

УДК 539.3:534.1

УДАР ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА ПО ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

СЕНИЦКИЙ Ю. Э.

Реакция тонких неполюгих сферических оболочек при ударе вязкоупругого тела исследовалась в [1]. Принятая в ней расчетная схема использовалась для определения контактного давления, передающегося на вершину полусферического перекрытия в результате падения летательного аппарата. Падающее тело моделировалось линейной релаксирующей средой Максвелла.

Следует отметить, что в [1] рассмотрен неупругий удар. Вместе с тем известно [2-4], что такое представление справедливо лишь для относительно небольших скоростей соударения.

В данной статье приведено решение аналогичной задачи для круговой в плане полой сферической оболочки с учетом местных деформаций (упругий удар), на основании которого получена количественная оценка их влияния на контактное давление.

1. Рассмотрим прямой сосредоточенный удар вязкоупругого массивного тела в сечении $r=0$ тонкой упругой полой сферической оболочки. Из геометрических соображений (фиг. 1) находим

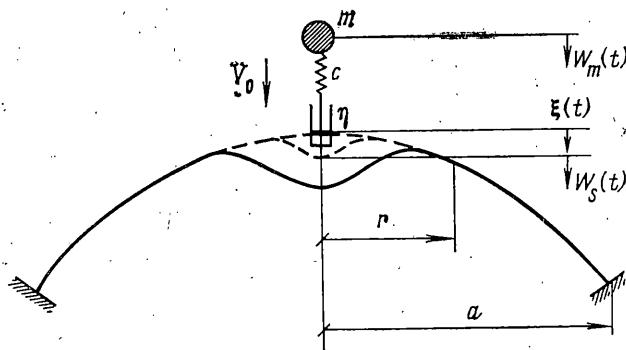
$$U(t) = W_m(t) - [\xi(t) + W_s(t)] \quad (1.1)$$

где $U(t)$, $W_m(t)$ — абсолютная деформация падающего вязкоупругого тела и перемещение его центра масс, $W_s(t)$, $\xi(t)$ — соответственно прогиб оболочки и местные деформации смятия в точке соударения ($r=0$).

Абсолютная деформация тела $U(t)$ в соответствии с релаксирующей моделью Максвелла определяется соотношением [5]:

$$U(t) = \frac{1}{c} F(t) + \frac{1}{\eta} \int_0^t F(\tau) d\tau \quad (1.2)$$

Здесь c , η — жесткость линейной пружины и постоянная вязкого элемента, $F(t)$ — сила контактного взаимодействия.



Фиг. 1

Рассматривая движение тела массой m , падающего со скоростью V_0

$$mW_m''(t) = mg - F(t), \quad W_m|_{t=0} = 0, \quad W_m'|_{t=0} = V_0$$

находим

$$W_m(t) = V_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t [mg - F(\tau)] (t - \tau) d\tau \quad (1.3)$$

Местные деформации смятия определяются по обобщенной зависимости Герца [3]:

$$\xi(t) = k[F(t)]^s, \quad s = 2l/(2l+1) \quad (l=1, 2, 3, \dots) \quad (1.4)$$

где k — коэффициент, зависящий от упругих характеристик соударяемых тел и формы контура области сжатия, s — показатель нелинейности.

Используя общее решение динамической задачи для полой сферической оболочки [6], функцию нормальных перемещений можно представить в виде следующего разложения:

$$W(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} W_H(\xi_i, t) K(\xi_i r) \|K\|^{-2} \quad (1.5)$$

Для жестко заземленной по контуру оболочки, нагруженной произвольной осесимметричной аperiodической нагрузкой $Z(r, t)$, имеем

$$K(\xi_i r) = J_0(\xi_i a) I_0(\xi_i r) - I_0(\xi_i a) J_0(\xi_i r) \quad (1.6)$$

$$\|K\|^2 = \frac{a^2}{2} [I_0^2(\xi_i a) J_1^2(\xi_i a) + 2I_0^2(\xi_i a) J_0^2(\xi_i a) - J_0^2(\xi_i a) I_1^2(\xi_i a)]$$

$$W_H(\xi_i, t) = \frac{1}{\rho h \omega_i} \int_0^t \int_0^a r Z(r, \tau) K(\xi_i r) \sin \omega_i(t - \tau) dr d\tau \quad (1.7)$$

$$\omega_i = \sqrt{(Dh^{-1}\xi_i^4 + ER^{-2})\rho^{-1}}$$

Здесь ω_i — круговые частоты колебаний оболочки, D , h , ρ — соответственно цилиндрическая жесткость, толщина и плотность материала, R — радиус кривизны оболочки, $J_\nu(\xi_i r)$, $I_\nu(\xi_i r)$ — обычные и модифицированные функции Бесселя первого рода порядка ν ($\nu=0, 1$), ξ_i — положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(\xi_i a) I_1(\xi_i a) + I_0(\xi_i a) J_1(\xi_i a) = 0$ ($i=1, \infty$).

