в форме $u=u_m W_1(\xi, \tau)$, $w=w_m W_3(\xi, \tau)$.

Условия для давления имеют вид

$$P=0 \quad \text{при} \quad \xi=1, \quad \partial P / \partial \xi=0 \quad \text{при} \quad \xi=0 \quad (1.4)$$

Линейные уравнения динамики статора 2 в силу принятых условий и малости отношения силы трения к давлению жидкости на статоре представляют собой уравнения продольных и изгибных несвязанных колебаний балки-полоски

$$\begin{aligned} \frac{c^2 \varepsilon_1^2}{h_0^2 \omega^2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2} + \frac{P_{yx}}{\rho_0 \delta_0 u_m \omega^2} - \frac{\partial^2 W_1}{\partial \tau^2} &= 0 \\ \frac{c^2 \varepsilon_2^2 \varepsilon_1^2}{12h_0^2 \omega^2} \frac{\partial^4 W_3}{\partial \xi^4} + \frac{P_{yy}}{\rho_0 \delta_0 w_m \omega^2} + \frac{\partial^2 W_3}{\partial \tau^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_2=\delta_0/l \ll 1, \quad \varepsilon_3=u_m/\delta_0 \ll 1, \quad c^2=E/[\rho_0(1-\mu_0^2)]$$

$$P_{yx}=\rho v \frac{l Y_m \omega}{h_0^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \varepsilon_1^2 \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) \quad \text{при} \quad \xi=\frac{\delta_0}{2h_0}(1-2\varepsilon_4 W_3) \quad (1.6)$$

$$P_{yy}=-p_0-\rho \frac{v l^2 Y_m \omega}{h_0^3} \left(P - 2\varepsilon_1^2 \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) \quad \text{при} \quad \xi=\frac{\delta_0}{2h_0}(1-2\varepsilon_4 W_3)$$

Здесь E , μ_0 — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, ρ_0 — плотность пластиинки.

Краевые условия шарнирного опирания и условия симметрии задачи относительно оси Oy имеют вид

$$\begin{aligned} W_1=W_3=\partial^2 W_3 / \partial \xi^2=0 &\quad \text{при} \quad \xi=1; \quad W_1=\partial W_3 / \partial \xi= \\ =\partial^3 W_3 / \partial \xi^3=0 &\quad \text{при} \quad \xi=0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Начальные условия примем однородными.

2. В нулевом приближении при $\varepsilon_1 \ll 1$, $\varepsilon_2 \ll 1$, $\varepsilon_3 \ll 1$, $\varepsilon_4 \ll 1$ введем новую независимую переменную $\eta=\xi^{-1/2}\delta_0/h_0$. Тогда уравнения Навье — Стокса

(1.2) для тонкого слоя жидкости примут вид

$$R \left[\frac{\partial U}{\partial \tau} + \lambda \left(U \frac{\partial U}{\partial \xi} + V \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \right] = - \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0$$

Границные условия (1.3) запишутся в виде

$$U=0, \quad V=\frac{df}{d\tau} \quad \text{при} \quad \eta=1+\lambda f(\tau); \quad U=0, \quad V=-\frac{w_m}{Y_m} \frac{\partial W_3}{\partial \tau} \quad \text{при} \quad \eta=0 \quad (2.2)$$

$P=0$ при $\xi=1$; $\partial P/\partial \xi=0$ при $\xi=0$

$$P_{yy} = \rho \frac{v l Y_m \omega}{h_0^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}, \quad P_{yy} = -p_0 - \frac{\rho v l^2 Y_m \omega}{h_0^3} (P)_{\eta=0}$$

Задача (2.1), (2.2) решалась в [5, 6] без учета упругих свойств статора, при условии $W_3=0$, методом замены компонент скоростей в левой части первого уравнения (2.1) их средним по сечению значением и введением поправочных коэффициентов, учитывающих отличие распределения скорости от параболического закона. Аналогичная задача без учета упругих свойств статора, в которой принято $\partial U/\partial \tau=0$, исследовалась в [7] методом замены членов инерции в левой части первого уравнения (2.1) средним по сечению значением. Полученные результаты в этих работах совпадают в предельном случае при медленном сдавливании достаточно вязкой жидкости.

Для решения задачи (2.2), (2.3) применим метод итераций, предложенный в [8, 9]. Положим в левой части первого уравнения (2.1) силы инерции равными нулю — будет первый шаг итерации. На этом шаге итерации получим решение, соответствующее приближению теории смазки, описываемому уравнениями Рейнольдса [2, 7] и не учитывающему силы инерции движения жидкости. На втором шаге итерации полученные значения скорости подставим в левую часть первого уравнения (2.1) и решим задачу. На этом шаге итерации силы инерции движения жидкости будут учтены.

