

**МЕХАНИКА  
ТВЕРДОГО ТЕЛА  
№ 2 · 1982**

УДК 539.3:534.1

**АНАЛИЗ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОГО ВЫПУЧИВАНИЯ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК  
ПРИ ОСЕВОМ ДИНАМИЧЕСКОМ СЖАТИИ**

**БОГДАНОВИЧ А. Е., ФЕЛДМАНЕ Э. Г.**

Как известно, расчету в геометрически нелинейной постановке цилиндрических оболочек, подвергнутых осевому удару, посвящено большое число работ. Они распадаются на две независимые группы. К первой относятся решения неосесимметричных задач прямыми вариационными методами [1–3], ко второй – решения осесимметричных задач конечно-разностными методами [4–6]. В [7] предпринята попытка объединить в одной методике расчет процессов осесимметричного и неосесимметричного выпучивания оболочки. Результаты этой работы показывают, что на начальной стадии происходит осесимметричное выпучивание, обусловленное краевым эффектом, и лишь при достижении внешней нагрузкой достаточной величины начинается интенсивный рост неосесимметричных начальных несовершенств.

Наличие осесимметричной и неосесимметричной стадий выпучивания цилиндрических оболочек при осевом ударе было установлено и в экспериментальных исследованиях [8, 9]. Некоторые качественные соображения о механизме перехода от осесимметричной стадии выпучивания к неосесимметричной были высказаны в [10]. Работы по выпучиванию цилиндрических оболочек при осевом динамическом сжатии и современное состояние этой проблемы подробно освещены в обзоре [11].

Следует отметить, что в известных теоретических исследованиях неосесимметричной стадии выпучивания недостаточно изучены некоторые принципиальные вопросы. Во-первых, отсутствует обоснование выбора аппроксимации прогиба оболочки, позволяющей рассчитать с требуемой точностью напряженно-деформированное состояние в произвольной ее точке. Во-вторых, за исключением некоторых результатов работ [12, 13] (полученных при решении задачи в геометрически линейной постановке), отсутствуют данные по влиянию формы распределения начальных неосесимметричных несовершенств по поверхности оболочки на процесс ее динамического выпучивания. В-третьих, во всех исследованиях, кроме [13], используются весьма расплывчатые критерии «потери устойчивости». Вопрос о выборе критерия для оценки несущей способности приобретает особый интерес, если принять во внимание экспериментальные данные [8], согласно которым факт упругой потери устойчивости цилиндрических оболочек при осевом ударе является скорее исключением, чем правилом. Исследование этих трех вопросов и посвящена данная статья.

**1. Обоснование выбора аппроксимации прогиба.** Рассматривается круговая замкнутая ортотропная цилиндрическая оболочка длиной  $L$ , толщиной  $h$  и радиусом срединной поверхности  $R$ . На обе торцевые поверхности действуют одинаковые, равномерно распределенные, осесимметричные сжимающие усилия  $P(t)$ . Для описания деформирования оболочки на неосесимметричной стадии используем известные уравнения среднего изгиба типа Доннелла относительно прогиба  $w(x, y, t)$  и функции напряжений  $\Phi(x, y, t)$ :

$$\begin{aligned} A_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + (A_{66} + 2A_{42}) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{11} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x^2} - \\ - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 (w - w_0)}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 (w - w_0)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 (w - w_0)}{\partial y^4} = \\ = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - P(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (1.2)$$

где  $w_0(x, y)$  — заданный начальный прогиб,  $x$  и  $y$  — продольная и окружная координаты,  $\mu$  — масса единицы поверхности оболочки,  $A_{ij}$  и  $D_{ij}$  — матрицы податливости и изгибной жесткости для ортотропного материала.

Линеаризованным уравнениям (1.1), (1.2) и граничным условиям свободного опирания почленно удовлетворяют ряды

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} W_{mn}(t) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \quad (1.3)$$

$$\Phi(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} F_{mn}(t) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y, \quad \alpha_m = \frac{\pi m}{L}, \quad \beta_n = \frac{n}{R} \quad (1.4)$$

Попытка использовать достаточно большое число членов разложений (1.3), (1.4) при решении вариационным методом нелинейных уравнений (1.1), (1.2) приводит к непреодолимым трудностям: все формы выпучивания оказываются взаимосвязанными, в результате чего получить в обозримом виде уравнения для отыскания  $W_{mn}(t)$  и  $F_{mn}(t)$  не удается. Первая задача состоит в том, чтобы выделить минимально необходимое число членов ряда (1.3), позволяющее дать достоверное количественное описание процесса нелинейного выпучивания.

Построим вначале решение рассматриваемой задачи, исходя из следующей двучленной аппроксимации прогиба:

$$w(x, y, t) = f_1(t) \sin \alpha_1 x \cos \beta_1 y + f_2(t) \sin \alpha_2 x \cos \beta_2 y \quad (1.5)$$

$$\alpha_i = \pi m_i / L, \quad \beta_i = n_i / R \quad (i=1, 2)$$

где  $m_i$  и  $n_i$  — произвольные целые числа.

