

УДК 539.3:534.1

СВОЙСТВА СПЕКТРОВ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ  
ПОЛОГИХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

ХРОМАТОВ В. Е.

При проектировании и расчете тонкостенных элементов конструкций, работающих в условиях вибрационных нагрузок, необходимо оценивать границы распределения частот собственных колебаний. Задача о плотности собственных частот тонких упругих оболочек (числе собственных частот, приходящихся на единицу частотного диапазона) была решена в [1, 2]. Развитие этих результатов применительно к задаче колебаний и устойчивости других типов упругих систем дано в [3-7]. Общие положения теории распределения собственных частот упругих тел и ее технические приложения к расчету случайных широкополосных колебаний упругих систем приводятся в [8]. Трехслойные конструкции широко распространены в инженерном деле, и дальнейшее исследование плотности собственных значений при рассмотрении устойчивости трехслойных сферических панелей проведено в [9]. Вопросы распределения частот собственных колебаний трехслойных оболочек остаются мало изученными.

В публикуемой работе получены асимптотические соотношения для плотности частот собственных колебаний пологих трехслойных оболочек, исследуется влияние безмоментного напряженного состояния на распределение собственных частот трехслойных сферических и цилиндрических оболочек.

1. Рассмотрим колебания пологой упругой оболочки, состоящей из двух несущих изотропных слоев толщиной  $h_1, h_2$ , плотностью материала  $\rho_1, \rho_2$ , упругими постоянными  $E_1, \nu_1, E_2, \nu_2$  и трансверсально-изотропного заполнителя с параметрами  $h_3, \rho_3, E_3, \nu_3$  и модулем сдвига  $G'$ . Поверхность приведения оболочки отнесем к криволинейной ортогональной системе координат  $x_1, x_2$ , совпадающей с главными линиями кривизны,  $R_1, R_2$  — радиусы кривизны ( $R_1 > R_2$ ). Оболочка может быть нагружена начальными безмоментными докритическими усилиями  $N_{11}, N_{22}$ , причем главные оси начального напряженного состояния примем совпадающими с координатными линиями. Тангенциальные силы инерции учитывать не будем. Уравнения для преимущественно изгибных форм колебаний пологой трехслойной оболочки имеют вид [10]:

$$D \left( 1 - \frac{\Theta h^2}{\beta} \Delta \right) \Delta \Delta \chi + \Delta_k F - \left( N_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + N_{22} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \left( 1 - \frac{h^2}{\beta} \Delta \right) \chi - s \Omega^2 \left( 1 - \frac{h^2}{\beta} \Delta \right) \chi = 0, \quad \frac{1}{Eh} \Delta \Delta F - \left( 1 - \frac{h^2}{\beta} \right) \Delta_k \chi = 0 \quad (1.1)$$

$$D = \frac{Eh^3 \Theta_0}{12(1-\nu^2)}, \quad E = (1-\nu^2) \sum_{k=1}^3 \frac{E_k t_k}{(1-\nu_k^2)}, \quad t_k = \frac{h_k}{h}$$

$$\nu = \sum_{k=1}^3 \gamma_k \nu_k, \quad \gamma_k = \frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2} \left( \sum_{k=1}^3 \frac{E_k h_k}{(1-\nu_k^2)} \right)^{-1}$$

$$h = \sum_{k=1}^3 h_k, \quad s = \sum_{k=1}^3 \rho_k h_k, \quad \beta = \frac{12G' t_3 (1-\nu^2)}{E \Theta_1}$$

$$\Theta = \frac{\Theta_1 \Theta_3 - \Theta_2^2}{\Theta_1 \Theta_0}, \quad \Theta_0 = \Theta_1 + 2\Theta_2 + \Theta_3$$

$$\Theta_1 = t_3^2 [1 + 2(\gamma_1 + \gamma_2) - 3(\gamma_1 - \gamma_2)^2]$$

$$\Theta_2 = 3t_3 \gamma_3 (\gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2) + 6\gamma_1 \gamma_2 t_3 (t_1 + t_2)$$

$$\Theta_3 = 4(\gamma_1 t_1^2 + \gamma_2 t_2^2) - 3(\gamma_1 t_1 - \gamma_2 t_2)^2$$