При действии в вершине оболочки ($r=0$) сосредоточенной динамической нагрузки $F(t)$ получим $Z(r, t) = (2\pi r)^{-1} F(t) \delta(r)$, где $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака.

Учитывая это равенство, интеграл нагрузки (1.7) принимает вид

$$W_H(\xi_i, t) = \frac{1}{2\pi \rho h \omega_i} K_i(0) \int_0^t F(\tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau$$

Здесь в соответствии с (1.6) имеем $K_i(0) = J_0(\xi_i a) - I_0(\xi_i a)$.

Из разложения (1.5) следует, что для рассматриваемого воздействия (фиг. 1) перемещение вершины оболочки определяется соотношением

$$W_s(t) = W(0, t) = \frac{1}{2\pi \rho h} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_i} K_i^2(0) \|K\|^{-2} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau \quad (1.8)$$

Подстановка выражений (1.2)–(1.4), (1.8) в равенство (1.1) приводит к следующему нелинейному интегральному уравнению относительно функции контактного давления $F(t)$:

$$\frac{1}{c} F(t) + k[F(t)]^s + \frac{1}{\eta} \int_0^t F(\tau) d\tau + \frac{1}{m} \int_0^t F(\tau) (t-\tau) d\tau + \frac{1}{2\pi\rho h} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_i} \frac{K_i^2(0)}{\|K\|^2} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_i(t-\tau) d\tau = V_0 t + \frac{gt^2}{2} \quad (1.9)$$

Воспользовавшись условием эквивалентности импульсов, находим

$$\mu = k \int_0^t [F(\tau)]^s d\tau \left[\int_0^t F(\tau) d\tau \right]^{-1} \quad (1.10)$$

Дифференцированием зависимости (1.10) приходим к равенству

$$k[F(t)]^s = \mu F(t) \quad (1.11)$$

Соотношения (1.10), (1.11) позволяют линеаризовать уравнение (1.9) и построить итерационный процесс его решения. Действительно, задаваясь в первом приближении $\mu = \mu_1$, из линеаризованного с учетом (1.11) интегрального уравнения (1.9) определяется контактное давление $F^*(t)$ и период его действия T^1 . Принимая затем $t = T^1$, по формуле (1.10) вычисляем $\mu = \mu_2$. Для найденного значения $\mu = \mu_2$ выполняется вторая итерация по описанной выше схеме, в результате которой получаем $\mu = \mu_3$ и т. д. Процесс считается законченным, если для принятой точности $\varepsilon > 0$ справедливо одно из неравенств: $|(\mu_n - \mu_{n-1})/\mu_n| \leq \varepsilon$ или $|(\mu_n - \mu_{n-1})/\mu_{n-1}| \leq \varepsilon$.

Используется оценка с меньшим значением μ_n или μ_{n-1} .

Данные расчеты подтвердили хорошую сходимость приведенного алгоритма. Так, например, для $m=1$, $\mu_1=1$, $\varepsilon=0,01$ потребовалось $n=5$ итераций.

2. Переходим далее к решению линеаризованного (1.9), (1.11) интегрального уравнения. Для этого применим преобразование Лапласа. В результате будем иметь [7]:

$$f(p) = \left[1 + \frac{m}{\eta} p + m \left(\frac{1}{c} + \mu \right) p^2 + \frac{m}{2\pi\rho h} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K_i^2(0) p^2}{\|K\|^2 (p^2 + \omega_i^2)} \right]^{-1} m V_0$$

$$f(p) = \int_0^{\infty} F(t) \exp(-pt) dt$$

Следует заметить, что при ударных воздействиях максимальное значение контактного давления $F^*(t)$ достигается за весьма малый промежуток времени t . Это позволяет даже при небольших скоростях соударения V_0 пренебречь весом падающего тела — вторым слагаемым правой части (1.9)

