**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1982**

УДК 531.383

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СВЯЗИ С КОНЦЕПЦИЕЙ ГЕРЦА В МЕХАНИКЕ

ЖУРАВЛЕВ В. Ф.

Подвергается анализу концепция Герца о возможности построения бессиловой механики.

Получен критерий потенциальности гироскопических сил и критерий представимости по Герцу потенциальных позиционных сил.

Будем рассматривать автономные замкнутые механические системы, для которых выполняется закон сохранения энергии. Их уравнения движения могут быть представлены в следующей общей форме:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial K}{\partial q}=\Gamma\dot{q}+\frac{\partial U}{\partial q} \tag{1}$$

Здесь q, $\dot{q}\in R^n$ — обобщенные координаты и обобщенные скорости, K — кинетическая энергия, U — силовая функция, $\Gamma\dot{q}$ — гироскопические силы (матрица $\Gamma(q)$ — кососимметрическая: $\Gamma'=-\Gamma$).

Системы вида (1) введены в рассмотрение Томсоном и Тетом [1] и носят название гироскопических.

Поставим следующую задачу. Найти необходимые и достаточные условия существования и построить такую свободную (без обобщенных сил) механическую систему, имеющую n позиционных и m циклических координат, чтобы после игнорирования последних построенная система и исходная (1) были бы динамически эквивалентными.

Системы (1), для которых такие эквивалентные представления существуют, будем называть представимыми по Герцу.

Герц полагал [2], что такое представление возможно для любых систем вида (1).

Как будет показано ниже, для представимости по Герцу правые части (1) должны быть подчинены определенным условиям, которые не всегда выполняются.

Прежде всего, очевидно, что поскольку при игнорировании циклических координат могут получиться лишь потенциальные гироскопические силы, то и исходные гироскопические силы в системе (1) должны быть потенциальными.

Критерий потенциальности гироскопических сил (т. е. существования для них обобщенного потенциала) дает следующая теорема

Теорема 1. Пусть коэффициенты $\gamma_{i_1i_2}(q)$, представляющие собой коэффициенты матрицы гироскопических сил Γ, являются гладкими функциями обобщенных координат. Тогда для существования обобщенного потенциала этих сил необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{\partial\gamma_{i_1i_2}}{\partial q_{i_3}}+\frac{\partial\gamma_{i_3i_1}}{\partial q_{i_2}}+\frac{\partial\gamma_{i_2i_3}}{\partial q_{i_1}}=0 \tag{2}$$

(индексы i_1, i_2, i_3 независимо пробегают множество $1,\ldots,n$).

В теореме предполагается, что $n \geqslant 3$, так как для $n=1$ гироскопических сил нет, а для $n=2$ они заведомо имеют обобщенный потенциал.

Доказательство. Существование обобщенного потенциала означает, что гироскопические силы могут быть представлены в виде

$$\Gamma \dot{q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial V}{\partial q} \tag{3}$$

Здесь V — обобщенный потенциал, однородная линейная форма скоростей

$$V = \sum_{i=1}^{n} a_i(q)\dot{q}_i \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), получим

$$\partial a_{i_1}/\partial q_{i_2} - \partial a_{i_2}/\partial q_{i_1} = \gamma_{i_1 i_2} \quad (i_1, i_2 = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

Система линейных уравнений в частных производных первого порядка (5) и определяет неизвестные коэффициенты a_i линейной формы (4) при условии, что эта система разрешима. Критерий ее разрешимости и есть критерий существования обобщенного потенциала.

Заметим, что для получения достаточных условий разрешимости системы (5) функции $a_i(q)$ можно искать наложив на них дополнительно условия $\partial a_{i_1}/\partial q_{i_2} + \partial a_{i_2}/\partial q_{i_1} = 0$.

В этом случае система (5) сводится к системе Фробениуса [4]: $\partial a_{i_1}/\partial q_{i_2} = {}^1/_2 \gamma_{i_1 i_2}$. Условия теоремы Фробениуса и будут достаточными условиями разрешимости системы (5).

Впервые необходимые и достаточные условия разрешимости уравнений (5) были получены Сусловым [5]. Однако приведенное им доказательство содержит эффективную процедуру построения квадратур для системы (5) и поэтому является излишне громоздким.

Использование для доказательства теории дифференциальных форм [6] не только позволяет его резко упростить, но также и проясняет некоторые геометрические аспекты проблемы.

Линейной форме (4) поставим в соответствие следующую дифференциальную 1-форму:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i(q)\,dq_i \tag{6}$$

Наряду с этим введем в рассмотрение дифференциальную 2-форму

$$\omega = -\sum_{i_1 < i_2} \gamma_{i_1 i_2}(q)\,dq_{i_1} \wedge dq_{i_2} \tag{7}$$

Внешняя производная формы (6) имеет вид

$$d\alpha = \sum_{i_1 < i_2} \left(\frac{\partial a_{i_2}}{\partial q_{i_1}} - \frac{\partial a_{i_1}}{\partial q_{i_2}} \right) dq_{i_1} \wedge dq_{i_2} \tag{8}$$

Поскольку две дифференциальные p-формы равны одна другой, тогда и только тогда, когда их коэффициенты тождественны, то уравнения (5) в соответствии с (7) и (8) эквивалентны условию $d\alpha = \omega$. Таким образом, задача о существовании обобщенного потенциала гироскопических сил сводится к задаче существования дифференциальной формы α, внешняя производная которой равна заданной дифференциальной форме ω.

