

УДК 539.3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТРЕЩИН В ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

ФЕДЮК Е. М.

В публикуемой работе задача об упругом равновесии пологой сферической оболочки с системой произвольно ориентированных трещин (разрезов) методом дисторсий [1, 2] сведена к системе сингулярных интегральных уравнений. Исследовано взаимодействие двух коллинеарных трещин, а также четырех трещин, образующих с осью Ox углы $\beta_k = 2\pi(k-1)/N$ ($k=1, 4$; $N=4$). Для рассмотренных случаев приведены графики изменения коэффициентов интенсивности усилий и моментов в окрестностях внешних и внутренних вершин трещин в зависимости от расстояния между трещинами.

1. Рассмотрим изотропную пологую сферическую оболочку толщиной $2h$, имеющую N произвольно ориентированных прямолинейных в плане непересекающихся сквозных трещин (разрезов) длиной $2l_k$ ($k=1, N$). Пусть оболочка находится под действием внешней нагрузки и берега разрезов загружены самоуравновешенными усилиями и моментами. Будем считать, что при заданной нагрузке берега разрезов в процессе деформации оболочки не контактируют.

Отнесем срединную поверхность оболочки к прямоугольной декартовой системе координат xOy . На каждом разрезе введем локальные системы координат $x_k O_k y_k$ ($k=1, N$), начала которых поместим в центре каждого разреза, а оси $O_k x_k$ направим по линии разрезов. Центры разрезов в базисной системе координат xOy имеют координаты (x_k^0, y_k^0) , а оси $O_k x_k$ образуют с осью Ox углы β_k .

Напряженное состояние такой оболочки можно представить в виде суммы напряженного состояния, вызванного внешней нагрузкой в оболочке без разрезов, и возмущенного — вызванного наличием разрезов (трещин). Напряженное состояние в оболочке без трещин будем считать известным. Граничные условия, которым должны удовлетворять компоненты возмущенного напряженного состояния на линии каждого разреза $|x_k| \leq l_k, y_k = 0$ ($k=1, N$), можно записать так:

$$N_2^+(x_k, 0) = N_2^-(x_k, 0) = f_{1k}(x_k), \quad S^+(x_k, 0) = S^-(x_k, 0) = f_{2k}(x_k) \quad (1.1)$$

$$M_2^+(x_k, 0) = M_2^-(x_k, 0) = f_{3k}(x_k), \quad Q_2^{*+}(x_k, 0) = Q_2^{*-}(x_k, 0) = f_{4k}(x_k)$$

где N_2, S, M_2, Q_2^* — соответственно нормальное и сдвигающее усилия, изгибающий момент и обобщенная в смысле Кирхгофа перерезывающая сила, f_{ik} ($i=1, 4$) — заданные усилия и моменты. Знаками плюс и минус обозначены граничные значения соответствующих функций на берегах разреза $y_k = +0$ и $y_k = -0$ соответственно.

Используя предложенный в [1, 2] метод решения задач теории тонких оболочек с трещинами для определения возмущенного напряженного состояния пологой сферической оболочки [3] с одним произвольно расположенным разрезом $|x_k| \leq l_k, y_k = 0$, получим систему дифференциальных уравнений относительно функций w_k и φ_k :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \varphi_k - \frac{D_0}{R} \nabla^2 w_k &= -D_0 (\nabla_1^2 \varepsilon_{22}^\circ - \nabla_1 \nabla_2 \varepsilon_{12}^\circ) \\ \nabla^2 \nabla^2 w_k + \frac{1}{DR} \nabla^2 \varphi_k &= -(\nu \nabla_1^2 + \nabla_2^2) \kappa_{22}^\circ - 2(1-\nu) \nabla_1 \nabla_2 \kappa_{12}^\circ \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\nabla^2 = \nabla_1^2 + \nabla_2^2, \quad \nabla_1 = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \nabla_2 = \frac{\partial}{\partial y_k}, \quad D_0 = 2Eh, \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$$