В дальнейшем, ограничиваясь конечным числом членов $i=N$, изображение $f(p)$ преобразуем к следующему виду:

$$f(p) = m V_0 \varphi(p) [\Psi(p)]^{-1}, \quad \varphi(p) = \prod_{j=1}^N (p + \omega_j) \quad (2.1)$$

$$\Psi(p) = \left[1 + \frac{m}{\eta} p + m \left(\frac{1}{c} + \mu \right) p^2 \right] \prod_{j=1}^N (p + \omega_j) + \frac{m}{2\pi\rho h} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K_i^2(0)}{\|K\|^2} p^2 \prod_{j \neq i}^N (p^2 + \omega_j^2)$$

Представление (2.1) позволяет довольно просто выполнить обращение. Действительно, определив из уравнения $\Psi(p)=0$ полюса p_k ($k=1, 2N+2$) функции (2.1), раскладываем $\varphi(p)$ $[\Psi'(p)]^{-1}$ на простые дроби. В результате получим

$$f(p) = mV_0 \sum_{k=1}^{2N+2} \frac{A_k(p)}{p-p_k}, \quad A_k(p) = \varphi(p_k) [\Psi'(p_k)]^{-1}, \quad \Psi'(p_k) = \prod_{j \neq k}^{2N+2} (p_k - p_j) \quad (2.2)$$

Контактное давление $F(t)$ определяем по формуле обращения. Имеем в виду (2.2), находим

$$F(t) = mV_0 \sum_{k=1}^{2N+2} A_k(p) \exp(p_k t) \quad (2.3)$$

Таким образом, на каждой итерации контактное давление (ударный импульс) определяется по разложению (2.3), структура которого аналогична [1]. Число удерживаемых членов N зависит от формы и длительности ударного импульса. Последний определяется жесткостными и инерционными характеристиками соударяемых тел. Для пологих оболочек, имеющих значительно меньшую жесткость вследствие кривизны по сравнению с подъемистыми, первые частоты и формы колебаний вносят основной вклад в реакцию системы. Следовательно, в расчетах достаточно удерживать $N=5-7$ членов.

3. Поскольку ударный импульс (2.3) пропорционален скорости соударения V_0 , то в дальнейшем все вычисления производились для $V_0=1$ м/с. Масса падающего тела принималась равной $m=10^4$ кг. Соответствующие данные для оболочки: $E=2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\nu_1=0,25$, $\rho=2,4 \cdot 10^3$ кг/м³, $h^0=h/a=0,05$, $a=23,1$ м, $R=35,5$ м. Численный анализ был выполнен для $k=1, 2, 4 \cdot 10^{-8}$ мН^{-2/3} и различных значений $s=2/3, 4/5$, а также $\eta=2 \cdot 10^5, 4 \cdot 10^5$ Нс/м и $c=10^6, 5 \cdot 10^6$ Н/м. Коэффициент k определялся по известной методике [2] для стального ударника с полусферическим окончанием радиуса $R_1=1,5$ м.

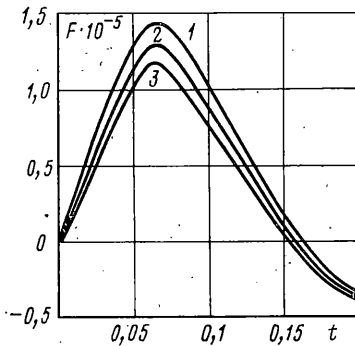
Первые десять частот осесимметричных колебаний рассматриваемой оболочки ω_i ($i=1, 10$) составляют в Гц: 38,52; 50,77; 85,34; 139,2; 215,8; 308,2; 418,0; 545,0; 684,1; 844,8.

На графиках фиг. 2-4 приведен ударный импульс, подсчитанный для следующих значений параметров c, η : $5 \cdot 10^6$ Н/м, $4 \cdot 10^5$ Нс/м; $5 \cdot 10^8$ Н/м, $2 \cdot 10^5$ Нс/м и 10^6 Н/м, $2 \cdot 10^5$ Нс/м. Кривые 1-3 соответствуют контактному давлению, определенному в результате пренебрежения местными деформациями ($k=0$, неупругий удар), а также с учетом последних по теории Герца ($s=2/3$), и для случая плотного касания тел ($s=4/5$).