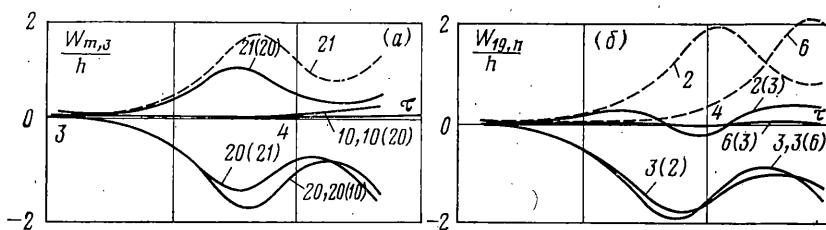
После подстановки (1.5) и соответствующей двучленной аппроксимации для  $w_0(x, y)$  в (1.1) находим выражение для функции напряжений  $\Phi(x, y, t)$ . Последующее применение к (1.2) процедуры Бубнова — Галеркина приводит к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2} + \omega_{m_1 n_1}^2 \left[ f_1 \left( 1 - \frac{P(t)}{P^*_{m_1 n_1}} \right) - f_1^\circ \right] + d_{m_1 n_1} f_1 (f_1^2 - f_1^{\circ 2}) + \\ + \frac{1}{4} d_{m_1 n_1 m_2 n_2} f_2 (f_1 f_2 - f_1^\circ f_2^\circ) = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{d^2 f_2}{dt^2} + \omega_{m_2 n_2}^2 \left[ f_2 \left( 1 - \frac{P(t)}{P^*_{m_2 n_2}} \right) - f_2^\circ \right] + d_{m_2 n_2} f_2 (f_2^2 - f_2^{\circ 2}) + \\ + \frac{1}{4} d_{m_2 n_2 m_1 n_1} f_1 (f_1 f_2 - f_1^\circ f_2^\circ) = 0 \quad (1.7)$$

где постоянные коэффициенты  $d_{m_i n_i}$ ,  $d_{m_i n_i m_j n_j}$  ( $i, j = 1, 2$ ), имеющие весьма громоздкий вид, определяются механическими и геометрическими параметрами оболочки и формами волнобразования ( $m, n$ ).

Согласно уравнениям (1.6), (1.7), степень взаимодействия между формами выпучивания с номерами ( $m_1, n_1$ ) и ( $m_2, n_2$ ) определяется величи-



Фиг. 1

ной отношении нелинейных членов  $\Delta_1 = d_{m_1 n_1 m_2 n_2} f_2^2 / (d_{m_1 n_1} f_1^2)$  и  $\Delta_2 = d_{m_2 n_2 m_1 n_1} f_1^2 / (d_{m_2 n_2} f_2^2)$ . Как показали расчеты, при фиксированных  $n_1, n_2$  отношения коэффициентов  $d_{m_1 n_1 m_2 n_2} / d_{m_1 n_1}$  и  $d_{m_2 n_2 m_1 n_1} / d_{m_2 n_2}$  максимальны для  $m_1 = m_2$  и резко убывают с ростом  $|m_1 - m_2|$ . Следовательно, для близких значений  $f_1$  и  $f_2$  эффект взаимодействия будет наиболее сильным для нескольких соседних форм выпучивания. При условии  $f_2^2 / f_1^2 \gg 1$ , которое реализуется для больших значений  $|m_1 - m_2|$ , возможно  $\Delta_1 > 1$ , и учет взаимодействия форм приводит к появлению в (1.6) второго большого нелинейного члена. В результате рассчитываемая величина  $f_1$  оказывается значительно меньше, чем при неучете взаимодействия форм. Поскольку при том же условии имеет место  $\Delta_2 \ll 1$ , учет взаимодействия форм не оказывает заметного влияния на результат расчета функции  $f_2(t)$ , представляющей в этом случае основной интерес.

Таким образом, при фиксированных номерах окружных форм главное значение имеет учет взаимодействия нескольких соседних осевых форм выпучивания, обладающих наибольшим темпом роста.

При фиксированных номерах осевых форм  $m_1, m_2$ , как показали расчеты, величины  $d_{m_1 n_1 m_2 n_2} / d_{m_1 n_1}$  и  $d_{m_2 n_2 m_1 n_1} / d_{m_2 n_2}$  медленно, монотонно возрастают с ростом  $|n_1 - n_2|$ . Следовательно, степень взаимодействия форм выпучивания с различными  $n_1, n_2$  определяется главным образом отношением  $f_1^2 / f_2^2$ . Как было установлено, при одинаковых значениях амплитуд начальных несовершенств для всех  $n$  большая группа окружных форм выпучивания обладает практически одинаковым темпом роста. Учет их взаимодействия не приводит к появлению доминирующей формы. Если же амплитуда начального несовершенства для одной из форм заметно превосходит остальные, выпучивание по ней начинается раньше и эта форма становится доминирующей.