Здесь R — радиус срединной поверхности оболочки, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, ε_{ij}° , κ_{ij}° — компоненты тензора дисторсий, характеризующие скачки перемещений и угла поворота на линии разреза ($\delta(y_k)$ — функция Дирака):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22}^\circ &= [v_k(x_k)] \delta(y_k), \quad \varepsilon_{12}^\circ = [u_k(x_k)] \delta(y_k) \\ \kappa_{22}^\circ &= -[\theta_{2k}(x_k)] \delta(y_k) - [w_k(x_k)] \nabla_2 \delta(y_k), \quad \kappa_{12}^\circ = -\nabla_1 [w_k(x_k)] \delta(y_k) \\ [v_k(x_k)] &= v_k^+(x_k) - v_k^-(x_k), \quad [u_k(x_k)] = u_k^+(x_k) - u_k^-(x_k) \\ [\theta_{2k}(x_k)] &= \nabla_2 w_k^+ - \nabla_2 w_k^-, \quad [w_k(x_k)] = w_k^+(x_k) - w_k^-(x_k) \quad (|x_k| < l_k) \\ [u_k(x_k)] &= [v_k(x_k)] = [w_k(x_k)] = [\theta_{2k}(x_k)] = 0 \quad (|x_k| \geq l_k) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Решая систему (1.2), для функции прогибов w_k и функции напряжений φ_k получим выражения

$$\begin{aligned} g_k^i(x_k, y_k) &= \frac{c_i}{2\pi} \int_{-l_k}^{l_k} \{ [v_k(\xi)] \Phi_i(x_k - \xi, y_k) + [u_k(\xi)] \Phi_{i+2}(x_k - \xi, y_k) + \\ &+ Rc [\theta_{2k}(\xi)] F_i(x_k - \xi, y_k) + Rc [\theta_{1k}(\xi)] F_{i+2}(x_k - \xi, y_k) \} d\xi \quad (i=1,2) \\ g_k^1 &= w_k, \quad g_k^2 = \varphi_k, \quad \Phi_1 = f_1 - \text{ker } \gamma r, \quad \Phi_2 = f_2 + \text{ker } \gamma r, \quad \Phi_3 = f_3, \quad \Phi_4 = f_4 \\ F_1 &= \nu \text{ker } \gamma r - (1-\nu) f_2, \quad F_2 = \nu \text{ker } \gamma r + (1-\nu) f_1 \\ F_3 &= -(1-\nu) f_4 + \int_0^{z_k} \nabla_2 \text{ker } \gamma r dz_k, \quad F_4 = (1-\nu) f_3 + \int_0^{z_k} \nabla_2 \text{kei } \gamma r dz_k \\ f_1 &= \psi_1 \frac{y_k^2}{r^2} - \psi_3, \quad f_2 = \psi_2 \frac{y_k^2}{r^2} - \psi_4, \quad f_3 = \psi_1 \frac{y_k z_k}{r^2}, \quad f_4 = \psi_2 \frac{y_k z_k}{r^2} \\ \psi_1 &= \frac{2}{\gamma^2 r^2} + \frac{2 \text{ker}' \gamma r}{\gamma r} + \text{kei } \gamma r, \quad \psi_2 = \frac{2 \text{kei}' \gamma r}{\gamma r} - \text{ker } \gamma r, \quad \psi_3 = \frac{1}{\gamma^2 r^2} + \frac{\text{ker}' \gamma r}{\gamma r} \\ \psi_4 &= \frac{\text{kei}' \gamma r}{\gamma r}, \quad r^2 = y_k^2 + z_k^2, \quad z_k = x_k - \xi, \quad [\theta_{1k}(\xi)] = \frac{d}{d\xi} [w_k(\xi)] \\ \gamma &= 1/R\sqrt{c}, \quad c^2 = h^2/3(1-\nu^2)R^2, \quad c_1 = 1/Rc, \quad c_2 = D_0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\text{ker } x$, $\text{kei } x$ — функции Томсона.