Рассмотрим случай, когда толщина пластины δ_0 и средняя толщина зазора h_0 являются величинами одного порядка малости $\delta_0/h_0=O(1)$. В этом случае различаются два режима движения вибратора: первый режим осуществляется при условии $\lambda=O(1)$. Имеем $w_m/Y_m=o(1)$ и краевые условия (2.2) примут вид

$$U=0, \quad V=df/d\tau \quad \text{при} \quad \eta=1+\lambda f(\tau) \quad (2.3)$$

$$U=0, \quad V=0 \quad \text{при} \quad \eta=0; \quad P=0 \quad \text{при} \quad \xi=1, \quad \partial P/\partial \xi=0 \quad \text{при} \quad \xi=0$$

В данном случае (см. (2.3)) колебания статора как упругой пластиинки не влияют на динамику жидкости в силу малости скоростей движения поверхности пластиинки по сравнению со скоростями жидкости.

Второй режим движения вибратора осуществляется при условии $\lambda=o(1)$. Имеем $w_m/Y_m=O(1)$ и краевые условия (2.2) остаются без изменения, а первое уравнение (2.1) линеаризуется. Система (2.1) принимает вид

$$R \frac{\partial U}{\partial \tau} = - \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \quad (2.4)$$

3. Рассмотрим первый режим течения $\lambda=O(1)$. В этом случае решаем задачу (2.1), (2.3). На первом шаге итерации по методу [8] получим

$$U=6\xi \frac{df}{d\tau} \left[\frac{\eta^2}{(1+\lambda f)^3} - \frac{\eta}{(1+\lambda f)^2} \right] \quad (3.1)$$

$$V = -\frac{df}{d\tau} \left[\frac{2\eta^3}{(1+\lambda f)^3} - \frac{3\eta^2}{(1+\lambda f)^2} \right], \quad P = \frac{6(\xi^2-1)}{(1+\lambda f)^3} \frac{df}{d\tau}$$

При этом средняя по сечению скорость определится формулой

$$\langle U \rangle = \frac{1}{1+\lambda f} \int_0^{1+\lambda f} U d\eta = -\xi \frac{1}{1+\lambda f} \frac{df}{d\tau} \quad (3.2)$$

На втором шаге итерации, подставляя U и V из (3.1) в левую часть первого уравнения (2.1), решая получившуюся систему уравнений с учетом граничных условий (2.3), будем иметь

$$P = \left\{ \frac{6}{(1+\lambda f)^3} \left(-\frac{df}{d\tau} \right) + R \left[\frac{3}{5(1+\lambda f)} \left(-\frac{d^2 f}{d\tau^2} \right) + \frac{51\lambda}{35(1+\lambda f)^2} \left(-\frac{df}{d\tau} \right)^2 \right] \right\} (1-\xi^2) \quad (3.3)$$

$$U = \frac{df}{d\tau} \xi \left[\frac{6\eta^2}{(1+\lambda f)^3} - \frac{6\eta}{(1+\lambda f)^2} \right] + R\xi \left\{ \frac{d^2 f}{d\tau^2} \left[\frac{\eta^4}{2(1+\lambda f)^3} - \frac{\eta^3}{(1+\lambda f)^2} + \frac{3\eta^2}{5(1+\lambda f)} - \frac{\eta}{10} \right] + \lambda \left(\frac{df}{d\tau} \right)^2 \left[\frac{2\eta^6}{5(1+\lambda f)^6} - \frac{6\eta^5}{5(1+\lambda f)^5} + \frac{2\eta^3}{(1+\lambda f)^3} - \frac{51\eta^2}{35(1+\lambda f)^2} + \frac{9\eta}{35(1+\lambda f)} \right] \right\} \quad (3.4)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = \frac{6\xi}{(1+\lambda f)^2} \left(-\frac{df}{d\tau} \right) + R\xi \left[\frac{1}{10} \left(-\frac{d^2 f}{d\tau^2} \right) + \frac{9\lambda}{35(1+\lambda f)} \left(-\frac{df}{d\tau} \right)^2 \right] \quad (3.5)$$

Формула (3.3) определяет давление жидкости на статоре, а формула (3.5) определяет силу трения на статоре согласно (2.2).

Если на втором шаге итерации вместо скоростей (3.1) подставить в левую часть первого уравнения (2.1) среднюю по сечению скорость (3.2) и ввести поправочные коэффициенты α , γ , как это сделано в [5, 6], то получим

$$P = \left\{ \frac{6\gamma}{(1+\lambda f)^3} \left(-\frac{df}{d\tau} \right) + \alpha R \left[\frac{1}{2(1+\lambda f)} \left(-\frac{d^2 f}{d\tau^2} \right) + \frac{\lambda}{(1+\lambda f)^2} \left(-\frac{df}{d\tau} \right)^2 \right] \right\} (1-\xi^2) \quad (3.6)$$

Из сравнения формул (3.3) и (3.6) следует $\alpha=1, 2$, $\gamma=1$, что совпадает с результатом [5, 6], в который следует ввести поправочный коэффициент α для локального члена инерции и $\alpha_1=12/7$ для конвективного члена инерции.

