

УДК 533.6.013.42

НИЗКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ, ПОГРУЖЕННОЙ В ЖИДКОСТЬ

ГОЛОВАНОВ В. А.

Рассмотрена задача о вынужденных колебаниях замкнутой оболочки вращения в бесконечной идеальной сжимаемой жидкости. Изучен случай малой изменчивости напряженно-деформированного состояния оболочки, приближенно описываемый на основе безмоментной теории. Применен метод граничных интегральных уравнений, позволивший свести исходную трехмерную дифференциальную задачу к двумерной интегродифференциальной задаче, которая решена прямым численным методом. Приведены результаты исследования колебаний эллипсоидальной оболочки вращения. Построены графики перемещений точек оболочки и давления в жидкости, исследована зависимость амплитуды прогиба оболочки от частоты возбуждения, найдены резонансные частоты.

1. Рассмотрим установившиеся гармонические колебания замкнутой выпуклой упругой оболочки вращения, погруженной в бесконечную идеальную сжимаемую жидкую среду, характеризующуюся плотностью ρ_a и скоростью звука c_a . Ограничимся случаем однородной изотропной оболочки постоянной толщины h с гладкой срединной поверхностью S . Материал оболочки характеризуется плотностью ρ , модулем Юнга E , коэффициентом Пуассона ν .

Отнесем поверхность S к географической системе координат θ, ψ ($0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \psi \leq 2\pi$). Пусть колебания возбуждаются нормальной нагрузкой, поверхностная плотность которой задается функцией

$$Z(\theta, \psi, t) = F(\theta) \cos m\psi e^{i\Omega t} \quad (1.1)$$

Введем следующие ограничения: число волн по параллели m мало, функция $F(\theta)$ гладкая и медленно меняющаяся, частота колебаний Ω меньше нижней границы непрерывного спектра безмоментного оператора теории оболочек [1]. В рамках указанных ограничений допустимо описывать движение оболочки на основе безмоментной теории.

Поведение среды при малых возмущениях определяется потенциалом скорости Φ , удовлетворяющим волновому уравнению в области T , заполненной средой, кинематическому условию контакта оболочки и среды и условиям Зоммерфельда на бесконечности. Отделяя временной множитель $e^{i\Omega t}$, приходим к следующей краевой задаче для уравнения Гельмгольца относительно комплексной амплитуды потенциала Φ° :

$$\Delta \Phi^\circ + k^2 \Phi^\circ = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi^\circ}{\partial n} \right|_S = -i\Omega W^\circ, \quad k = \frac{\Omega}{c_a} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \Phi^\circ}{\partial \eta} + ik\Phi^\circ = o(\eta^{-1}), \quad \Phi^\circ = o(1), \quad \eta \rightarrow \infty$$

где n — внешняя нормаль поверхности S , W° — комплексная амплитуда нормальной компоненты перемещения точки поверхности S (положительному прогибу соответствует перемещение внутрь оболочки), η — расстояние между фиксированной и переменной точками области T .

Краевая задача (1.2) может быть решена методом граничных интегральных уравнений [2], позволяющим свести трехмерную краевую задачу к двумерной задаче для интегрального уравнения по границе области. Если граница S области T относится к классу поверхностей Ляпунова, то интегральные соотношения, соответствующие краевой задаче (1.2), имеют вид

$$\alpha \Phi^{\circ}(P) = \iint_S \left[\Phi^{\circ}(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left(\frac{e^{-i k \xi}}{\xi} \right) - \frac{\partial \Phi^{\circ}(Q)}{\partial n_Q} \frac{e^{-i k \xi}}{\xi} \right] dS_Q \quad (1.3)$$

$$\alpha = 2\pi, P \in S; \quad \alpha = 4\pi, P \in T$$

где ξ — расстояние между точками P и Q . Отметим, что при $P \in S$ подынтегральное выражение в (1.3) имеет особенность при $\xi = 0$. Формула, выражающая динамическую составляющую давления в среде, после отделения временного множителя принимает вид

$$P^{\circ} = -i \Omega \rho_0 \Phi^{\circ} \quad (1.4)$$

Выполним разделение переменных, вводя выражения $U^{\circ}(\theta, \psi) = U(\theta) \cos m\psi$, $V^{\circ}(\theta, \psi) = V(\theta) \sin m\psi$, $W^{\circ}(\theta, \psi) = W(\theta) \cos m\psi$ (1.5)

$$\Phi^{\circ}(R, \theta, \psi) = \Phi(R, \theta) \cos m\psi, \quad \frac{\partial \Phi^{\circ}(R, \theta, \psi)}{\partial n} = X(R, \theta) \cos m\psi$$

$$\Phi^{\circ}|_S = \Phi_0(\theta) \cos m\psi, \quad \left. \frac{\partial \Phi^{\circ}}{\partial n} \right|_S = X_0(\theta) \cos m\psi$$

где R — радиальная координата сферической системы координат; U° , V° — комплексные амплитуды тангенциальных компонент перемещения точки срединной поверхности.