Подставляя (1.4) в соответствующие формулы для определения усилий и моментов [2] и используя затем формулы [4], получим выражения для усилий и моментов на произвольной площадке, образующей с линией k -й трещины $O_k x_k$ некоторый угол. Таким образом в случае оболочки с системой N произвольно ориентированных трещин определяем усилия и моменты на линии n -й трещины $O_n x_n$.

В силу линейности рассматриваемой задачи суммарные усилия и моменты на линии n -й трещины, вызванные всеми скачками перемещений и углов поворота на N разрезах $|x_k| \leq l_k$, $y_k = 0$ ($k=1, N$), получим при помощи суперпозиции усилий и моментов для изолированных разрезов. По-

требовав затем, чтобы полученные суммарные усилия и моменты удовлетворяли граничным условиям (1.1), получим систему $4N$ сингулярных интегральных уравнений для определения неизвестных функций $\Psi_{ih}(\xi)$:

$$\sum_{h=1}^N \int_{-l_h}^{l_h} [\Psi_{1h}(\xi) K_{nh}^{(i)}(\xi, x_n) + \Psi_{2h}(\xi) L_{nh}^{(i)}(\xi, x_n) + \Psi_{3h}(\xi) P_{nh}^{(i)}(\xi, x_n) + \Psi_{4h}(\xi) R_{nh}^{(i)}(\xi, x_n)] d\xi = \frac{2\pi}{A_i} f_{in}(x_n) \quad (|x_n| \leq l_n) \quad (1.5)$$

(n=1, N; i=1, 4)

$$\Psi_{1h}(\xi) = \frac{d}{d\xi} [v_h(\xi)], \quad \Psi_{2h}(\xi) = \frac{d}{d\xi} [u_h(\xi)], \quad \Psi_{3h}(\xi) = Rc \frac{d}{d\xi} [\theta_{2h}(\xi)]$$

$$\Psi_{4h}(\xi) = Rc \frac{d}{d\xi} [\theta_{1h}(\xi)], \quad A_1 = A_2 = D_0, \quad A_3 = A_4 = D_0 Rc$$

Ядра системы (1.5), приведенные в [5], являются регулярными функциями, за исключением ядер $K_{nn}^{(1)}$, $L_{nn}^{(2)}$, $P_{nn}^{(3)}$ и $R_{nn}^{(4)}$, имеющих сингулярности типа Коши.

Решение системы интегральных уравнений (1.5) должно удовлетворять следующим условиям:

$$\int_{-l_h}^{l_h} \Psi_{ih}(\xi) d\xi = 0 \quad (i=1, 4), \quad \int_{-l_h}^{l_h} [\theta_{ih}(\xi)] d\xi = 0 \quad (h=1, N) \quad (1.6)$$

обеспечивающим неразрывность перемещений и углов поворота в вершинах разрезов.

При исследовании взаимодействия трещин в сферической оболочке более детально проанализируем случаи двух и четырех трещин.

2. Пусть сферическая оболочка имеет четыре равноудаленных от начала координат x, y разреза одинаковой длины $2l$, образующих с осью Ox углы $\beta_k = 2\pi(k-1)/N$, берега которых находятся под действием равных по величине растягивающих усилий $N_2 = -N_2^0(x)$ и изгибающих моментов $M_2 = -M_2^0(x)$. В этом случае система интегральных уравнений (1.5) в безразмерных координатах, отнесенных к l , имеет вид

$$\sum_{j=1, 3}^4 \int_{-1}^1 \Psi_j(\zeta) K_{ij}(x-\zeta) d\zeta = f_i(x) \quad (|x| \leq 1) \quad (i=1, 3) \quad (2.1)$$

$$\Psi_1(\zeta) = \frac{d}{d\zeta} [v(\zeta)], \quad \Psi_3(\zeta) = Rc \frac{d}{d\zeta} [\theta_2(\zeta)]$$