Здесь  $\chi$ ,  $F$  — формы функции перемещений и усилий в оболочке, соответствующие собственной частоте колебаний  $\Omega$ ,  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\Delta_h$  — оператор В. З. Власова,  $D$  — цилиндрическая жесткость трехслойной оболочки,  $E$ ,  $\nu$  — приведенные модуль упругости и коэффициент Пуассона трехслойной оболочки [10], параметры  $\Theta$ ,  $\Theta_0$  характеризуют изгибную жесткость несущих слоев и податливость сдвигу заполнителя. В зависимости от относительной толщины слоев оболочки  $t_h$ , безразмерной жесткости слоев на растяжение  $\gamma_h$  параметры  $\Theta_0$ ,  $\Theta$  могут принимать значения  $1 \leq \Theta_0 \leq 3$ ,  $0 \leq \Theta \leq 0,25$  [10].

Введем характерное волновое число  $k_0$  и характерную частоту  $\Omega_r$ , а также безразмерные параметры

$$k_0^4 = \frac{Eh}{DR_2^2}, \quad \Omega_r^2 = \frac{Eh}{sR_2^2}, \quad \omega = \frac{\Omega}{\Omega_r}, \quad \kappa = \frac{R_2}{R_1}, \quad \xi_1 = k_0 x_1, \quad \xi_2 = k_0 x_2$$

$$u = k_0 \chi, \quad \psi = \frac{R_2 k_0^3}{Eh} F, \quad \varepsilon = \frac{(k_0 h)^2}{\beta}, \quad p_1 = \frac{N_{11}}{|N_{1*}|}, \quad p_2 = \frac{N_{22}}{|N_{1*}|}$$

$$N_{1*} = -\frac{Eh^2}{R_2^2} \sqrt{\frac{\Theta_0}{3(1-\nu^2)}}$$

После перехода к безразмерным переменным уравнения (1.1) примут вид

$$(1 - \Theta \varepsilon \Delta) \Delta \Delta u + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1^2} + \kappa \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_2^2} - 2 \left( p_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + p_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) \times \quad (1.2)$$

$$\times (1 - \varepsilon \Delta) u - \omega^2 (1 - \varepsilon \Delta) u = 0, \quad \Delta \Delta \psi - \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \kappa \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) (1 - \varepsilon \Delta) u = 0$$

Для частот собственных колебаний, замкнутых в окружном направлении и опертых по торцам оболочек, либо пологих панелей с условиями шарнирного опирания по кромкам, справедлива следующая формула:

$$\omega^2 = (k_1^2 + k_2^2)^2 \frac{[1 + \Theta \varepsilon (k_1^2 + k_2^2)]}{[1 + \varepsilon (k_1^2 + k_2^2)]} + \frac{(k_1^2 + \kappa k_2^2)^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2} + 2(p_1 k_1^2 + p_2 k_2^2) \quad (1.3)$$

Число собственных частот  $N(\omega)$ , меньших некоторого заданного значения частоты  $\omega_0$ , будем оценивать как отношение площади на плоскости волновых чисел  $k_1, k_2$ , внутри которой имеет место неравенство  $\omega(k_1, k_2) < \omega_0$ , к площади одной ячейки  $\Delta k_1 \Delta k_2$  [1, 8]. Плотность собственных частот  $n(\omega)$  определяется дифференцированием  $N(\omega)$  по параметру  $\omega$ . Для вычислений  $N(\omega)$  и  $n(\omega)$  удобно перейти к полярным координатам  $r^2 = k_1^2 + k_2^2$ ,  $\text{tg } \varphi = k_2 / k_1$ , выразив  $r^2(\varphi, \omega)$  из (1.3):

$$N(\omega) = \frac{1}{\Delta k_1 \Delta k_2} \int_{\varphi_1(\omega)}^{\varphi_2(\omega)} \frac{r^2(\varphi, \omega)}{2} d\varphi \quad (1.4)$$

$$r^4 \frac{(1 + \Theta \varepsilon r^2)}{(1 + \varepsilon r^2)} + 2r^2 (p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi) - \omega^2 + (\cos^2 \varphi + \kappa \sin^2 \varphi)^2 = 0 \quad (1.5)$$

Получить  $r^2(\varphi, \omega)$  в явном виде не удастся, и соотношение для плотности собственных частот не может быть сведено к стандартным табули-

рованным функциям. В предельном случае при  $\varepsilon \rightarrow 0$  для относительно тонких оболочек с достаточно большой жесткостью на сдвиг заполнителя в соотношении (1.5) можно выразить  $r^2(\varphi, \omega)$  и после стандартных преобразований [1] получить асимптотические соотношения для плотности собственных частот через эллиптические интегралы первого рода в форме Лежандра [2, 8].