Динамические уравнения оболочки с учетом (1.1), (1.4) и (1.5) после приведения к безразмерной форме записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \alpha_1 \frac{du}{d\theta} + (\alpha_2 + \omega^2 \alpha_0) u + \alpha_3 \frac{dv}{d\theta} + \alpha_4 v + \alpha_5 \frac{dw}{d\theta} + \alpha_6 w &= 0 \\ -\alpha_3 \frac{du}{d\theta} + \alpha_4 u + \alpha_7 \frac{d^2 v}{d\theta^2} + \alpha_8 \frac{dv}{d\theta} + (\alpha_9 + \omega^2 \alpha_0) v + \alpha_{10} w &= 0 \\ -\alpha_5 \frac{du}{d\theta} + \alpha_{11} u + \alpha_{10} v + (\alpha_{12} + \omega^2 \alpha_0) w &= ip_1 \omega \alpha_0 \Phi_0 + p_2 \alpha_0 f, \quad \alpha_i = \alpha_i(\theta) \quad (i=0,1,\dots,12) \\ u = \frac{U}{c_u}, \quad v = \frac{V}{c_u}, \quad w = \frac{W}{c_u}, \quad \Phi_0 = \frac{\Phi_0}{c_\Phi}, \quad f = \frac{F}{c_f}, \quad \omega = \Omega a \left[\frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \right]^{1/2} \\ p_1 = \frac{a \rho_a c_\Phi}{h \rho c_u} \left[\frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \right]^{1/2}, \quad p_2 = \frac{(1-\nu^2) a^2 c_f}{E h c_u} \end{aligned}$$

где c_u , c_Φ , c_f — масштабные константы, ω — безразмерная частота, a — характерный размер оболочки.

Исключим функцию w из первых двух уравнений системы, используя третье уравнение (в рассматриваемом интервале частот $\alpha_{12} + \omega^2 \alpha_0 \neq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$). В результате придем к системе уравнений

$$\begin{aligned} \beta_1 \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \beta_2 \frac{du}{d\theta} + \beta_3 u + \beta_4 \frac{dv}{d\theta} + \beta_5 v &= -ip_1 \omega \left(\gamma_1 \frac{d\Phi_0}{d\theta} + \gamma_2 \Phi_0 \right) - \\ &- p_2 \left(\gamma_1 \frac{df}{d\theta} + \gamma_2 f \right) \\ \beta_6 \frac{du}{d\theta} + \beta_7 u + \beta_8 \frac{d^2 v}{d\theta^2} + \beta_9 \frac{dv}{d\theta} + \beta_{10} v &= ip_1 \omega \gamma_3 \Phi_0 + p_2 \gamma_3 f \end{aligned} \quad (1.6)$$

Рассмотрим однородные относительно u, v уравнения, соответствующие (1.6). В случае гладкой поверхности S особые точки этих уравнений $\theta=0$ и $\theta=\pi$ являются регулярными. Заменяем коэффициенты β_i главными членами их асимптотических разложений при $\theta \rightarrow 0$. Решив полученные уравнения, найдем

$$u_0 = C_1 \theta^{m+1} + C_2 \theta^{m-1}, \quad v_0 = c C_1 \theta^{m+1} - C_2 \theta^{m-1} \quad (m \geq 1) \quad (1.7)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Считая функции (1.7) приближенным решением задачи на отрезке $0 \leq \theta \leq \theta_0$ ($0 < \theta_0 \ll 1$), поставим для них условия сопряжения при $\theta = \theta_0$ с решением u, v :

$$u_0 = u, \quad v_0 = v, \quad \frac{du_0}{d\theta} = \frac{du}{d\theta}, \quad \frac{dv_0}{d\theta} = \frac{dv}{d\theta}$$