Если на втором шаге итераций подставим (3.1) в левую часть первого уравнения (2.1), а затем осредним по сечению левую часть этого уравнения, то, решая получившуюся систему уравнений с учетом граничных условий (2.3), будем иметь согласно с результатом [7] параболический профиль скорости и формулу для давления

$$P = \left\{ \frac{6}{(1+\lambda f)^3} \left(-\frac{df}{d\tau} \right) + R \left[\frac{1}{2(1+\lambda f)} \left(-\frac{d^2 f}{d\tau^2} \right) + \frac{6\lambda}{5(1+\lambda f)^2} \left(-\frac{df}{d\tau} \right)^2 \right] \right\} (1-\xi^2)$$

Для больших значений R , что соответствует большой частоте колебаний вибратора и малой вязкости жидкости, удобно применять метод [5, 6].

Гидродинамическая реакция F_y , приложенная к вибратору 1, согласно

(3.3) имеет вид ($L=2l$):

$$F_v = \rho v \frac{b}{h^3} L^3 \left(-\frac{dh}{dt} \right) + \frac{1}{10} \rho \frac{b}{h} L^3 \left(-\frac{d^2 h}{dt^2} \right) + \frac{17}{70} \rho \frac{b}{h^2} L^3 \left(-\frac{dh}{dt} \right)^2 + p_0 b L$$

Последняя формула отличается от аналогичной формулы в [5–7] числовым множителем в третьем слагаемом, в формуле он больше на $\approx 0,043$, что объяснено выше при применении итерации.

Из формулы (3.4) видно, что на втором шаге итерации профиль скорости отличается от параболического [5–7]. Для определения динамики статора подставим (3.3), (3.5) с учетом (2.2) в уравнения (1.5), тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \tau^2} - \frac{c^2 \varepsilon_1^2}{h_0^2 \omega^2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2} &= \frac{\rho \lambda \varepsilon_1 \xi}{\rho_0 R \varepsilon_2^2 \varepsilon_3} \left\{ \frac{6}{(1+\lambda f)^2} \left(-\frac{df}{d\tau} \right) + \right. \\ &\quad \left. + R \left[\frac{1}{10} \left(-\frac{d^2 f}{d\tau^2} \right) + \frac{9\lambda}{35(1+\lambda f)} \left(-\frac{df}{d\tau} \right)^2 \right] \right\} \\ \frac{\partial^2 W_3}{\partial \tau^2} + \frac{c^2 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2}{12 h_0^2 \omega^2} \frac{\partial^4 W_3}{\partial \xi^4} &= \frac{p_0 \varepsilon_1^2}{\rho_0 h_0^2 \omega^2 \varepsilon_2^2 \varepsilon_4} + \frac{\rho \lambda (\lambda - \xi^2)}{\rho_0 R \varepsilon_2^2 \varepsilon_4} \left\{ \frac{6}{(1+\lambda f)^3} \left(-\frac{df}{d\tau} \right) + \right. \\ &\quad \left. + R \left[\frac{3}{5(1+\lambda f)} \left(-\frac{d^2 f}{d\tau^2} \right) + \frac{51\lambda}{35(1+\lambda f)^2} \left(-\frac{df}{d\tau} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Учитывая краевые условия (1.7), решение уравнений (3.7) представим в виде

$$W_1 = \sum_{n=1}^{\infty} j_n^{(1)}(\tau) \sin n\pi\xi, \quad W_3 = \sum_{m=0}^{\infty} j_m^{(3)}(\tau) \cos \frac{2m+1}{2}\pi\xi \quad (3.8)$$

Разложив правые части уравнений (3.7) в соответствующие тригонометрические ряды, подставляя в левые части уравнений (3.7) формулы (3.8) и приравняв коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим дифференциальные уравнения для амплитуд $j_n^{(1)}, j_m^{(3)}$ смещений

$$\frac{d^2 j_n^{(1)}}{d\tau^2} + \Omega_1^2 j_n^{(1)} = S_n^{(1)}(\tau), \quad \frac{d^2 j_m^{(3)}}{d\tau^2} + \Omega_3^2 j_m^{(3)} = S_m^{(3)}(\tau) \quad (3.9)$$

$$\Omega_1 = c \varepsilon_1 n \pi / (h_0 \omega) \quad (n=1, 2, \dots) \quad \Omega_3 = [c \varepsilon_1 \varepsilon_2 / (\sqrt{12} h_0 \omega)] [0,5\pi(2m+1)]^2 \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned} S_n^{(1)}(\tau) &= \frac{\rho \lambda \varepsilon_1}{\rho_0 R \varepsilon_2^2 \varepsilon_3} \left\{ \frac{6}{(1+\lambda f)^2} \left(-\frac{df}{d\tau} \right) + \right. \\ &\quad \left. + R \left[\frac{1}{10} \left(-\frac{d^2 f}{d\tau^2} \right) + \frac{9\lambda}{35(1+\lambda f)} \left(-\frac{df}{d\tau} \right)^2 \right] \right\} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \\ S_m^{(3)}(\tau) &= \frac{p_0 \varepsilon_1^2}{\rho_0 h_0^2 \omega^2 \varepsilon_2^2 \varepsilon_4} \frac{4(-1)^m}{(2m+1)\pi} + \frac{\rho \lambda}{\rho_0 R \varepsilon_2^2 \varepsilon_4} \left\{ \frac{6}{(1+\lambda f)^3} \left(-\frac{df}{d\tau} \right) + \right. \\ &\quad \left. + R \left[\frac{3}{5(1+\lambda f)} \left(-\frac{d^2 f}{d\tau^2} \right) + \frac{51\lambda}{35(1+\lambda f)^2} \left(-\frac{df}{d\tau} \right)^2 \right] \right\} 4(-1)^m \left[\frac{2}{(2m+1)\pi} \right]^3 \end{aligned}$$