Для случая колебаний оболочек, свободных от безмоментных усилий  $p_1 = p_2 = 0$ , эти соотношения имеют вид

$$n(\omega) / n_0 = 0 \quad (0 < \omega < \kappa, \quad \kappa > 0)$$

$$\frac{n(\omega)}{n_0} = \frac{2}{\pi} \frac{\omega}{\sqrt{(\omega+1)(\omega-\kappa)}} K\left(\frac{1}{k}\right) \quad (0 < \omega < (-\kappa), \quad \kappa < 0)$$

$$\frac{n(\omega)}{n_0} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\omega}{2(1-\kappa)}} K(k) \quad (|\kappa| < \omega < 1)$$

$$\frac{n(\omega)}{n_0} = \frac{2}{\pi} \frac{\omega}{\sqrt{(\omega+1)(\omega-\kappa)}} K\left(\frac{1}{k}\right) \quad (\omega > 1) \quad (1.6)$$

$$k^2 = \frac{(\omega+1)(\omega-\kappa)}{2\omega(1-\kappa)}, \quad n_0 = n_c \Omega_r, \quad n_c = \frac{a_1 a_2}{4\pi} \sqrt{\frac{s}{D}}$$

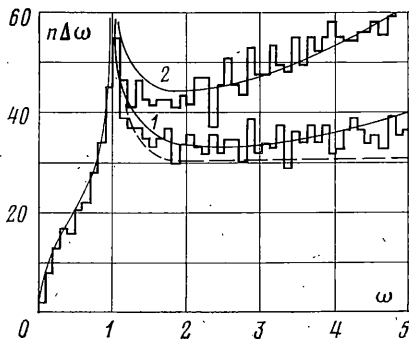
Здесь  $n_c$  — плотность Куранта для эквивалентной трехслойной пластины со сторонами  $a_1, a_2$ ;  $\Omega_r$  имеет смысл частоты безмоментных колебаний трехслойной оболочки (1.2). Соотношения (1.6) являются обобщением формул из [8] для случая колебаний трехслойных оболочек с бесконечно большой жесткостью на сдвиг в заполнителе. При  $\omega \rightarrow \infty$  плотность собственных частот колебаний оболочек стремится к соответствующей плотности Куранта  $n_0$  — величине постоянной. Влияние эффектов, связанных с деформацией сдвига и инерцией вращения, на плотность собственных частот колебаний пластин было исследовано в [2, 5]. Перейдем к обсуждению влияния податливости на сдвиг заполнителя на распределение собственных частот трехслойных оболочек.

2. Для оценки влияния податливости на сдвиг заполнителя на плотность собственных частот колебаний оболочек был поставлен численный эксперимент. Производилось вычисление на ЭВМ собственных частот колебаний трехслойных оболочек по формуле (1.3) и затем частоты группировались по интервалам  $\Delta\omega = 0,1$ . Полученная эмпирическая плотность сопоставлялась с результатами расчета по формулам (1.6). Оказалось, что для широкого диапазона изменения параметра сдвига  $\beta$  в заполнителе при  $\omega < 1$  плотность частот не зависит от изменения  $G'$ . При  $\omega > 1$  плотность собственных частот колебаний трехслойной оболочки возрастает с увеличением частоты  $\omega$  и относительной толщины заполнителя  $h_3/R_2$  и  $E_3/G'$ .