Замена в этих равенствах u_0, v_0 их выражениями (1.7) и исключение C_1, C_2 дает два условия, связывающие значения функций $u, v, du/d\theta, dv/d\theta$ при $\theta = \theta_0$. Таким же образом придем к аналогичным условиям при $\theta = \pi - \theta_0$. В случае эллипсоидальной оболочки указанные условия имеют вид

$$(1+c)\theta_0 \frac{du}{d\theta} + (-1)^n [1-c+m(1+c)]u - 2v = 0 \quad (1.8)$$

$$(1+c)\theta_0 \frac{dv}{d\theta} + (-1)^n [-1+c+m(1+c)]v - 2cu = 0$$

$$n=1, \theta = \theta_0; \quad n=2, \theta = \pi - \theta_0$$

$$c = \left[1 - \omega^2 t^2 \frac{m(1+\nu)+4}{4(1-\nu^2)} \right] \left[1 + \omega^2 t^2 \frac{m(1+\nu)-2(1-\nu)}{4(1-\nu^2)} \right]^{-1}$$

где $t = a/b$ — отношение длин полуосей эллипсоида, a — радиус экватора. Условия (1.8) необходимы для численного решения задачи.

Вернемся к интегральному уравнению (1.3). Подстановка выражений (1.5) преобразует его в уравнение, имеющее в безразмерной форме следующий вид:

$$2\pi\varphi_0(\theta) \cos m\psi = \int_0^\pi K_1(\theta, \psi; \theta') \varphi_0(\theta') d\theta' - \int_0^\pi K_2(\theta, \psi; \theta') \chi_0(\theta') d\theta' \quad (1.9)$$

Используя кинематическое условие контакта оболочки и среды, получим соотношение

$$\chi_0 = -ip_4 \omega \left(\delta_1 \frac{du}{d\theta} + \delta_2 u + \delta_3 v - ip_1 \omega \delta_4 \varphi_0 - p_2 \delta_4 f \right) \quad (1.10)$$

$$p_4 = \{E/[\rho(1-\nu^2)]\}^{1/2} c_u / c_\varphi$$

Таким образом, требуется решить дифференциальные уравнения (1.6) и интегральное уравнение (1.9) с учетом соотношения (1.10).

2. Для численного решения задачи введем на отрезке $\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$ ($0 < \theta_0 \ll 1$) равномерную сетку

$$\Delta_N = \{\theta_j = \theta_0 + j\delta \quad (j=0, 1, \dots, N-1), \delta = (\pi - 2\theta_0)/(N-1)\}$$

Выполним аппроксимацию производных первого и второго порядков центральными разностными отношениями, причем для аппроксимации производных в точках $\theta = \theta_0$ и $\theta = \theta_{N-1}$ введем законтурные узловые точки θ_{-1} и θ_N . Ниже индексами R и I будем отмечать соответственно действительные и мнимые части величин. Замена производных в уравнениях (1.6) на сетке Δ_N разностными выражениями приводит к трехточечным системам векторных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned}
 P^j X_\alpha^{j-1} + Q^j X_\alpha^j + R^j X_\alpha^{j+1} - (-1)^n p_1 \omega [(1 - \delta_i^j) S^j Y_\beta^{j-1} - T^j Y_\beta^j - (1 - \delta_{N-i}^j) S^j Y_\beta^{j+1}] = \\
 = -\delta_\alpha^R p_2 Z_\beta^j \quad (j=0, 1, \dots, N-1; \alpha, \beta=R, I) \quad (\alpha \neq \beta) \quad (2.1) \\
 n=1, \alpha=R; n=2, \alpha=I, \delta_i^k=1, i=k; \delta_i^k=0, i \neq k
 \end{aligned}$$

Здесь P^j, Q^j, R^j — матрицы размера 2×2 , S^j, T^j, Z_β^j — двумерные векторы, $X_\alpha^j = (u_\alpha^j, v_\alpha^j)^T$ и $Y_\alpha^j = \varphi_{0\alpha}^j$ — искомые сеточные функции.

Подчиним решение в узлах θ_0 и θ_{N-1} условиям типа (1.8), аппроксимация которых дает уравнения

$$-\Gamma_1 X_\alpha^{-1} + \Gamma_2 X_\alpha^0 + \Gamma_3 X_\alpha^1 = 0 \quad (2.2)$$

$$-\Gamma_3 X_\alpha^{N-2} + \Gamma_4 X_\alpha^{N-1} + \Gamma_5 X_\alpha^N = 0 \quad (\alpha=R, I)$$

где $\Gamma_i (i=1, 2, 3, 4)$ — матрицы размера 2×2 .