Проиллюстрируем сказанное результатами численных расчетов<sup>1</sup>. Причем распределение амплитуд начальных несовершенств в виде

$$W_{mn} = a_0 \frac{(-1)^{l+n}}{m^2} e^{-|n-3|}, \quad a_0 = 0,2h, \quad l = \left[ \frac{m+1}{2} \right] \quad (1.8)$$

Как видно из фиг. 1, a, учет взаимодействия осевых форм с  $m=20$  и  $m=10$  на зависимостях  $W_{20,3}(\tau)$  и  $W_{10,3}(\tau)$  практически не отразился (результаты расчета со взаимодействием форм изображены сплошной линией, без взаимодействия — штриховой; числа в скобках указывают форму, взаимодействие с которой рассматривается). Учет взаимодействия осевых форм с  $m=20$  и  $m=21$  привел к изменению зависимостей  $W_{20,3}(\tau)$  и  $W_{21,3}(\tau)$ , не носящему, однако, качественного характера.

Как показывает анализ результатов, приведенных на фиг. 1, b, учет взаимодействия между окружной формой с  $n=3$  (обладающей наиболь-

<sup>1</sup> В дальнейшем, если это не оговорено особо, расчеты проводились для стальной оболочки с  $R/h=200$ ,  $L/R=2$  при линейно-возрастающей нагрузке со скоростью  $V_0 = P^*/2t^*$ , где  $P^*$  — эйлерова критическая статическая нагрузка,  $t^* = 2L/c$ ,  $c$  — скорость распространения продольной волны сжатия в оболочке; безразмерное время  $\tau = t/t^*$ .

шим начальным несовершенством) и формами с  $n=2$  и  $n=6$  не отражается практически на зависимостях  $W_{19,3}(\tau)$ ; зависимости же  $W_{19,2}(\tau)$  и  $W_{19,6}(\tau)$  изменяются качественно: выпучивание по этим формам становится очень слабым.

В результате проведенного анализа можно сделать вывод, что в области, где существенна роль нелинейных членов, взаимодействие окружных форм приводит к качественным изменениям кривых выпучивания. Определенные количественные изменения вносит эффект взаимодействия группы осевых форм, обладающих наибольшим темпом роста. Однако в первом приближении этим эффектом можно, видимо, пренебречь.

Исследуем далее совместное взаимодействие конечного числа окружных форм выпучивания. Примем аппроксимацию прогиба в виде

$$w_m(x, y, t) = \sin \alpha_m x \sum_{n=n_0}^N W_{mn}(t) \cos \beta_n y \quad (1.9)$$

где  $m$  — фиксированное число,  $n_0$  и  $N$  — произвольные натуральные числа<sup>2</sup>. Дальнейшее решение задачи приведено в [15]. Укажем лишь, что для определения функций  $W_{mn}(\tau)$  получается система  $N-n_0+1$  нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

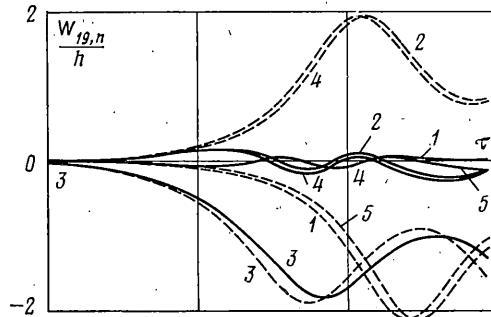
Результаты численного интегрирования такой системы при  $m=19$ ,  $n_0=1$ ,  $N=5$  и распределении амплитуд начальных несовершенств (1.8) приведены на фиг. 2 (сплошные линии). Для сравнения штриховыми линиями приведены кривые выпучивания, рассчитанные без учета взаимодействия окружных форм. Как видно, в последнем случае каждая из функций  $|W_{19,n}(\tau)|$  достигала максимума порядка  $2h$  в рассматриваемом промежутке времени. При учете же совместного взаимодействия доминирующей становится форма выпучивания с  $n=3$ , подавляющая все остальные.

Основываясь на изложенных результатах, будем считать в дальнейшем, что в области прогибов порядка нескольких толщин оболочки первостепенную важность имеет учет взаимодействия конечного числа окружных форм выпучивания, и пользоваться, соответственно, аппроксимацией прогиба (1.9).

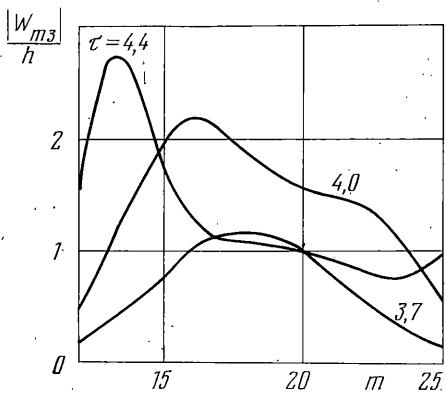
**2. Анализ формы деформированной поверхности оболочки.** Рассмотрим далее метод расчета зависимостей прогиба оболочки от координат  $x$  и  $y$  в произвольный момент времени при заданной внешней нагрузке  $P(t)$  и известной форме начальных несовершенств  $w_0(x, y)$ . Полный прогиб в произвольной точке оболочки при использовании (1.9) может быть представлен в виде

$$w(x, y, t) = \sum_{m=m_0}^M \sin \alpha_m x \sum_{n=n_0}^N W_{mn}(t) \cos \beta_n y \quad (2.1)$$

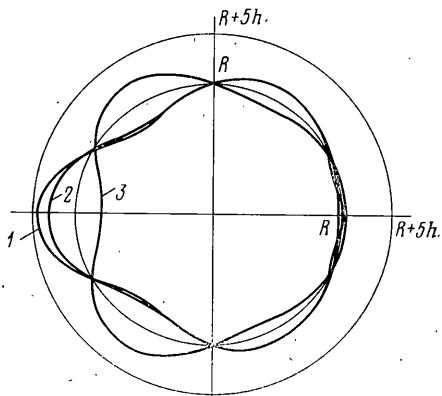
<sup>2</sup> Аппроксимация прогиба типа (1.9) была впервые использована в [14] при решении нелинейной задачи выпучивания цилиндрической оболочки при динамическом внешнем давлении.