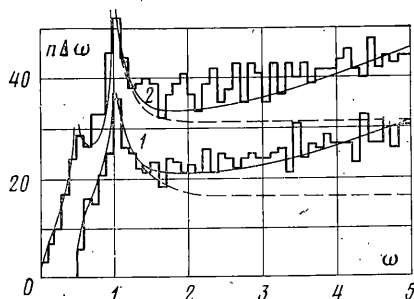
В итоге вычислений можно дать следующие рекомендации для оценки асимптотической плотности собственных частот колебаний трехслойных оболочек. При  $\omega < 1$  для плотности частот справедливы первые три соотношения в (1.6). При  $\omega > 1$  последнее соотношение в (1.6) необходимо домножить на функцию поправок  $f(\alpha, g)$ , учитывающую податливость на сдвиг заполнителя

$$f(\alpha, g) = \sqrt{1 + 3\alpha g \omega}, \quad \alpha = h_3/R_2, \quad g = E_3/G' \quad (2.1)$$

На фиг. 1 приведены результаты вычислений асимптотической и эмпирической плотности собственных частот колебаний пологих трехслойных цилиндрических оболочек ( $p_1 = 0, p_2 = 0$ ) с относительными размерами  $a_1/R = 2, t_1 = t_2 = 0,25, t_3 = 0,5, h/R = 5 \cdot 10^{-3}, E_1/E_3 = E_2/E_3 = 2$ . Кривые 1



Фиг. 1



Фиг. 2

построены для оболочек с параметром сдвига заполнителя  $g=20$ , кривые 2 — для оболочек с параметром  $g=80$ . Соотношение для асимптотической плотности частот трехслойной цилиндрической оболочки с учетом сдвигов в заполнителе имеет вид

$$\frac{n(\omega)}{n_0} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\omega}{2}} K \left[ \left( \frac{\omega+1}{2} \right)^{1/2} \right] \quad (\omega < 1)$$

$$\frac{n(\omega)}{n_0} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\omega(1+3\alpha g\omega)}{(\omega+1)}} K \left[ \left( \frac{2}{\omega+1} \right)^{1/2} \right] \quad (\omega > 1) \quad (2.2)$$

Как и в случае однослойных оболочек, распределение собственных частот цилиндрических трехслойных оболочек начинается с  $\omega=0$ . При  $\omega=1$ , т. е. при

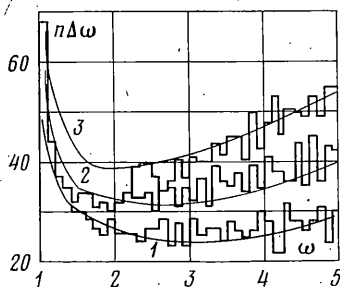
$$\Omega = \Omega_r \sim \frac{1}{R} \sqrt{\frac{E_1 h_1 + E_2 h_2 + E_3 h_3}{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3}} \quad (2.3)$$

имеем асимптотическую точку сгущения собственных частот. Штриховые кривые на фиг. 1, 2 получены для оболочек с абсолютно жестким на сдвиг заполнителем  $g=0$ ,  $n(\omega)=n_0$  при  $\omega \rightarrow \infty$ . При  $\omega < 1$  все три кривые сливаются. При  $\omega > 1$  увеличение податливости заполнителя на сдвиг приводит к росту плотности собственных частот.

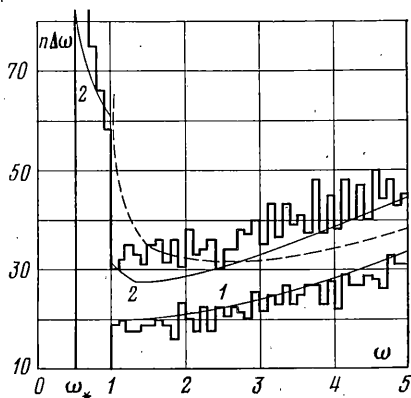
Распределение частот собственных колебаний пологих трехслойных оболочек положительной гауссовой кривизны  $\kappa > 0$  начинается с  $\omega = \kappa$ ; при  $\omega=1$  наблюдается сгущение собственных частот колебаний трехслойных оболочек. На фиг. 2 приведены результаты вычислений эмпирической и асимптотической плотности частот собственных колебаний оболочек положительной гауссовой кривизны  $\kappa=0,5$ ,  $h/R_2=10^{-2}$  (кривая 1) и отрицательной гауссовой кривизны  $\kappa=-0,5$ ,  $h/R_2=5 \cdot 10^{-3}$  (кривая 2) с одинаковыми толщинами слоев  $t_1=t_2=t_3=1/3$ ,  $g=50$ .