Решение уравнений (3.9) с учетом нулевых начальных условий

$$j_n^{(1)} = d j_n^{(1)} / d\tau = j_m^{(3)} = d j_m^{(3)} / d\tau = 0 \quad \text{при } \tau = 0 \quad (3.10)$$

имеет вид

$$j_n^{(1)}(\tau) = \frac{1}{\Omega_1} \int_0^\tau S_n^{(1)}(\theta) \sin \Omega_1(\tau - \theta) d\theta,$$

$$j_m^{(3)}(\tau) = \frac{1}{\Omega_3} \int_0^\tau S_m^{(3)}(\theta) \sin \Omega_3(\tau - \theta) d\theta$$

Подставляя последние формулы в (3.8), получим перемещения пластиинки-статора под действием движения жидкости.

4. Для второго режима движения вибратора, $\lambda=o(1)$, метод [8] применяем для задачи (2.4), (2.2). При этом на втором шаге итерации будем иметь

$$P = \left[6 \left(-\frac{df}{d\tau} \right) + \frac{3}{5} R \left(-\frac{d^2 f}{d\tau^2} \right) \right] (1 - \xi^2) - \quad (4.1)$$

$$-\frac{w_m}{Y_m} \int_{\xi}^1 \left[\int_0^{\xi} \left(12 \frac{\partial W_3}{\partial \tau} + \frac{6}{5} R \frac{\partial^2 W_3}{\partial \tau^2} \right) d\xi \right] d\xi \quad (4.2)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = 6\xi \left(-\frac{df}{d\tau} \right) + \frac{R}{10} \xi \left(-\frac{d^2 f}{d\tau^2} \right) - \frac{w_m}{Y_m} \int_0^{\xi} \left(6 \frac{\partial W_3}{\partial \tau} + \frac{R}{10} \frac{\partial^2 W_3}{\partial \tau^2} \right) d\xi$$

Профиль скорости, как и в п. 3, отличается от параболического. В этом случае, как следует из (4.1), (4.2), динамика статора влияет на гидродинамическую реакцию тонкого слоя жидкости, сдавливаемого вибратором.

Подставляя (3.8) в (4.1), получим

$$P = \left[6 \left(-\frac{df}{d\tau} \right) + \frac{3}{5} R \left(-\frac{d^2 f}{d\tau^2} \right) \right] (1 - \xi^2) - \quad (4.3)$$

$$-\frac{w_m}{Y_m} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{2}{(2m+1)\pi} \right]^2 \left(12 \frac{d j_m^{(3)}(\tau)}{d\tau} + \frac{6}{5} R \frac{d^2 j_m^{(3)}(\tau)}{d\tau^2} \right) \cos \frac{2m+1}{2}\pi\xi$$

Для определения $j_m^{(3)}$ подставим (3.8), (4.3), (2.2) в (1.5), разложим все функции от ξ , входящие во второе уравнение (1.5), в ряды по $\cos[(2m+1)/2]\pi\xi$ и приравняем коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях нулю. В результате будем иметь

$$(1+M_m) \frac{d^2 j_m^{(3)}}{d\tau^2} + 2k_m \frac{d j_m^{(3)}}{d\tau} + \Omega_3^2 j_m^{(3)} = S_m^{(3)}(\tau) \quad (m=0,1,2,\dots) \quad (4.4)$$

$$S_m(\tau) = \frac{4(-1)^m}{(2m+1)\pi} \left\{ \frac{p_0}{\rho_0 \delta_0^2 \omega^2 \varepsilon_4} + \frac{Y_m}{w_m} \left[M_m \left(-\frac{d^2 f}{d\tau^2} \right) + 2k_m \left(-\frac{df}{d\tau} \right) \right] \right\}$$

$$M_m = \frac{6\rho}{5\rho_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2} \left[\frac{2}{(2m+1)\pi} \right]^2, \quad k_m = 5 \frac{\nu}{h_0^2 \omega} M_m, \quad \Omega_3 = \frac{c\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\sqrt{12} h_0 \omega} \left(\frac{2m+1}{2}\pi \right)^2$$

Здесь M_m — безразмерная присоединенная к упругой пластиинке статора масса жидкости, k_m — безразмерный коэффициент демпфирования слоя жидкости, Ω_3 — частота свободных колебаний пластиинки.

Примененная процедура разложения искомых функций в ряды (3.8) эквивалентна методу Бубнова — Галеркина. Первое приближение по методу Бубнова — Галеркина получится при $m=0$ [3].