Аппроксимация интегрального уравнения (1.9) может быть осуществлена не единственным образом. Простой и удовлетворительный способ основан на кусочно-постоянной аппроксимации функций φ_0 и χ_0 . Для его реализации введем на отрезке $0 \leq \theta' \leq \pi$ квазиравномерную сетку

$$\Delta'_{N+1} = \{\theta'_j = 1/2(\theta_{j-1} + \theta_j), \theta'_0 = 0, \theta'_N = \pi \quad (j=1, 2, \dots, N-1)\}$$

Представим интегралы по отрезку $[0, \pi]$ в виде суммы интегралов по частичным отрезкам $[\theta'_j, \theta'_{j+1}]$ ($j=0, 1, \dots, N-1$) и, наконец, примем $\varphi_0(\theta') \sim \varphi_0^j, \chi_0(\theta') \sim \chi_0^j$ для $\theta' \in (\theta'_j, \theta'_{j+1})$. Аппроксимируя уравнение (1.9) на сетке Δ_N указанным способом и выполняя интегрирование, получим векторные уравнения вида

$$\begin{aligned}
 -p_4 \omega [V_1 X_\alpha + (-1)^n V_2 X_\beta] + A_1 Y_\alpha - (-1)^n A_2 Y_\beta = -p_2 p_4 \omega (\delta_\alpha^R Z_{a1} + \delta_\alpha^I Z_{a2}) \quad (2.3) \\
 A_1 = G_1 - p_1 p_4 \omega^2 G_2, \quad A_2 = G_3 - p_1 p_4 \omega^2 G_4
 \end{aligned}$$

$$X_\alpha = (u_\alpha^{-1}, v_\alpha^{-1}, u_\alpha^0, v_\alpha^0, \dots, u_\alpha^N, v_\alpha^N)^T, \quad Y_\alpha = (\varphi_{0\alpha}^0, \varphi_{0\alpha}^1, \dots, \varphi_{0\alpha}^{N-1})^T$$

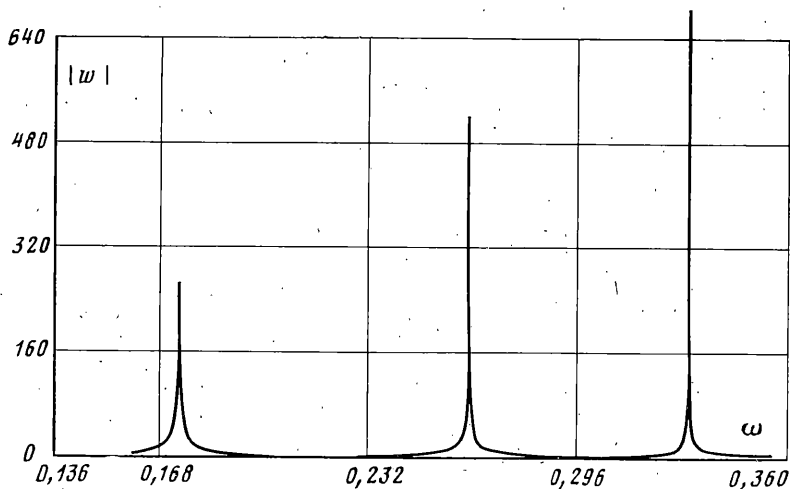
Здесь $G_i (i=1, 2, 3, 4)$ — матрицы размера $N \times N$; V_1, V_2 — матрицы размера $N \times (2N+4)$; Z_{a1}, Z_{a2} — векторы порядка N ; X_α, Y_α — соответственно $(2N+4)$ -векторы и N -векторы, составленные из значений искомых сеточных функций.

Элементы матриц и векторов Z_{a1}, Z_{a2} зависят от $p_3 \omega$ ($p_3 = \{E/[\rho(1-v^2)]\}^{1/2} c_a$), причем так, что при $p_3 = 0$ получим $G_3 = G_4 = 0, V_1 = 0, Z_{a1} = 0$ и, следовательно, $X_I = 0, Y_R = 0$.