Асимптотическая плотность собственных частот оболочек отрицательной гауссовой кривизны имеет две особенности: при  $\omega = |\kappa|$  и  $\omega=1$ . В данном случае ( $\kappa=-0,5$ ) сгущение собственных частот наблюдается лишь при  $\omega=1$ . Для оболочек отрицательной гауссовой кривизны с отношением радиусов  $|\kappa| > 0,5$  ( $\kappa \neq -1,0$ ) сгущение частот наблюдается в двух точках:  $\omega = |\kappa|$  и  $\omega=1$  [11]. Во всех случаях имеем хорошее совпадение эмпирического распределения собственных частот трехслойных оболочек с асимптотическими оценками.

На фиг. 3 приведены графики распределения собственных частот колебаний сферической панели с относительными размерами  $a_1/R=2$ ,  $a_2/a_1=\pi$ ,  $h/R=8 \cdot 10^{-3}$ ,  $g=80$ . Кривая 1 соответствует параметрам относительной толщины несущих слоев и заполнителя  $t_1=t_2=0,45$ ,  $t_3=0,1$ ; кривая 2 —  $t_1=t_2=t_3=1/3$ ; кривая 3 —  $t_1=t_2=0,1$ ,  $t_3=0,8$ . Соотношение для



Фиг. 3



Фиг. 4

асимптотической плотности частот собственных колебаний трехслойных сферических оболочек имеет вид

$$\frac{n(\omega)}{n_0} = 0 \quad (0 < \omega < 1); \quad \frac{n(\omega)}{n_0} = \omega \sqrt{\frac{1+3\alpha g \omega}{\omega^2 - 1}} \quad (\omega > 1) \quad (2.4)$$

При относительно малой толщине заполнителя оболочки  $t_3 < t_1, t_2$  не существенно и влияние параметров сдвига заполнителя на распределение собственных частот. При  $t_3 \geq t_1, t_2$  плотность собственных частот растет с увеличением  $g$ , причем тем быстрее, чем больше  $t_3$ .

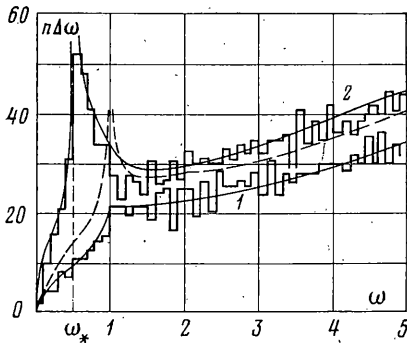
Видимо, соотношения (1.6), (2.2), (2.4) для плотности собственных частот можно распространить и на случай колебаний многослойных оболочек, набранных из  $m$  слоев, для которых справедливы гипотезы Кирхгофа — Лява для пакета в целом. В этом случае в формулу для плотности Куранта многослойной эквивалентной пластины  $n_c$  и для частоты колебаний  $\Omega_r$  (2.3) необходимо подставить суммарную приведенную плотность  $s$ .

3. Перейдем к исследованию влияния безмоментного напряженного состояния на распределение собственных частот трехслойных оболочек. Формулы для плотности частот собственных колебаний сферических и цилиндрических оболочек, нагруженных безмоментными усилиями, получены в [6, 7]. Эти формулы будут справедливы и для трехслойных оболочек с абсолютно жестким на сдвиг заполнителем. Чтобы уточнить эти формулы для оболочек с конечной сдвиговой жесткостью заполнителя, был поставлен численный эксперимент.