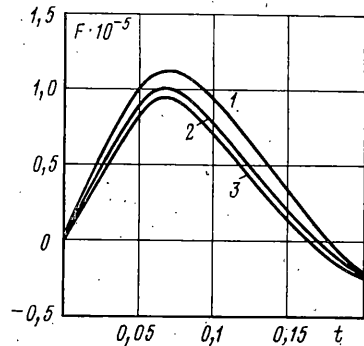
Одновременно были выполнены расчеты по уравнению (1.9) при $W_s=0$, что отвечает соударению вязкоупругого тела с жесткой стенкой. Следует отметить, что контактное давление в этом случае лишь незначительно (менее чем на 1%) превышает аналогичные значения $F(t)$, вычисленные без учета местных деформаций оболочки (кривые 1), и поэтому на фиг. 2-4 не приводятся. Таким образом, упругие деформации оказывают незначительное влияние на величину ударного импульса и их следует учитывать лишь для весьма тонких оболочек ($h^0 < 0,01$).

Вместе с тем локальные деформации довольно существенно снижают контактное давление. Действительно, в случае $s=4/5$ (фиг. 2) F^* ниже на 16%, а при $s=2/3$ — на 9,4% соответствующих наибольших величин $F(t)$, определенных в предположении неупругого удара. Время действия ударного импульса изменяется в пределах $T=0,152-0,295$ с (фиг. 3, 4) и значительно превосходит период основного тона колебаний оболочки $T_1=1/\omega_1=0,02495$ с. Это обстоятельство указывает [3] на применимость в данном случае теории Герца.

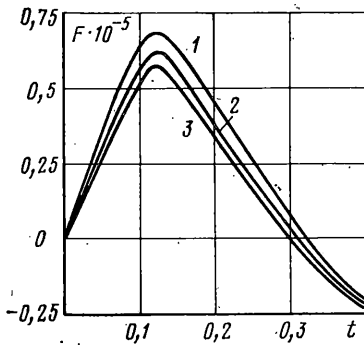
Величина и продолжительность ударного импульса в значительной степени определяются также параметрами c , η вязкоупругого тела. С увеличением c и η контактное давление возрастает, а период действия T сокращается. При этом особенно большое влияние на T оказывают упругие свойства ударника. Следует учесть, что принятая в расчетной схеме модель Максвелла представляет двустороннюю связь, поэтому формально $F(t)$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

может принимать и отрицательные значения (фиг. 2—4). Однако обращение в нуль $F(t)$ означает окончание основной фазы действия ударного импульса (первое соударение), а соответствующая величина T — момент отрыва ударника от оболочки.

Хотя перемещения и внутренние усилия в оболочке не приведены, их вычисление очевидно. Для этого достаточно определить по формуле (1.7) трансформанту $W_H(\xi, t)$, используя найденные ударные импульсы (фиг. 2—4). Нормальные перемещения $W(r, t)$ затем находятся по разложению (1.5), а все внутренние усилия — по формулам [6].

Исследование выполнено на основе технической моментной теории тонких оболочек, поэтому полученные результаты справедливы в том случае, когда время нарастания максимального давления больше времени прохождения волн деформаций от места соударения до краев оболочки [8]. Для рассматриваемых толщин оболочек $h^0 \leq 0,05$ применение гиперболических уравнений типа Тимошенко не вносит существенных корректив в реакцию системы. При значительных скоростях соударения уточнение напряженно-деформированного состояния может потребоваться лишь в локальной зоне соударения тел [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Hammel J. Aircraft impact on a spherical shell.—Nucl. Engng and Des., 1976, v. 37, No. 2, p. 205—223.
2. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Стройиздат, 1965. 448 с.
3. Кильчевский Н. А. Теория соударений твердых тел. Киев.: Наукова думка, 1969. 246 с.
4. Сеницкий Ю. Э. Поперечный удар по стержню сплошного или составного сечения.—Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 4, с. 697—704.
5. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник./Под ред. Биргера И. А., Пановко Я. Г. Т. 1. М.: Машиностроение, 1968. 831 с.

6. *Сеницкий Ю. Э.* Расчет пологой сферической оболочки на действие произвольной динамической нагрузки. — Прикл. механика, 1968, т. 4, вып. 4, с. 66–74.
7. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М.: Наука, 1965. 287 с.
8. *Эйбрамсон Х. Н., Плас Х. Д., Риппергер Э. А.* Распространение волн напряжения в стержнях и балках. — Проблемы механики: Сб. статей. Вып. 3. М.: Изд-во иностр. лит., 1961, с. 24–90.
9. *Нигул У. К.* Сопоставление результатов анализа переходных волновых процессов в оболочках и пластинах по теории упругости и приближенным теориям. — ПММ, 1969, т. 33, вып. 2, с. 308–322.

Куйбышев

Поступила в редакцию
3.IV.1980