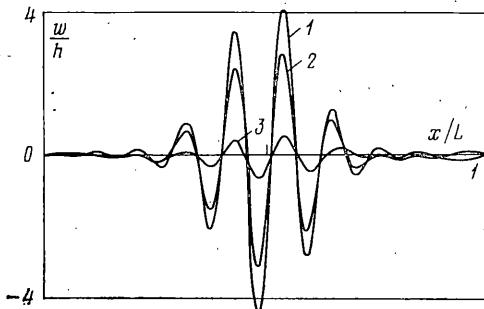
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 4

Для определения функций  $W_{mn}(t)$  необходимо  $M-m_0+1$  раз проинтегрировать систему  $N-n_0+1$  нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В пренебрежении взаимодействием окружных форм выпучивания задача сильно упрощается: полный прогиб может быть записан в виде

$$w(x, y, t) = \sum_{m=m_0}^M \sum_{n=n_0}^N W_{mn}(t) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \quad (2.2)$$

а каждая из функций  $W_{mn}(t)$  определяется из своего нелинейного дифференциального уравнения.

Количество слагаемых в суммах (2.1) и (2.2), которые необходимо учитывать для получения прогиба с заданной точностью, существенно зависит от скорости нагружения, соотношений между геометрическими параметрами, распределения начальных несовершенств и от точки  $(x, y)$  на поверхности оболочки, в которой производится суммирование. Было установлено, в частности, следующее важное обстоятельство: количество членов, которые нужно учитывать при суммировании с заданной относительной точностью, минимально в тех точках оболочки, где прогиб максимальен. Это позволяет значительно экономить машинное время, поскольку нет практической необходимости определять прогиб с высокой точностью в тех точках оболочки, где он мал.

Некоторое представление о сходимости ряда (2.1) в одной из точек, где прогиб достигает наибольшего значения, можно составить из фиг. 3, где изображены зависимости коэффициентов Фурье  $W_{m3}$  от номера осевой формы в три момента времени. Отметим, что как номер максимально-го из коэффициентов, так и зависимость их величин от  $t$  претерпевают заметную трансформацию во времени, вследствие чего количество членов,

которое нужно учитывать при суммировании, и их номера зависят от момента времени, в который суммирование производится. Видно также, что в каждый момент времени доминирует определенная группа форм выпучивания, которые и определяют вид деформированной поверхности оболочки.

На фиг. 4 представлены зависимости прогиба от осевой координаты при  $y=\pi R$  в момент времени  $\tau=3,4$ . Кривая 1 получена по формуле (2.2), кривая 2 — по формуле (2.1). Видно, что учет взаимодействия окружных форм выпучивания заметно снижает максимальное значение прогиба. Приведенную форму выпученной поверхности можно трактовать как состоящую из нескольких поясов глубоких вмятин и выпучин, локализованных в центральной части оболочки. Наиболее опасными будут, видимо, точки  $x=0,485L$  и  $x=0,54L$ , в которых выпучивание произошло соответственно наружу и вовнутрь. Для иллюстрации трансформации формы выпученной поверхности во времени показана (кривая 3) зависимость  $w(x)$  при  $\tau=3,0$ .

На фиг. 5 приведены зависимости прогиба от окружной координаты в сечении  $x=0,485L$  в момент времени  $\tau=3,4$ . Кривая 1 соответствует суммированию по формуле (2.2), кривая 2 — по формуле (2.1). Наличие шести узловых точек у зависимости  $w(y)$  объясняется тем, что при использовании (1.8), как было показано в п. 1, доминирует форма  $n=3$ . Наиболее опасная точка на окружности —  $y=\pi R$ . Кривая 3 построена в тот же момент времени, но в сечении  $x=0,54L$ .

Результаты, приведенные на фиг. 4 и 5, получены при  $m_0=12$ ,  $M=26$ ,  $n_0=1$ ,  $N=6$ . Отметим, что низкие осевые формы растут медленно и в указанные моменты времени на форму поверхности оболочки практически не влияют. Этим объясняется, в частности, то, что рассчитанная форма деформированной поверхности оболочки не имеет сходства с ее начальной несовершенной формой. Зависимость начального прогиба  $w_0(x)$  в сечении  $y=\pi R$  приведена на фиг. 6, а (сплошная линия). Если выделить ту часть начального прогиба, которая использовалась при расчете  $w(x)$ , просуммировав ряд Фурье для  $w_0(x)$  с  $m=12$  до  $m=26$ , то получим кривую (фиг. 6, б), более близкую по форме к  $w(x)$  (фиг. 6, в). Отличие кривых подчеркивает неравномерность развития во времени различных осевых форм выпучивания.