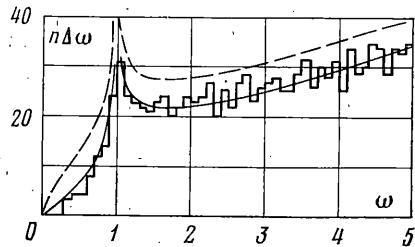
Численное построение на ЭВМ эмпирической плотности собственных частот по формулам (1.3) показало, что у оболочек с податливым на сдвиг заполнителем при  $\omega > 1$  растягивающие усилия понижают плотность собственных частот, а сжимающие усилия повышают плотность частот по сравнению с трехслойными оболочками, свободными от безмоментных усилий. В этом случае соотношения для асимптотической плотности частот [6, 7] при  $\omega > 1$  необходимо домножить на следующую поправочную функцию:

$$f_p(\alpha, g) = \sqrt{(1+3\alpha g \omega)(1-p_j/3)} \quad (j=1, 2) \quad (3.1)$$

Рассмотрим собственные колебания трехслойной сферической оболочки в окрестности безмоментного напряженного состояния. Пусть оболочка нагружена равномерно распределенным давлением, вызывающим появление растягивающих  $p > 0$  или сжимающих  $p < 0$  усилий ( $p_1 = p_2 = p$ ). При наличии растягивающих усилий в сферической оболочке особенность в асимптотической плотности собственных частот при  $\omega = 1$  переходит в изолированный максимум [6] и при  $p = 1$  асимптотическая точка сгущения вырождается. Соотношения для плотности частот трехслойных сфериче-



Фиг. 5



Фиг. 6

ских оболочек при растягивающих усилиях имеют вид

$$\frac{n(\omega)}{n_0} = 0 \quad (0 < \omega < 1); \quad \frac{n(\omega)}{n_0} = \omega \sqrt{\frac{(1+3\alpha g \omega)(1-p/3)}{\omega^2 - (1-p^2)}} \quad (\omega > 1) \quad (3.2)$$

При наличии сжимающих докритических усилий в сферической оболочке  $p < 0$  асимптотическая точка сгущения собственных частот смещается в область более низких частот  $\omega_* = (1-p^2)^{1/2}$  [6]. При  $\omega = 1$  функция асимптотической плотности частот имеет разрыв первого рода

$$\begin{aligned} n(\omega)/n_0 &= 0 \quad (0 < \omega < \sqrt{1-p^2}) \\ \frac{n(\omega)}{n_0} &= 2\omega \sqrt{\frac{(1+3\alpha g \omega)(1-p/3)}{\omega^2 - (1-p^2)}} \quad (\sqrt{1-p^2} < \omega < 1) \\ \frac{n(\omega)}{n_0} &= \omega \sqrt{\frac{(1+3\alpha g \omega)(1-p/3)}{\omega^2 - (1-p^2)}} \quad (\omega > 1) \end{aligned} \quad (3.3)$$

На фиг. 4 приведены результаты расчета эмпирической и асимптотической плотности частот собственных колебаний пологой сферической оболочки с относительными размерами  $a_1/R=2$ ,  $a_2/a_1=\pi$ ,  $h/R=8 \cdot 10^{-3}$ ,  $t_1 = t_2 = 0,25$ ,  $t_3 = 0,5$ ,  $g=50$ .

Кривая 1 соответствует случаю растягивающих усилий  $p=1$ . При величине растягивающих усилий, по модулю равных критическому значению для сферической панели, сгущения собственных частот при  $\omega=1$  не наблюдается. Штриховые кривые на фиг. 4–6 построены для оболочек без усилий.

Кривые 2 соответствуют результатам вычислений эмпирической и асимптотической плотности собственных частот колебаний трехслойной сферической оболочки, нагруженной сжимающими усилиями  $p=-0,75$ .

В диапазоне  $\Delta\omega=0,9-1,0$  содержится 58 частот колебаний оболочки, в диапазоне  $\Delta\omega=1,0-1,1$  содержится 30 собственных частот, что соответствует оценкам (3.3). При сжатии сферической оболочки в ее спектре собственных частот существует отрезок  $[(1-p^2)^{1/2}, 1]$  сильного увеличения плотности частот. Границами этого отрезка являются частота центрально-симметричных колебаний оболочки, сжатой внешним давлением, и частота центрально-симметричных колебаний сферической оболочки, свободной от безмоментных усилий.