Решение уравнения (4.4), удовлетворяющее нулевым начальным условиям (3.11), запишется в виде

$$j_m^{(3)} = \int_0^{\tau} S_m^{(3)}(\theta) \frac{(1+M_m) \exp \left[-\frac{k_m}{1+M_m}(\tau-\theta) \right]}{\sqrt{\Omega_3^2(1+M_m)-k_m^2}} \sin \frac{\sqrt{\Omega_3^2(1+M_m)-k_m^2}}{1+M_m} \times \\ \times (\tau-\theta) d\theta \quad (4.5)$$

где $(1+M_m)^{-1}[\Omega_3^2(1+M_m)-k_m^2]^{1/2}$ — частота собственных колебаний системы деформируемая стенка — слой жидкости.

Подставляя (4.5) в формулу (4.3), определим давление в тонком слое жидкости с учетом сил инерции движения жидкости и упругих свойств статора.

Если вибратор 1 совершает периодические колебания, например $f(\tau) = \cos \tau$, то

$$S_m^{(3)} = \frac{4(-1)^m}{(2m+1)\pi} \left\{ \frac{p_0}{\rho_0 \delta_0^2 \omega^2 \epsilon_4} + \frac{Y_m}{w_m} [M_m \cos \tau + 2k_m \sin \tau] \right\}$$

и (4.5) будет определяться формулой

$$j_m^{(3)} = C_1 \exp \left(-\frac{k_m \tau}{1+M_m} \right) \cos \Omega \tau + C_2 \exp \left(-\frac{k_m \tau}{1+M_m} \right) \sin \Omega \tau + \\ + \frac{4(-1)^m}{(2m+1)\pi} \left\{ \left[\frac{2}{(2m+1)\pi} \right]^4 \frac{12p_0}{\rho_0 c^2 \epsilon_2^4 \epsilon_4} + A \cos \tau + B \sin \tau \right\} \\ \Omega = \sqrt{\frac{\Omega_3^2}{1+M_m} - \left(\frac{k_m}{1+M_m} \right)^2}, \quad A = \frac{(\Omega_3^2 - 1 - M_m) M_m - 4k_m^2}{(\Omega_3^2 - 1 - M_m)^2 + 4k_m^2} \frac{Y_m}{w_m} \\ B = \frac{(\Omega_3^2 - 1 - M_m) 2k_m + 2k_m M_m}{(\Omega_3^2 - 1 - M_m)^2 + 4k_m^2} \frac{Y_m}{w_m} \\ C_1 = \frac{4(-1)^{m+1}}{(2m+1)\pi} \left\{ \left[\frac{2}{(2m+1)\pi} \right]^4 \frac{12p_0}{\rho_0 c^2 \epsilon_2^4 \epsilon_4} + A \right\} \\ C_2 = \frac{1}{\Omega} \frac{4(-1)^{m+1}}{(2m+1)\pi} \left\{ \left[\frac{2}{(2m+1)\pi} \right]^4 \frac{12p_0 k_m}{\rho_0 c^2 \epsilon_2^4 \epsilon_4 (1+M_m)} + A \frac{k_m}{1+M_m} + B \right\}$$

5. Самостоятельный интерес представляет вопрос о возбуждении и возможностях подавления резонансных колебаний упругой пластины статора. Зададим возбуждающие колебания вибратора в комплексной форме $f(\tau) = \exp(it)$, $\tau = \omega t$. Вынужденные установившиеся колебания упругой пластины статора представим соответственно в виде $j_m^{(3)} = j \exp[i(\tau+\phi)]$, где j — безразмерная амплитуда, ϕ — угол фазового сдвига $j_m^{(3)}$ относительно $f(\tau)$.

(5.1)

Подставляя $f(\tau)$ и $j_m^{(3)}$ в (4.4), получим

$$[(1-T^2) + 2iT\psi T] j_m^{(3)} = \frac{4(-1)^m}{(2m+1)\pi \Omega_3^2} \left[\frac{p_0}{\rho_0 \delta_0^2 \omega^2 \epsilon_4} + \frac{Y_m}{w_m} (M_m - i2k_m) f(\tau) \right]$$

$$T = \frac{(1+M_m)^{1/2}}{\Omega_3} = T * \omega, \quad T * = \frac{(1+M_m)^{1/2} \sqrt{12} h_0}{c \epsilon_1 \epsilon_2 (m+0,5)^2 \pi^2}$$

$$\psi = \frac{k_m}{\Omega_3 (1+M_m)^{1/2}} = \frac{5\sqrt{12} v M_m}{h_0 c \epsilon_1 \epsilon_2 (m+0,5)^2 \pi^2 (1+M_m)^{1/2}}$$

где T — безразмерная постоянная времени пластины статора, ψ — относительный коэффициент затухания пластины статора.