Как следует из теоремы Пуанкаре [6], для разрешимости этой задачи достаточно выполнения условия $d\omega = 0$ (необходимость этого условия следует из того, что $d^2\alpha = 0$ для любой формы).

Внешняя производная дифференциальной 2-формы (7) имеет вид

$$d\omega=-\sum_{i_1<i_2<i_3}\left(\frac{\partial\gamma_{i_1i_2}}{\partial q_{i_3}}+\frac{\partial\gamma_{i_3i_1}}{\partial q_{i_2}}+\frac{\partial\gamma_{i_2i_3}}{\partial q_{i_1}}\right)dq_{i_1}\wedge dq_{i_2}\wedge dq_{i_3} \tag{9}$$

Из условия $d\omega=0$ и уравнения (9) следует

$$\frac{\partial\gamma_{i_1i_2}}{\partial q_{i_3}}+\frac{\partial\gamma_{i_3i_1}}{\partial q_{i_2}}+\frac{\partial\gamma_{i_2i_3}}{\partial q_{i_1}}=0$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть для системы (1) $\det T\neq0$ (T — матрица кинетической энергии K), а гироскопические силы удовлетворяют условию (2) и имеют ограниченный сверху по пространственным переменным потенциал ($V=\Sigma a_i q_i^{\cdot}<S$; $S>0$).

Тогда для существования представления системы (1) по Герцу необходимо и достаточно, чтобы и потенциал позиционных сил был ограничен сверху $U(q)<Q$, $Q>0$.

Доказательство. Пусть кинетическая энергия искомой системы $K_0(q,\, q^{\cdot},\, r^{\cdot})$ зависит от n позиционных координат $q=(q_1,\dots,q_n)'$ и от m циклических $r=(r_1,\dots,r_m)'$. Штрих означает транспонирование; все векторы понимаются как векторы-столбцы.

Запишем явное выражение для кинетической энергии

$$K_0=\frac{1}{2}\left\|q^{\cdot\prime},\, r^{\cdot\prime}\right\|\left\|\begin{matrix}A & C\\ C' & B\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}q^{\cdot}\\ r^{\cdot}\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}q^{\cdot\prime}Aq^{\cdot}+q^{\cdot\prime}Cr^{\cdot}+\frac{1}{2}r^{\cdot\prime}Br^{\cdot} \tag{10}$$

Матрицы A, B, C размерами $n\times n$, $m\times m$, $n\times m$, соответственно, зависят только от позиционных координат. Эти матрицы и подлежат определению.

Перейдем от описания системы посредством кинетической энергии (10) к описанию ее при помощи функции Рауса $R=K_0-p'r^{\cdot}$ ($R=R_2+R_1+R_0$), выполнив игнорирование циклических координат r (p — обобщенные импульсы, соответствующие обобщенным скоростям $r^{\cdot}$), R_2, R_1, R_0 — квадратичная, линейная и нулевая формы скоростей $q^{\cdot}$. Явные выражения для этих форм следующие:

$$R_2={}^1/_2 q^{\cdot\prime}(A-CB^{-1}C')q^{\cdot},\quad R_1=p'B^{-1}Cq^{\cdot},\quad R_0=-{}^1/_2 p'B^{-1}p \tag{11}$$

При выполнении условия (2) система (1) описывается функцией Лагранжа

$$L=K-V+U-Q \tag{12}$$

где V — потенциал гироскопических сил (4), Q — произвольная константа.

Условия динамической эквивалентности систем (1) и (10) в указанном ранее смысле имеют вид

$$R_2=K,\quad R_1=-V,\quad R_0=U-Q \tag{13}$$

Соотношения (13) можно записать в виде уравнений относительно искомых матриц

$$A-CB^{-1}C'=T,\quad p'B^{-1}C=-a,\quad -p'B^{-1}p=2(U-Q) \tag{14}$$

где $a=(a_1,\dots,a_n)'$ — коэффициенты линейной формы (4).

Помимо соотношений (14), матрицы A, B, C должны удовлетворять условию положительной определенности квадратичной формы (10), в частности положительно-определенной должна быть матрица B, а следовательно, и B^{-1}. Из третьего уравнения системы (14) следует, что это возможно только при $U(q)<Q$. Тем самым необходимость условия теоремы доказана. Для доказательства его достаточности размерность вектора циклических координат r положим равной единице. Тогда B и p превращаются в скаляры и соотношения (14) могут быть переписаны в виде: $A-CC'/b=T$, $Cp/b=-a$, $p^2/b=2(Q-U)$.