При реализации алгоритма численное интегрирование в данной работе проводилось посредством разбиения каждого из отрезков интегрирования $\theta'_j \leq \theta' \leq \theta'_{j+1}$ и $0 \leq \psi' \leq 2\pi$ на варьируемое число отрезков и вычисления интегралов по каждому из них с помощью квадратурных формул Гаусса с фиксированными числами узлов, различными для переменных θ' и ψ' . При интегрировании по ψ' учитывалась четность подынтегральной функции (при $\psi=0$) относительно $\psi'=\pi$.

В случае достаточно большого N объем вычислений при интегрировании по θ' можно уменьшить, полагая подынтегральные функции равными их значениям в точках $\theta' = \theta_j$. Этот прием правомерен, если узел θ_j достаточно удален от отрезка интегрирования $[\theta'_k, \theta'_{k+1}]$. Кроме того, объем вычислений существенно сокращается, когда меридиан поверхности S симметричен относительно экваториального радиуса и образована сетка с узлами $\theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{N-1}$ ($N=2n$), $\theta_{n+j} = \pi - \theta_{n-j-1}$ ($j=0, 1, \dots, n-1$). В этом случае требуется вычислить лишь половину элементов матриц G_i , так как $g_{lm}^{(i)} = g_{jk}^{(i)}$ ($j=1, 2, \dots, N; k=1, 2, \dots, n; l=N+1-j, m=N+1-k$).

В результате аппроксимации на сетке Δ_N дифференциальных и интегральных уравнений приходим к связанным системам векторных уравнений



Фиг. 1

(2.1)–(2.3). Уравнения (2.1), (2.2) представим в виде

$$S X_{\alpha} - (-1)^n p_1 \omega P Y_{\beta} = -\delta_{\alpha}^R p_2 Z_s$$

где S – матрица размера $(2N+4) \times (2N+4)$, P – матрица размера $(2N+4) \times N$, Z_s – вектор порядка $2N+4$. Заметим, что порядок полной системы алгебраических уравнений равен $6N+8$. Для частоты возбуждения, отличной от безмоментных собственных частот оболочки, существует обратная

матрица S^{-1} . Исключая в этом случае векторы X_R и X_I , получим систему векторных уравнений

$$M_1 Y_R + M_2 Y_I = Z_I, \quad -M_2 Y_R + M_1 Y_I = Z_2$$

Этот прием позволяет понизить порядок разрешающей системы алгебраических уравнений до $2N$. Обращение матрицы S в силу ленточности структуры можно провести методом матричной прогонки [3].

3. Приведем результаты численного исследования колебаний эллипсоидальной оболочки вращения относительной толщины $h/a=0,005$ с отношением длин полуосей $a/b=0,75$ (a – радиус экватора). Безразмерные параметры задачи имеют следующие значения: $\nu=0,3$; $p_1=4,83$; $p_2=0,91$; $p_3=3,54$; $p_4=5,31$. Функция нагрузки задавалась в виде линейной комбинации ортонормированных полиномов Хорви [4]: $f(\theta)=z_1+0,5z_2+0,25z_3$, $z_1=1,1093(1-x^2)^2$, $z_2=3,679x(1-x^2)^2$, $z_3=0,8943(-1+11x^2)(1-x^2)^2$, $x=-(\pi-2\theta)/(\pi-2\theta_0)$. Шаговым методом были найдены приближенные значения первых резонансных частот ω_n для фиксированного числа волн по параллели m . Резуль-

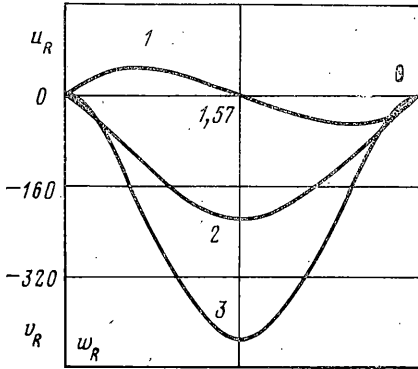
m	n	$p_3 \neq 0$	$p_3 = 0$	$p_1 = 0$
2	1	0,174	0,177	0,504
	2	0,262	0,269	0,703
	3	0,330	0,335	0,822
3	1	0,206	0,209	0,551
	2	0,279	0,283	0,692
4	1	–	0,230	0,561
	2	–	0,293	0,674

таты расчетов даны в таблице, причем $p_3 \neq 0$ соответствует случаю сжимаемой жидкости, а $p_3 = 0$ — случаю несжимаемой жидкости. Там же приведены оценки безмоментных собственных частот оболочки ($p_1 = 0$).