Из уравнения (5.1) находим комплексный передаточный коэффициент системы возбуждения пластины статора через слой жидкости

$$z = \frac{w_m j_m^{(3)}}{Y_m f(\tau)} = \frac{2\psi T (T_1 - i)}{(1-T^2) + i2\psi T} \frac{4(-1)^m}{(2m+1)\pi} \quad (5.2)$$

$$T_1 = M_m / 2k_m = T_{1*} \omega, \quad T_{1*} = h_0^2 / 10v$$

где T_1 — безразмерная постоянная времени слоя жидкости, передающего возбуждение пластине статора.

Представляя комплексное число z в показательной форме $z = z_m \exp(i\varphi)$, получаем амплитудную z_m и фазовую φ характеристики системы вибратор — слой жидкости — пластина статора

$$\begin{aligned} z_m &= \frac{4(-1)^m}{(2m+1)\pi} (a_1^2 + a_2^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi = -\arctg \frac{a_2}{a_1} \\ a_1 &= \frac{T_1 T_2 - 1}{T_2^2 + 1}, \quad a_2 = \frac{T_2 + T_1}{T_2^2 + 1}, \quad T_2 = \frac{1 - T^2}{2\psi T} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Согласно выражению (5.2), необходимым условием возникновения резонансных колебаний является равенство $T=1$, что имеет место при частоте колебаний вибратора $\omega = \omega_1 = 1/T_*$.

Пусть $T=1$. Тогда выражения (5.3) примут вид

$$\begin{aligned} z_m &= [4(-1)^m / (2m+1)\pi] (1 + T_1^2)^{\frac{1}{2}} \\ \varphi &= \arctg T_1, \quad T_1 = T_{1*} \omega_1 = (h_0^2 / 10v) \omega_1 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Как видно из (5.2), (5.4), уменьшение динамической вязкости жидкости ρv и увеличение зазора h_0 между вибратором и статором приводят к увеличению T_{1*} и, следовательно, к увеличению амплитудной характеристики z_m .

Это означает, что для слабовязкой жидкости $T_1 \gg 1$ и при выполнении условия $\omega = 1/T_*$ возможны резонансные режимы, когда амплитуда вынужденных колебаний упругой пластины статора может оказаться значительно больше амплитуды вынуждающих колебаний вибратора.

Увеличение вязкости жидкости и уменьшение h_0 приведет к уменьшению величины T_1 и, следовательно, к уменьшению амплитуды резонансных колебаний. В качестве условия подавления резонансных колебаний в системе вибратор — слой жидкости — статор можно принять неравенство $T_{1*} < T_*$.

В случае сильновязкой жидкости, при $\psi \gg 1$ и $T_1 \ll 1$, независимо от того, выполняется или нет условие $\omega = 1/T_*$, из (5.3) получаем $z_m = 4(-1)^m / [(2m+1)\pi]$, $\varphi = 0$.

6. Введем в рассмотрение параметр $\beta(\omega) = h_0(\omega/2v)^{\frac{1}{2}}$. Следуя методу [5, 6], получаем уточненные значения безразмерных величин присоединенной к упругой пластине статора массы M_m° жидкости и коэффициента демпфирования k_m° :

$$\begin{aligned} M_m^\circ &= \alpha(\omega) \frac{\rho}{\rho_0 e_1 e_2} \left[\frac{2}{(2m+1)\pi} \right]^2, \quad k_m^\circ = \frac{6\gamma(\omega)v}{\alpha(\omega)h_0^2\omega} M_m^\circ = \frac{3\gamma(\omega)}{\alpha(\omega)\beta^2(\omega)} M_m^\circ \quad (6.1) \\ \alpha(\omega) &= \frac{r_1}{r_1^2 + r_2^2}, \quad \gamma(\omega) = -\frac{1}{6} \beta^2(\omega) \frac{r_2}{r_1^2 + r_2^2}, \quad r_1 = 1 + \frac{1}{\beta(\omega)} (r_3 - r_4) \\ r_2 &= \frac{1}{\beta(\omega)} (r_3 + r_4), \quad r_3 = -\frac{\sinh \beta(\omega)}{\cosh \beta(\omega) + \cos \beta(\omega)}, \quad r_4 = \frac{\sin \beta(\omega)}{\cosh \beta(\omega) + \cos \beta(\omega)} \end{aligned}$$

Здесь $\alpha(\omega)$ и $\gamma(\omega)$ – поправочные коэффициенты, учитывающие влияние зависимости профиля скорости жидкости в слое от $\beta(\omega)$, т.е. от частоты колебания ω .

Амплитудная z_m и фазовая φ характеристики могут быть оставлены в форме (5.3), но с тем отличием, что

$$T = T_* \circ \omega, \quad T_* \circ = \frac{\sqrt{12} h_0 (1+M_m \circ)^{1/2}}{c \varepsilon_1 \varepsilon_2 (m+0,5)^2 \pi^2}, \quad (6.2)$$

$$T_1 = T_* \circ \omega, \quad T_{1*} \circ = \frac{\alpha(\omega) \beta^2(\omega)}{\gamma(\omega) \frac{6}{6\omega}}, \quad \psi \circ = \frac{k_m \circ}{\Omega_3 (1+M_m \circ)^{1/2}}$$

Из необходимого условия возникновения резонансных колебаний $T=1$ имеем уравнение для нахождения частоты колебаний вибратора $\omega=\omega_1$, при которой возможны резонансные колебания пластины статора $\omega_1 T_* (\omega_1) = 1$.