На фиг. 6, г приведена зависимость  $w(x)$ , рассчитанная при  $\tau=3,8$  с использованием распределения амплитуд начальных несовершенств вида

$$W_{mn} = 0,2h(-1)^{l+n}e^{-|n-3|} / m^3 \quad (2.3)$$

Сравнение с кривой фиг. 6, в, рассчитанной с использованием распределения (1.8), показывает, что протяженность зон резкого выпучивания, размеры отдельных вмятин и выпучин, местоположение наиболее опасных точек на образующей практически совпадает.

Рассмотрим еще случай, когда начальный прогиб имеет следующий вид:

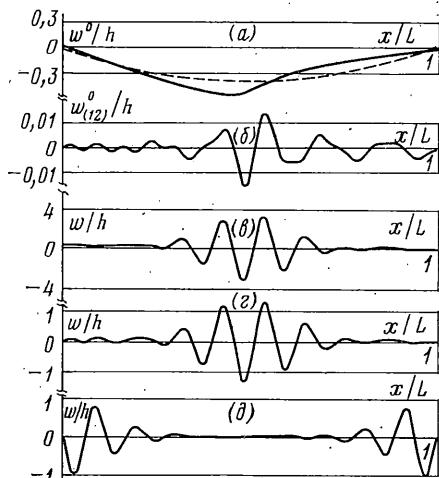
$$w_0(x, y) = 0,2h \frac{4x(x-L)}{L^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-|n-3|} \cos \beta_n y \quad (2.4)$$

(штриховая линия на фиг. 6, а). Соответствующая зависимость  $w(x)$  приведена на фиг. 6, д. Как видно, области выпучивания располагаются симметрично, вблизи торцов оболочки, а не в центральной части, как было при начальном прогибе, изображенном на фиг. 6, а сплошной линией. Таким образом, изменение вклада высших гармоник, мало отражающееся на форме начального прогиба, является определяющим для процесса динамического выпучивания оболочки при осевом сжатии.

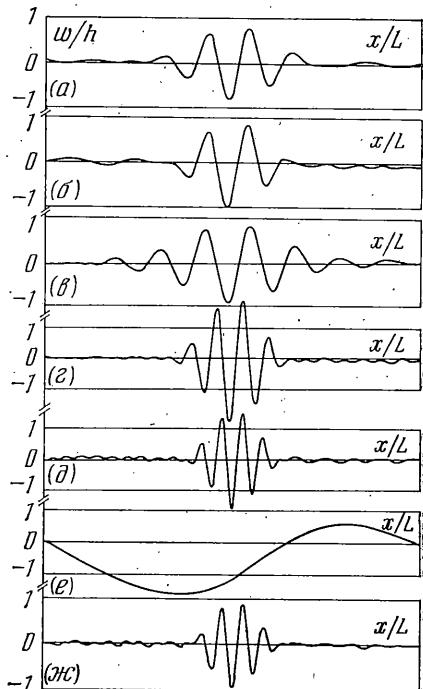
Исследуем далее влияние скорости нагружения и соотношений между геометрическими параметрами на форму деформированной поверхности оболочки.

На фиг. 7, а, б, в соответственно приведены зависимости прогиба от осевой координаты для трех значений скорости нагружения  $V$  равной  $V_0$ ,  $2V_0$ ,  $V_0/2$  при  $R/h=200$ ,  $L/R=2$ . Можно отметить два наиболее интересных момента: с уменьшением скорости нагружения количество поясов вмятин и выпучин увеличивается; размеры отдельных вмятин и выпучин несколько уменьшаются с ростом  $V$ . Последний факт отмечался и в экспериментальных результатах [9].

На фиг. 7, а, г, д соответственно дано сопоставление зависимостей



Фиг. 6



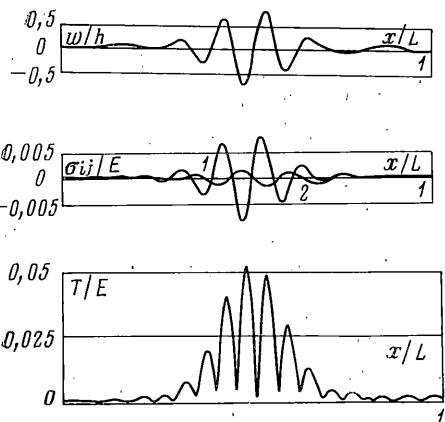
Фиг. 7

прогиба от осевой координаты для различных значений отношения  $R/h=200$ ,  $R/h=500$ ,  $R/h=800$  при  $L/R=2$ ,  $V=V_0$ . Обратим внимание на уменьшение размера вмятин и выпучин, а также на локализацию выпучивания в центральной части оболочки при увеличении отношения  $R/h$  (это объясняется, как и в случае увеличения  $V$ , ростом номеров доминирующих осевых форм выпучивания). Местоположение наиболее опасных точек на поверхности изменяется очень незначительно.