Отметим, что пренебрежение сжимаемостью жидкости приводит к уменьшению объема потребной памяти ЭВМ и сокращает время счета для заданного числа узлов сетки. Учет сжимаемости жидкости в рассмотренных случаях не дает заметного уточнения оценок резонансных частот. Однако для определения форм колебаний вблизи резонансов учет сжимаемости необходим.

Наглядное представление о резонансах дает график зависимости модуля безразмерной меридиональной формы прогиба $|w| = (w_R^2 + w_I^2)^{1/2}$ в фиксированной точке от безразмерной частоты ω , изображенный для случая $m=2$ на фиг. 1.

Отношение резонансного значения модуля прогиба к его минимальному значению в окрестности n -й резонансной частоты $|\omega - \omega_n| \leq 0,03\omega_n$ для $m=2$ приближенно равно 13, 53, 99 для $n=1, 2, 3$ соответственно.



Фиг. 2

Эти результаты позволяют сделать вывод о малости мнимых частей комплексных собственных значений рассматриваемой задачи [5]. О величине резонансных всплесков можно судить на основании того факта, что отношение модуля прогиба для резонансных частот ω_1 и ω_2 к его значению для $\omega = (\omega_1 + \omega_2) / 2$ приближенно равно 670 и 1290 (ср. [6]).

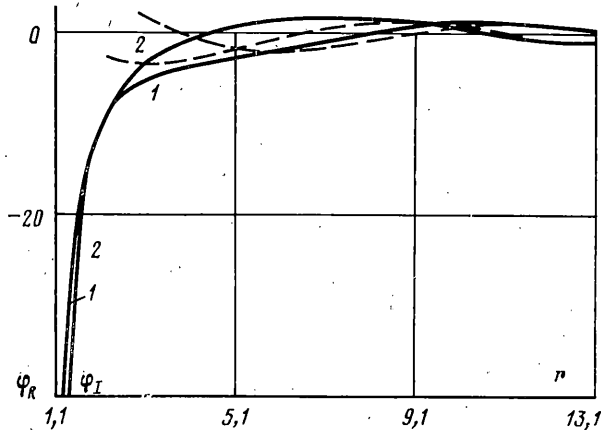
Отметим, что вне указанных выше окрестностей резонансных частот имеют место неравенства

$$|u_I| \ll |u_R|, \quad |v_I| \ll |v_R|,$$

$$|w_I| \ll |w_R|, \quad |\varphi_{0I}| \ll |\varphi_{0R}|$$

На фиг. 2 представлены графики функций $u_R(\theta)$, $v_R(\theta)$, $w_R(\theta)$ (кривые 1, 2, 3) для случая колебаний с частотой, близкой к первой резонансной частоте при $m=2$.

Располагая значениями потенциала и его нормальной производной на поверхности S и используя (1.3), можем определить значения потенциала в произвольной точке среды, причем потенциал в дальнем поле можно вычислить по асимптотической формуле.



Фиг. 3

Графики зависимостей φ_R (кривая 1) и φ_I (кривая 2) от безразмерной радиальной координаты $r = R/a$ (при $\theta = \text{const}$, $m=2$, $\omega \approx \omega_1$) даны на фиг. 3. Там же приведены результаты вычислений по асимптотическим формулам (штриховые линии). Характерной особенностью является быстрое уменьшение $|\varphi_R|$, $|\varphi_I|$ при удалении от оболочки, которое сменяется сравнительно слабым затуханием с осцилляциями. Для частот, лежащих вне малых окрестностей резонансных частот, быстро меняющейся вблизи оболочки является функция φ_I , причем амплитуды осцилляций φ_R и φ_I при достаточном удалении от оболочки останутся величинами одного порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.
2. Метод граничных интегральных уравнений. М.: Мир, 1978. 210 с.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
4. Hogvaу G., Born J. S. Tables of self-equilibrating functions.— J. Math. and Phys., 1955, v. 33, No. 4, p. 360—373.
5. Васильев Д. Г. Формула для функции распределения частот оболочки вращения, погруженной в жидкость.— Докл. АН СССР, 1979, т. 248, № 2, с. 325—328.
6. Попов А. Л., Чернышев Г. Н. О резонансных частотах оболочек, колеблющихся в бесконечной жидкости.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 5, с. 869—876.

Москва

Поступила в редакцию
10.I.1980