$$K_{ii} = \sum_{h=1}^2 \left[-\frac{a_i}{z_h} + K_{ii}^0(z_h) \right] + 2K_{ii}^0(s, t), \quad K_{13} = \sum_{h=1}^2 K_{13}^0(z_h) + 2K_{13}^0(s, t)$$

$$K_{31} = \sum_{h=1}^2 K_{13}^0(z_h) + 2K_{31}^0(s, t), \quad K_{11}^0(s, t) = \varphi_1(s, t)$$

$$K_{13}^0(s, t) = (1-\nu)\varphi_2(s, t) - \frac{\lambda s}{0} \operatorname{kei}' \lambda \rho - \lambda^2 \int_t^{-s} \operatorname{ker} \lambda \rho ds,$$

$$K_{31}^0(s, t) = (1-\nu)\varphi_2(s, t) + \frac{\lambda s}{0} \operatorname{kei}' \lambda \rho$$

$$\begin{aligned}
K_{33}^{\circ}(s, t) &= -(1-\nu)^2 \varphi_1(s, t) - \nu \lambda^2 \int_t^{-s} \operatorname{kei} \lambda \rho \, ds, & K_{11}^{\circ}(z_h) &= \omega_2(z_h) + \omega_4(z_h) \\
K_{13}^{\circ}(z_h) &= (1-\nu) \omega_1(z_h) + \nu \omega_3(z_h), & K_{33}^{\circ}(z_h) &= -(1-\nu)^2 \omega_2(z_h) + (1-\nu^2) \omega_4(z_h) + \omega_5(z_h) \\
\varphi_1 &= \left(\frac{8 \operatorname{kei}' \lambda \rho}{\lambda \rho} - 4 \operatorname{ker} \lambda \rho + \lambda \rho \operatorname{ker}' \lambda \rho \right) \frac{st^2}{\rho^4} - \left(\frac{2 \operatorname{kei}' \lambda \rho}{\lambda \rho} - \operatorname{ker} \lambda \rho \right) \frac{s}{\rho^2} \\
\varphi_2 &= \left(\frac{8}{\lambda^2 \rho^2} + \frac{8 \operatorname{ker}' \lambda \rho}{\lambda \rho} + 4 \operatorname{kei} \lambda \rho - \lambda \rho \operatorname{kei}' \lambda \rho \right) \frac{st^2}{\rho^4} - \\
&\quad - \left(\frac{2}{\lambda^2 \rho^2} + \frac{2 \operatorname{ker}' \lambda \rho}{\lambda \rho} + \operatorname{kei} \lambda \rho \right) \frac{s}{\rho^2} \\
\omega_1 &= \left(\frac{2}{\lambda^2 |z_h|^2} + \frac{2 \operatorname{ker}' \lambda |z_h|}{\lambda |z_h|} + \operatorname{kei} \lambda |z_h| \right) \frac{1}{z_h}, \\
\omega_2 &= \left(\frac{2 \operatorname{kei}' \lambda |z_h|}{\lambda |z_h|} - \operatorname{ker} \lambda |z_h| - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{z_h} \\
\omega_3 &= \frac{\lambda |z_h|}{z_h} \operatorname{kei}' \lambda |z_h|, & \omega_4 &= (\lambda |z_h| \operatorname{ker}' \lambda |z_h| + 1) \frac{1}{z_h} \\
\omega_5 &= \lambda^2 \int_0^{z_h} \operatorname{kei} \lambda |z_h| \, dz_h, & s &= - \left(\zeta + \frac{d}{l} \right), & t &= x + \frac{d}{l}, & z_1 &= x - \zeta \\
z_2 &= - \left(x + \zeta + 2 \frac{d}{l} \right), & \lambda &= \gamma l, & f_1 &= - \frac{2\pi}{D_0} N_2^{\circ}(x, 0) \\
f_3 &= - \frac{2\pi}{D_0 R c} M_2^{\circ}(x, 0), & a_1 &= \frac{1}{2}, & a_3 &= \frac{3-2\nu-\nu^2}{2}
\end{aligned}$$

где $2d$ — расстояние между центрами трещин.