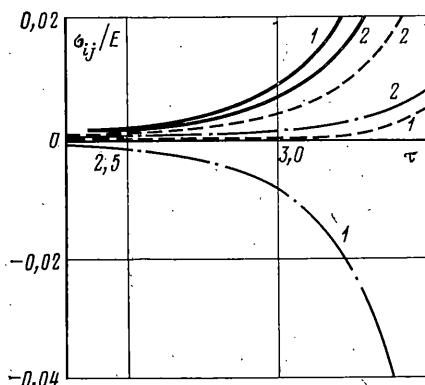
По приведенным результатам можно сопоставить зависимости прогиба от осевой координаты для трех значений отношения длины оболочки к радиусу:  $L/R=2$  (фиг. 7, а),  $L/R=0,25$  (фиг. 7, е),  $L/R=4$  (фиг. 7, ж) при  $R/h=200$ ,  $V=V_0$ . Уменьшение  $L/R$  при постоянном  $V$  фактически означает приближение к статическим условиям нагружения. Поэтому в этом случае доминирующими при динамическом выпучивании оказываются те же формы, что и при статическом ( $m=1$  и  $m=2$ ).

Из проведенного анализа можно сделать следующий вывод. Основными факторами, определяющими форму деформированной поверхности оболочки, являются: начальные геометрические несовершенства и для достаточно коротких оболочек — соотношение между ее длиной и радиусом.

**3. Анализ напряженного состояния в оболочке.** После того как найдены прогиб  $w$  и функция напряжений  $\Phi$ , согласно исходным гипотезам Кирхгофа — Лява, напряжения в произвольной точке оболочки, возни-



Фиг. 8



Фиг. 9

кающие вследствие неосесимметричного выпучивания, вычисляются по формулам ( $B_{ij}$  — компоненты матрицы жесткости):

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x, y, z, t) &= \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - z \left[ B_{11} \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial y^2} \right] \\ \sigma_{yy}(x, y, z, t) &= \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - z \left[ B_{12} \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial y^2} \right] \\ \sigma_{xy}(x, y, z, t) &= -\frac{1}{h} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - 2zB_{66} \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (3.1)$$

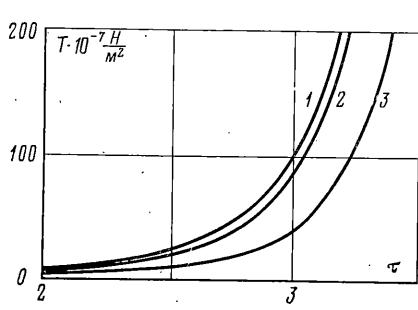
В дальнейшем также понадобится интенсивность касательных напряжений, имеющая в случае плоского напряженного состояния вид

$$T = [(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + 3\sigma_{xy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy}) / 3]^{1/2} \quad (3.2)$$

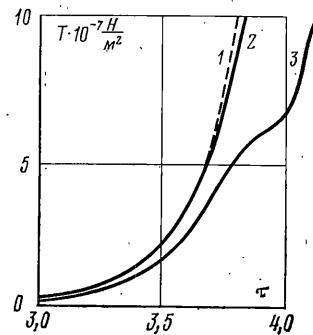
Первая задача, возникающая в связи с анализом напряжений в оболочке, — это определение тех точек поверхности, где они достигают наибольших значений. Специально проведенные численные расчеты показали, что в рассматриваемой задаче об осевом динамическом сжатии максимальные значения напряжений (и интенсивности касательных напряжений) всегда достигаются в одной из точек максимума функции  $|w(x, y)|$ . В качестве иллюстрации этого факта на фиг. 8 приведены зависимости  $w(x)$ ,  $\sigma_{xx}(x)$  (кривая 1),  $\sigma_{yy}(x)$  (кривая 2),  $T(x)$  в сечении  $y=\pi R$  при  $z=h/2$ ,  $\tau=3.0$ . Расположение на образующей максимумов и минимумов  $w$  и  $\sigma_{xx}$  совпадает, знак окружных напряжений  $\sigma_{yy}$  в наиболее опасных точках противоположен знаку осевых, а касательное напряжение  $\sigma_{xy}$  в сечении  $y=\pi R$  равно нулю. Интенсивность  $T$  имеет максимумы в тех точках поверхности оболочки, где  $|w|$  максимальен, и минимумы там, где  $w=0$ .

На фиг. 9 для точки  $x=0.485L$ ,  $y=\pi R$  приведены зависимости от времени напряжений  $\sigma_{xx}$  (кривые 1) и  $\sigma_{yy}$  (кривые 2) на внешней (сплошные линии), срединной (штриховые линии) и внутренней (штрихпунктирные линии) поверхностях оболочки. Как видно, напряжение  $\sigma_{xx}$  — растягивающее на внешней поверхности и сжимающее на внутренней, причем оно по абсолютной величине превосходит напряжение  $\sigma_{yy}$ , растягивающее по всей толщине оболочки. Аналогичный анализ можно провести и для точки  $x=0.54L$ ,  $y=\pi R$ , где произошло максимальное выпучивание вовнутрь.

В результате можно заключить, что в рассматриваемом случае наибольшие и примерно одинаковые по величине растягивающие осевые напряжения наблюдаются на внешней поверхности оболочки при выпучивании наружу и на внутренней поверхности при выпучивании вовнутрь.