Подставляя $\omega=\omega_1$ из последнего соотношения в (6.2) и далее в (5.4), получим

$$z_m \circ_1 = \frac{4(-1)^m}{(2m+1)\pi} \left[1 + \frac{\alpha^2(\omega_1)}{\gamma^2(\omega_1)} \frac{\beta^4(\omega_1)}{36} \right]^{1/2}, \quad \varphi \circ = \operatorname{arctg} \frac{\alpha(\omega_1)}{\gamma(\omega_1)} \frac{\beta^2(\omega_1)}{6} \quad (6.3)$$

Пусть величина ω_1 такова, что $\beta(\omega_1) < 4$. Тогда коэффициенты α и γ можно считать не зависящими от частоты колебания ω_1 и равными $\alpha=1,2$ и $\gamma=1$. Это наглядно показано на графиках в [5, 6]. Подставляя $\alpha=1,2$ и $\gamma=1$ в (6.3), будем иметь совпадение с (5.4). Следовательно, при $\beta(\omega_1) < 4$ получим

$$z_m \circ_1 = z_m \circ_1 < 13,4104 (-1)^m / [(2m+1)\pi]$$

Пусть ω_1 такова, что $\beta(\omega_1)$ заведомо больше четырех. Тогда $\alpha \approx 1$ и $\gamma(\omega_1) \approx 1/\nu \beta(\omega_1)$. Подставим эти значения α и γ в (6.3):

$$z_m \circ_1 = \frac{4(-1)^m}{(2m+1)\pi} [1 + \beta^2(\omega_1)]^{1/2} \approx \frac{4(-1)^m}{(2m+1)\pi} h_0 \left(\frac{\omega_1}{2\nu} \right)^{1/2} \quad (6.4)$$

$$\varphi \circ = \operatorname{arctg} h_0 \left(\frac{\omega_1}{2\nu} \right)^{1/2}$$

Из сравнения (5.4) и (6.4) видно, что при $\beta(\omega_1) \gg 1$ амплитуда резонансных колебаний упругой пластины статора по формуле (6.4) в $[\beta(\omega_1)/5]$ раз меньше, чем по формуле (5.4), которая основывается на результатах учета гидромеханических сил инерции на втором шаге итерации и приемлема для случаев, когда профиль скорости жидкости довольно близок к параболическому. Это имеет место при $\beta(\omega_1) < 4$. Если же $\beta(\omega_1) \gg 1$, то профиль скорости жидкости становится равномерным, а сдвиговая деформация жидкости у твердых стенок происходит в тонких пристеночных слоях толщины порядка $(2\nu/\omega_1)^{1/2}$. Увеличение ω_1 и уменьшение ν приводят к уменьшению толщины пристеночных слоев и, следовательно, к относительному увеличению сил трения жидкости о стенки. Данный эффект в случае резонансных режимов учитывает формула (6.4).

Если частота колебаний вибратора ω отличается от резонансной частоты ω_1 , то результаты расчета z_m по формуле (5.3) с учетом T , T_1 , T_2 , ψ соответственнопп. 5, 6 достаточно близко совпадают.

7. Если рассматривать оба предыдущих режима $\lambda=O(1)$, $\lambda=o(1)$ одновременно, то, применяя метод итерации к задаче (2.1), (2.2), на втором шаге итерации получим

$$P_1 = \frac{12}{(1+\lambda f)^3} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{df}{d\tau} \right) (1-\xi^2) - \frac{w_m}{Y_m} \int_{-1}^1 \left(\int_0^\xi \frac{\partial W_3}{\partial \tau} d\xi \right) d\xi \right] +$$

$$+\frac{6R}{5(1+\lambda f)} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{d^2 f}{d\tau^2} \right) (1-\xi^2) - \frac{w_m}{Y_m} \int_{\xi}^1 \left(\int_0^{\xi} \frac{d^2 W_3}{d\tau^2} d\xi \right) d\tau \right] + \\ + \frac{51R\lambda}{35(1+\lambda f)^2} \left(-\frac{df}{d\tau} \right)^2 (1-\xi^2) - \quad (7.1)$$