Решение этой системы таково:

$$b=p^2[2(Q-U)]^{-1},\quad C=-pa[2(Q-U)]^{-1},\quad A=T+aa'[2(Q-U)]^{-1} \tag{15}$$

Таким образом, элементы матрицы кинетической энергии (10) найдены, остается показать, что при условии $Q-U(q)>0$ эта матрица будет положительно-определенной. Рассмотрим для этого главный минор k-го порядка этой матрицы

$$D_k=\det\{t_{ij}+a_ia_j[2(Q-U)]^{-1}\}\quad (i,j=1,\ldots,k\leqslant n) \tag{16}$$

Введем следующие обозначения для фигурирующих в этом выражении матриц $\{t_{ij}\}=T_k$, $\{a_ia_j\}=A_k$. Сделаем в (16) над этими матрицами преобразование

$$D_k=(\det M)^{-2}\det\left(M'T_kM+\frac{M'A_kM}{2(Q-U)}\right) \tag{17}$$

Известно, что матрица A_k эквивалентна матрице, все элементы которой нулевые, за исключением последнего элемента главной диагонали, равного единице. При этом $\det M=a_k^{-1}$. Отсюда для (17) получим

$$D_k=a_k^2\left[\det T_k^\circ+\frac{\det \mathring{T}_{k-1}}{2(Q-U)}\right]=\det T_k+\frac{a_k^2\det \mathring{T}_{k-1}}{2(Q-U)}$$

$$T_k^\circ=M'T_kM,\quad \mathring{T}_{k-1}=M'T_{k-1}M \tag{18}$$

Поскольку миноры $|T_k^\circ|$ и $|T_{k-1}^0|$ положительны как главные миноры матрицы, эквивалентной матрице кинетической энергии системы (1), то для положительности D_k достаточно выполнения условия $Q-U(q)>0$.

Следует еще показать положительность самого определителя

$$\Delta=\det\begin{Vmatrix}A & C\\ C' & b\end{Vmatrix}=b\det A-\sum_{i,j}C_iC_j$$

Учитывая (15), получим

$$\Delta=\frac{p^2}{4(Q-U)^2}\left[2(Q-U)\det A-\sum_{i,j}A_{ij}a_ia_j\right]$$

Учитывая, что $\{A_{ij}\}=A^{-1}\det A$, найдем

$$\Delta=\frac{p^2\det A}{4(Q-U)^2}[2(Q-U)-(a,A^{-1}a)]$$

Требование положительности определителя влечет $U+{}^1/_2(a,A^{-1}a)<Q$, или при достаточно больших Q в силу (15) $U+{}^1/_2(a,T^{-1}a)<Q$.

Из ограниченности по пространственным переменным потенциала V следует ограниченность по модулю a_i. Совместно с требованием $\det T\neq 0$ это приводит к ограниченности формы $(a,T^{-1}a)$, откуда и следует утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Следствие 1. Если в физических моделях пользоваться понятиями точечных масс и зарядов, то все позиционные потенциальные силы отталкивания имеют представление по Герцу, силы притяжения их не имеют. Это следует из того, что потенциал таких сил в первом случае имеет вид $U(q)=-|q|^{-1}$ и ограничен сверху любым положительным числом; во втором случае $U(q)=|q|^{-1}$ и такой потенциал не ограничен сверху. В частности, непредставимы по Герцу силы тяготения. Таким образом, в рамках классической механики, одной из основных категорий которой является понятие точечной массы, вселенная принципиально несводима к одним лишь движениям по инерции.

Следствие 2. Если заданные физические силы удовлетворяют найденным критериям представимости, то для построения эквивалентной свободной системы достаточно одной циклической координаты.

Следствие 3. Для существования обобщенного потенциала сил Лоренца $F=v\times B$, где v — скорость заряженной частицы, B — магнитная индукция поля, необходимо и достаточно выполнения условия $\operatorname{div} B=0$.

Действительно, силы Лоренца имеют гироскопическую структуру и могут быть записаны в форме

$$F=\begin{Vmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x^\cdot \\ y^\cdot \\ z^\cdot \end{Vmatrix}$$

Применение к кососимметрической матрице этих сил условия (2) и приводит к условию $\operatorname{div} B=0$.

Таким образом, во вселенной по Герцу не допускается существование магнитных зарядов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thomson W., Tait P. G.* Treatise of Natural Phylosophy, Cambridge: Univ. Press, 1890, v. 1. 508 p.; v. 2. 527 p.
2. *Герц Г. Р.* Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 386 с.
3. *Poincaré A.* Les idées de Hertz sur la mécanique.— Rev. gén. sci. pures et appl., 1897, v. 8, p. 734—743.
4. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
5. *Суслов Г. К.* О кинетическом потенциале Гельмгольца.— Матем. сб., 1896, т. 19, № 1, с. 197—210.
6. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971. 392 с.

Москва

Поступила в редакцию 13.I.1981