Фиг. 10



Фиг. 11

Большие сжимающие напряжения возникают на внутренней поверхности при выпучивании наружу ( $\sigma_{xx}$ ) и на внешней поверхности при выпучивании вовнутрь ( $\sigma_{yy}$ , а также несколько меньшее  $\sigma_{xy}$ ).

Интенсивность касательных напряжений  $T$ , согласно зависимостям, приведенным на фиг. 10 (кривые 1–3 соответствуют  $z=0,5h; -0,5h; 0$ ), имеет наибольшее значение на внутренней поверхности оболочки в точке, где произошло максимальное выпучивание наружу.

Таким образом, при заданной зависимости от времени внешней нагрузки  $P(t)$ , геометрических и механических характеристиках оболочки, известном начальном прогибе можно, используя разработанную методику, определить в требуемый момент времени ту точку оболочки, в которой максимально каждое из напряжений либо любая их комбинация.

**4. Критическая динамическая нагрузка и коэффициент динамичности.** На основе описанной методики можно решить задачу определения величины динамической нагрузки (или приложенного импульса), при которой хоть в одной точке оболочки материал переходит в пластическое состояние. Такие величины нагрузки или импульса будем называть критическими. Коэффициент динамичности  $K_g$  для конкретной оболочки определим как отношение критической динамической нагрузки к эйлеровой статической. При расчете  $K_g$  к выражениям для напряжений (3.1) следует добавить слагаемые, связанные с безмоментной деформацией оболочки на стадии, предшествующей неосесимметричному выпучиванию оболочки.

В дальнейшем будем пользоваться критерием текучести Мизеса, считая, что предельное состояние достигнуто при выполнении равенства  $T = T_i$ , где  $T_i$  — предел текучести материала при сдвиге. Приняв значение  $T_i = 1,2 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ , согласно фиг. 10 определяем, что для исследованной выше оболочки первая пластическая зона образуется на внутренней поверхности в точке  $x = 0,485L$ ,  $y = \pi R$  в момент времени  $\tau = 3,04$ . Следовательно,  $K_g = 1,52$ .

Приведенные ниже данные иллюстрируют влияние скорости нагружения, отношений  $R/h$  и  $L/R$  на величину  $K_g$ :

$V/V_0$	$K_g$	$L/R$	$K_g$	$R/h$	$K_g$
0,25	1,18	0,25	1,16	200	1,52
1	1,52	2	1,52	500	1,685
2	1,86	4	1,63	800	1,690
$L/R=2$ , $R/h=200$ ;	$V=V_0$ , $R/h=200$ ;			$V=V_0$ , $L/R=2$	

Можно отметить, что эффект динамичности усиливается с ростом  $V$ ,  $R/h$ ,  $L/R$ . Заметим, что увеличение  $K_g$  с ростом  $R/h$  и  $L/R$  было установлено и в [13]. Приведенные далее результаты иллюстрируют влияние поля начальных несовершенств на величину коэффициента динамичности. Здесь буквой  $N$  обозначен номер формулы, задающей функ-

цию начальных несовершенств

$N$	(1.8)	(1.8)	(2.3)	(2.4)
$a_0/h$	0,2	0,02	0,2	0,2
$K_g$	1,52	1,79	1,84	1,88

Как видно, величина коэффициента динамичности заметно возрастает с уменьшением амплитуды начальных несовершенств, а также существенно зависит от вида их распределения по поверхности оболочки.

Поскольку после появления в оболочке пластических зон заложенная в основу расчета модель линейно-упругого поведения материала становится неприменимой, изложенная методика ограничена расчетом величин напряжений, равных пределу текучести. В этой связи вызывает интерес вопрос: насколько сильно проявляются установленные выше эффекты геометрической нелинейности в области линейно-упругого поведения материала оболочки? Чтобы ответить на него, для всех рассмотренных вариантов были построены зависимости интенсивности касательных напряжений от времени при учете взаимодействия конечного числа окружных форм, при расчете без такого взаимодействия и при расчете по линеаризованным уравнениям движения.

В итоге можно сделать следующее общее заключение: при временах  $\tau \leq \tau^*$  ( $\tau^*$  – момент образования в оболочке первой пластической зоны) лишь при  $R/h = 800$  было обнаружено некоторое различие в зависимостях  $T(\tau)$ , полученных с учетом и без учета взаимодействия окружных форм выпучивания. Таким образом, лишь для очень тонких стальных оболочек геометрически нелинейные эффекты не сопровождаются возникновением локальных пластических зон.

Одна из возможностей обнаружения заметных эффектов, связанных с геометрической нелинейностью, в области физической линейности заключается в рассмотрении материалов с более высоким, чем у стали, отношением предела текучести к модулю упругости.

Рассмотрим оболочку из майлара, обладающего механическими характеристиками:  $E = 5 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $v = 0,38$ ,  $\rho = 1,4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $T_i = 9 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$ . Примем  $R/h = 800$ ,  $L/R = 2$ ,  $V = V_0$  и распределение амплитуд начальных несовершенств (1.8). В результате анализа деформированной поверхности оболочки были определены наиболее опасные точки:  $x = 0,49L$  (при выпучивании наружу) и  $x = 0,52L$  (при выпучивании вовнутрь) и  $y = \pi R$ . Интересно отметить, что формы деформированных поверхностей майларовой и стальной оболочек при одинаковых  $V$ ,  $R/h$ ,  $L/R$  и поле начальных несовершенств практически не отличаются.