$$-\frac{102R\lambda}{35(1+\lambda f)^2} \left(-\frac{df}{d\tau} \right) \frac{w_m}{Y_m} \int_{\xi}^1 \left(\int_0^{\xi} \frac{\partial W_3}{\partial \tau} d\xi \right) d\tau - \\ - \frac{81R\lambda}{35(1+\lambda f)^2} \frac{w_m}{Y_m} \int_{\xi}^1 \left[\frac{\partial W_3}{\partial \tau} \left(\left(-\frac{df}{d\tau} \right) \xi - \frac{w_m}{Y_m} \int_0^{\xi} \frac{dW_3}{d\tau} d\xi \right) \right] d\tau - \\ \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = \frac{6}{(1+\lambda f)^2} \left[\left(-\frac{df}{d\tau} \right) \xi - \frac{w_m}{Y_m} \int_0^{\xi} \frac{\partial W_3}{\partial \tau} d\xi \right] + \\ + \frac{R}{10} \left[\left(-\frac{d^2 f}{d\tau^2} \right) \xi - \frac{w_m}{Y_m} \int_0^{\xi} \frac{\partial^2 W_3}{\partial \tau^2} d\xi \right] + \frac{9}{35} \frac{R\lambda}{1+\lambda f} \left[\left(-\frac{df}{d\tau} \right)^2 \xi - \right. \\ \left. - \frac{w_m}{Y_m} \left(-\frac{df}{d\tau} \right) \int_0^{\xi} \frac{\partial W_3}{\partial \tau} d\xi \right] + \frac{19}{35} \frac{R\lambda}{1+\lambda f} \frac{w_m}{Y_m} \frac{\partial W_3}{\partial \tau} \left[\left(-\frac{df}{d\tau} \right) \xi - \right. \\ \left. - \frac{w_m}{Y_m} \int_0^{\xi} \frac{\partial W_3}{\partial \tau} d\xi \right] \quad (7.2)$$

Следует отметить, что, применяя метод итераций, получение формул (7.1), (7.2) можно привести к вычислению квадратур. Для этого из системы уравнений (2.1) с учетом краевых условий (2.2) исключим V и P , тогда получим одно уравнение для определения U :

$$U = 6 \left[\left(-\frac{df}{d\tau} \right) \xi - \frac{w_m}{Y_m} \int_0^{\xi} \frac{\partial W_3}{\partial \tau} d\xi \right] \left[\frac{\eta}{(1+\lambda f)^2} - \frac{\eta^2}{(1+\lambda f)^3} \right] - \\ - R \left\{ \frac{6\eta}{(1+\lambda f)^2} - \frac{6\eta^2}{(1+\lambda f)^3} \right\} \int_0^{1+\lambda f} \left(\int_0^{\eta} AU d\eta \right) d\eta - \\ - \left[\frac{2\eta}{(1+\lambda f)} - \frac{3\eta^2}{(1+\lambda f)^2} \right] \int_0^{1+\lambda f} AU d\eta - \int_0^{\eta} AU d\eta \} \quad (7.3)$$

$$AU = \int_0^{\eta} \left\{ \frac{\partial U}{\partial \tau} + \lambda \left[U \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta} \left(\int_0^{\eta} \frac{\partial U}{\partial \xi} d\eta + \frac{w_m}{Y_m} \frac{\partial W_3}{\partial \tau} \right) \right] \right\} d\eta$$

При этом будем иметь следующие формулы для определения P , V , $\langle U \rangle$:

$$P = \frac{12}{(1+\lambda f)^3} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{df}{d\tau} \right) (1-\xi^2) - \int_{\xi}^1 \frac{w_m}{Y_m} \left(\int_0^{\xi} \frac{\partial W_3}{\partial \tau} d\xi \right) d\tau \right] - \\ - \frac{6R}{(1+\lambda f)^2} \int_{\xi}^1 \left\{ \frac{2}{(1+\lambda f)} \int_0^{1+\lambda f} \left(\int_0^{\eta} AU d\eta \right) d\eta - \int_0^{1+\lambda f} AU d\eta \right\} d\xi$$

$$V = - \int_0^\eta \frac{\partial U}{\partial \xi} d\eta - \frac{w_m}{Y_m} \frac{\partial W_s}{\partial \tau}, \quad \langle U \rangle = \frac{1}{1+\lambda f} \int_0^{1+\lambda f} U d\eta =$$

$$= \frac{1}{1+\lambda f} \left[\left(-\frac{df}{d\tau} \right) \xi - \frac{w_m}{Y_m} \int_0^\xi \frac{\partial W_s}{\partial \tau} d\xi \right].$$

Полагая $d(AU)/d\eta = 0$, получим первый шаг итерации, соответствующий теории смазки [2, 7]. На втором шаге итерации полученные значения U, P подставляем в AU ; интегрируя по η , получим формулы (7.1), (7.2). Процесс итерации можно продолжить далее и он будет сходящимся при $R < 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кibel' И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2, М.: Физматгиз, 1963. 727 с.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
3. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. М.: Наука, 1976. 416 с; Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979. 320 с.
4. Григорьев Э. И., Горшков А. Г. Нестационарная гидроупругость оболочек. Л.: Судостроение, 1974. 208 с.
5. Андрейченко К. П. К теории жидкостного демпфирования в поплавковых приборах.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 5, с. 13–23.
6. Андрейченко К. П. К теории демпферов с тонкими слоями жидкости.— Машино-ведение, 1978, № 1, с. 69–75.
7. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 с.
8. Швец М. Е. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя.— ПММ, 1949, т. 13, вып. 3, с. 257–266.
9. Огibalov П. М., Mirzadjanzade A. X. Нестационарные движения вязкопластичных сред. М.: Изд-во МГУ. 1977. 415 с.

Саратов

Поступила в редакцию
23.I.1981