4. Аналогичным образом можно распространить асимптотические оценки [7] для плотности частот собственных колебаний трехслойных цилиндрических оболочек, нагруженных безмоментными усилиями. В случае растяжения цилиндрической оболочки вдоль образующих ( $p_1 > 0$ ,  $p_2 = 0$ )

асимптотическая плотность собственных частот колебаний цилиндрической оболочки определяется формулами (для усилий  $p_1 < 1$ ):

$$\frac{n(\omega)}{n_0} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\omega^2}{4(1-p_1^2)}} F\left(\frac{1}{k}, \varphi_2\right) \quad (0 < \omega < \sqrt{1-p_1^2}) \quad (4.1)$$

$$\frac{n(\omega)}{n_0} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\omega}{\omega + (1-p_1^2)^{1/2}}} F(k, \varphi_1) \quad (\sqrt{1-p_1^2} < \omega < 1)$$

$$\frac{n(\omega)}{n_0} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\omega(1+3\alpha g\omega)(1-p_1/3)}{\omega + (1-p_1^2)^{1/2}}} K(k) \quad (\omega > 1)$$

$$k^2 = \frac{2\sqrt{1-p_1^2}}{\omega + \sqrt{1-p_1^2}}, \quad \varphi_2 = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{1-p_1^2}}{1 + \sqrt{1-p_1^2}}\right)^{1/2}$$

$$\varphi_1 = \arcsin\left(\frac{\omega + \sqrt{1-p_1^2}}{1 + \sqrt{1-p_1^2}}\right)^{1/2}$$

При растягивающих усилиях вдоль образующих по абсолютной величине, равных критическим ( $p_1 = 1$ ), выражение для плотности частот колебаний трехслойной цилиндрической оболочки имеет следующий вид:

$$\frac{n(\omega)}{n_0} = \left(1 - \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\omega}\right) \quad (0 < \omega < 1) \quad (4.2)$$

$$\frac{n(\omega)}{n_0} = \sqrt{(1+3\alpha g\omega)(1-p_1/3)} \quad (\omega > 1)$$

В случае сжатия цилиндрической оболочки вдоль образующих декритическими усилиями справедливы следующие соотношения для асимптотической плотности частот собственных колебаний:

$$\frac{n(\omega)}{n_0} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\omega^2}{4(1-p_1^2)}} \left[2K\left(\frac{1}{k}\right) - F\left(\frac{1}{k}, \varphi_2\right)\right] \quad (0 < \omega < \sqrt{1-p_1^2})$$

$$\frac{n(\omega)}{n_0} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\omega}{\omega + (1-p_1^2)^{1/2}}} [2K(k) - F(k, \varphi_1)] \quad (\sqrt{1-p_1^2} < \omega < 1)$$

$$\frac{n(\omega)}{n_0} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\omega(1+3\alpha g\omega)(1-p_1/3)}{\omega + (1-p_1^2)^{1/2}}} K(k) \quad (\omega > 1) \quad (4.3)$$

Соотношения для параметров  $k$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  даны выше.

На фиг. 5 приведены результаты вычислений эмпирической и асимптотической (4.2), (4.3) плотностей частот собственных колебаний цилиндрической оболочки, нагруженной растягивающими усилиями  $p_1 = 1,0$  (кривая 1) и сжимающими усилиями  $p_1 = -0,75$  (кривая 2). Штриховые кривые соответствуют случаю колебаний оболочки, свободных от безмоментных усилий. Параметры оболочек:  $a_1/R = 2$ ,  $h/R = 8 \cdot 10^{-3}$ ,  $g = 50$ . Растяжение оболочек вдоль образующих приводит к понижению плотности собственных частот и при  $p_1 = 1,0$  сгущения частот не наблюдается.

При сжатии цилиндрической оболочки вдоль образующих докритическими усилиями диапазон сгущения собственных частот смещается в область более низких частот  $\omega_* = (1-p_1^2)^{1/2}$ . Плотность частот в случае сжатия оболочки становится выше по сравнению с плотностью частот оболочки, свободной от усилий.