На фиг. 11 приведены зависимости интенсивности касательных напряжений от времени в первой из этих точек при решении задачи в геометрически линейной постановке (кривая 1), нелинейной задачи без учета взаимодействия форм выпучивания (кривая 2) и с учетом взаимодействия окружных форм выпучивания (кривая 3). Коэффициенты динамичности, определяемые по зависимостям 1 и 2, практически совпадают:  $K_g = 1,91$ , зависимость 3 дает  $K_g = 2,05$ . Таким образом, определенный нелинейный эффект наблюдается в данном случае в области линейно-упругого поведения материала, однако уловить его можно только при учете взаимодействия окружных форм выпучивания.

Отметим, что, хотя повышение коэффициента динамичности, вызванное учетом геометрической нелинейности, относительно мало, величина прогиба уменьшается весьма заметно. Как показали расчеты, в момент появления первой пластической зоны максимальное значение прогиба при учете взаимодействия окружных форм в два раза меньше, чем без учета этого взаимодействия.

Проведенный анализ поведения цилиндрических оболочек при осевом динамическом сжатии позволил установить, таким образом, что лишь для очень тонких оболочек из материалов с высоким относительным пределом

текущести эффекты, связанные с геометрической нелинейностью, проявляются до образования в оболочке локальных пластических зон. Величину нагрузки, при которой возникают эти зоны, и их местоположение в оболочке можно достоверно определять, решая задачу в геометрически линейной постановке.

Следует подчеркнуть, что представленное в данной работе решение справедливо для той части оболочки, где накануне резкого неосесимметричного выпучивания устанавливается напряженное состояние, близкое к однородному, т. е. на некотором удалении от торцов. Анализ процесса деформирования в зоне нелинейного краевого эффекта, требующий совместного рассмотрения осесимметричной и неосесимметричной деформаций, в рамках использования прямых вариационных методов не представляется возможным.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Агамиров В. Л., Вольмир А. С. Поведение цилиндрических оболочек при динамическом приложении всестороннего давления и осевого сжатия.—Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1959, № 3, с. 78–83.
2. Roth R. S., Klosner I. M. Nonlinear response of cylindrical shells subjected to dynamic axial loads.—AIAA Journal, 1964, v. 2, No. 10.—Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1964, т. 2, № 10.
3. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
4. Борисенко В. И., Клокова А. И. Закритическая деформация цилиндрической оболочки при ударе.—Прикл. механика, 1966, т. 2, № 10, с. 29–35.
5. Гордиенко Б. А., Нечипорук Г. С., Тен Ен Со. Реакция цилиндрических и конических оболочек на осевой удар.—В кн.: Теория оболочек и пластин. М.: Наука, 1973, с. 431–436.
6. Гордиенко Б. А. Динамика ортотропных цилиндрических оболочек при осевом ударе.—Механика полимеров, 1977, № 5, с. 892–895.
7. Баженов В. Г., Игоничева Е. В. Динамическая потеря устойчивости и закритическое поведение тонкой цилиндрической оболочки с начальными несовершенствами под действием осевой ударной нагрузки.—Прикладные проблемы прочности и пластичности: Сб. статей. Горьковск. ун-т, 1977, вып. 6, с. 98–106.
8. Нечипорук Г. С., Тен Ен Со. Экспериментальное исследование ударного выпучивания цилиндрических и конических оболочек.—Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 3, с. 175–182.
9. Утешев С. А. Выпучивание полимерных конических и цилиндрических оболочек при ударе по торцу.—Механика полимеров, 1977, № 1, с. 75–79.
10. Ефимов А. Б., Малый В. И. О механизме выпучивания цилиндрической оболочки при продольном ударе.—В кн.: Теория оболочек и пластин. М.: Наука, 1973, с. 459–463.
11. Богданович А. Е. Обзор исследований по устойчивости цилиндрических оболочек при осевом динамическом сжатии.—Электродинамика и механика сплошных сред: Сб. статей. Латвийский ун-т, 1980, с. 68–105.
12. Lindberg H. E., Herbert R. E. Dynamic buckling of a thin cylindrical shell under axial impact.—Trans. ASME Ser. E. J. Appl. Mech., 1966, v. 33, No. 4.—Рус. перев.: Прикл. механика. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., т. 33, № 4, с. 91–100.
13. Mayton G., Libai A. Dynamics and failure of cylindrical shells subjected to axial impact.—AIAA Journal, 1977, v. 15, No. 11, p. 1624–1630.—Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1977, т. 15, № 11, с. 107–115.
14. Григорюк Э. И., Сребровский А. И. Тонкие круговые цилиндрические оболочки под действием импульса внешнего давления.—Инж. ж. МТТ, 1968, № 3, с. 110–118.
15. Богданович А. Е., Фелдман Э. Г. Расчет несущей способности композитных цилиндрических оболочек при динамическом нагружении.—Механика композитных материалов, 1980, № 3, с. 476–484.

Рига

Поступила в редакцию  
20.XI.1979