При нагружении цилиндрической оболочки усилиями в окружном направлении ( $p_2 \neq 0$ ,  $p_1 = 0$ ) характер распределения частот собственных

колебаний не меняется [7]. Здесь также при  $\omega=1$  будет существовать асимптотическая точка сгущения собственных частот, которой будет соответствовать максимум в эмпирическом распределении частот. При  $\omega \rightarrow \infty$  плотность собственных частот для трехслойных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью заполнителя будет возрастать. При достаточно больших растягивающих в окружном направлении усилиях плотность частот уменьшается во всем диапазоне частот по сравнению с плотностью частот оболочек, свободных от усилий. Асимптотические соотношения для плотности частот в этом случае ( $p_2 > 0, p_1 = 0$ ) будут иметь вид

$$\frac{n(\omega)}{n_0} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\omega^2}{2(p_2^2 + \omega^2(1-p_2^2))}} F\left(\frac{1}{k_1}, \varphi_3\right) \quad (0 < \omega < 1) \quad (4.4)$$

$$\frac{n(\omega)}{n_0} = \frac{2\omega}{\pi} \sqrt{\frac{(1+3\alpha g\omega)(1-p_2/3)}{\omega^2 + [p_2^2 + \omega^2(1-p_2^2)]^{1/2}}} K(k_1) \quad (\omega > 1)$$

$$k_1^2 = \frac{2\sqrt{p_2^2 + \omega^2(1-p_2^2)^2}}{\omega^2 + \sqrt{p_2^2 + \omega^2(1-p_2^2)^2}}$$

$$\varphi_3 = \arcsin\left(\frac{2\omega\sqrt{p_2^2 + \omega^2(1-p_2^2)^2}}{\omega^2 + \omega\sqrt{p_2^2 + \omega^2(1-p_2^2)^2} + p_2^2(1-\omega)}\right)^{1/2}$$

На фиг 6 приведены результаты вычислений асимптотической и эмпирической плотностей частот собственных колебаний трехслойной цилиндрической оболочки с усилиями  $p_2=1, p_1=0$ .

При наличии безмоментных усилий одновременно в продольном и окружном направлении ( $p_1 \neq 0, p_2 \neq 0$ ) в трехслойной цилиндрической оболочке характер распределения собственных частот и положение точек сгущения будут определяться величиной и направлением продольных усилий. Растягивающие усилия  $p_1 > 0$  приводят к понижению плотности частот в целом и в диапазоне сгущения  $\omega_* = 1$ . Сжимающие усилия  $p_1 < 0$  вызывают повышение плотности частот и смещают диапазон сгущения в область более низких частот  $\omega_* = (1-p_1^2)^{1/2}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. О плотности частот собственных колебаний тонких упругих оболочек. — ПММ, 1963, т. 27, вып. 2, с. 362–364.
2. Bolotin V. V. The density of eigenvalues in vibration problems of elastic plates and shells. — Proc. Vibr. Probl., 1965, v. 6, No. 4, p. 341–351.
3. Wilkinson J. P. D. Modal densities of certain shallow structural elements. — J. Acoust. Soc. Amer., 1968, v. 43, No. 2, p. 245–251.
4. Бендик Н. Н., Корнев В. М. О плотности собственных значений в задачах устойчивости тонких упругих оболочек. — ПММ, 1971, т. 35, вып. 2, с. 364–368.
5. Nelson H. M. The modal density for flexural vibration of thick plates and bars. — J. Sound. and Vibr., 1972, v. 25, No. 2, p. 255–261.
6. Хроматов В. Е. Плотность частот собственных колебаний тонких сферических оболочек при безмоментном напряженном состоянии. — Тр. Моск. энерг. ин-та, 1972, вып. 101, с. 148–153.
7. Хроматов В. Е. Свойства спектров тонких круговых цилиндрических оболочек, колеблющихся в окрестности безмоментного напряженного состояния. — Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 2, с. 103–108.
8. Болотин В. В. Теория распределения собственных частот упругих тел и ее применение к задачам случайных колебаний. — Прикл. механика, 1972, вып. 8, № 4, с. 3–29.
9. Корнев В. М. Сравнение спектров задач устойчивости однородных и трехслойных оболочек. — Прикл. механика, 1976, т. 12, № 9, с. 51–57.
10. Григoliaк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 170 с.
11. Хроматов В. Е. Эмпирическое распределение частот собственных колебаний оболочек отрицательной гауссовой кривизны. — Тр. Моск. энерг. ин-та, 1973, вып. 164, с. 43–47.