Если ядра $K_{ij}^{\circ}(s, t) = 0$, то система интегральных уравнений (2.1) описывает упругое равновесие сферической оболочки с двумя коллинеарными трещинами.

Решая систему сингулярных интегральных уравнений (2.1) методом механических квадратур [6] при постоянной нагрузке $N_2^{\circ} = \text{const}$ и $M_2^{\circ} = \text{const}$, для определения коэффициентов интенсивности усилий K_i^{\pm} и моментов K_3^{\pm} в окрестности внешних (+) и внутренних (-) вершин трещин получим выражения

$$K_i^+ = k_i \frac{a_i}{2} \sum_{m=1}^{n-1} A_m^i, \quad K_i^- = k_i \frac{a_i}{2} \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^{m+1} A_m^i \quad (i=1,3) \quad (2.2)$$

$$k_1 = N_2^{\circ} \sqrt{l}, \quad k_3 = N_2^{\circ} R c \sqrt{l}, \quad A_m^i = \frac{2}{n} \sum_{h=1}^n \varphi_{ih}^* \cos m\theta_h$$

$$\varphi_{ih}^* = \varphi_i^*(x_h), \quad \varphi_i^*(x) = - \frac{D_0}{N_2^{\circ}} \varphi_i(x), \quad \varphi_i(x) + c_i = \sqrt{1-x^2} \Psi_i(x)$$

Здесь c_i — постоянные, определяемые из условий (1.6), φ_{ih}^* — корни системы алгебраических уравнений

$$\sum_{h=1}^n \alpha_{mh} \varphi_{1h}^* + \sum_{h=1}^n \beta_{mh} \varphi_{3h}^* = 1 \quad (m=1, n) \quad (2.3)$$

$$\sum_{k=1}^n \beta_{mk} \varphi_{1k}^* + \sum_{k=1}^n \gamma_{mk} \varphi_{3k}^* = p \quad \left(p = \frac{M_2^0}{N_2^0 R c} \right)$$

где в случае двух коллинеарных трещин имеем

$$\alpha_{mk} = \frac{1}{2n} [a_1 \psi_{mk} + K_1(z_1) + K_1(z_2)], \quad \beta_{mk} = \frac{1}{2n} [K_2(z_1) + K_2(z_2)]$$

$$\gamma_{mk} = \frac{1}{2n} [a_2 \psi_{mk} + K_3(z_1) + K_3(z_2)], \quad \psi_{mk} = \frac{1}{\sin \theta_m} \operatorname{ctg} \frac{c_{mk}}{2}$$

$$K_1(z_j) = K_{11}^{\circ}(z_j) - \Gamma_m^j, \quad K_2(z_j) = K_{13}^{\circ}(z_j) - \Gamma_m^{j+2}, \quad K_3(z_j) = K_{33}^{\circ}(z_j) - \Gamma_m^{j+4}$$

$$\Gamma_m^j = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n K_{11}^{\circ}(\alpha_j), \quad \Gamma_m^{j+2} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n K_{13}^{\circ}(\alpha_j), \quad \Gamma_m^{j+4} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n K_{33}^{\circ}(\alpha_j) \quad (j=1,2)$$

$$z_1 = \lambda |\cos \theta_m - \cos \theta_k|, \quad z_2 = -\lambda (\cos \theta_m + \cos \theta_k + 2d/l)$$

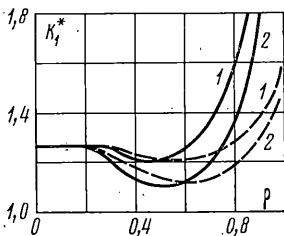
$$\alpha_1 = \lambda |\cos \theta_m - \cos \theta_r|, \quad \alpha_2 = -\lambda (\cos \theta_m + \cos \theta_r + 2d/l)$$

$$c_{mk} = \theta_m - \theta_k \quad (|m-k| - \text{нечетное}), \quad c_{mk} = \theta_m + \theta_k \quad (|m-k| - \text{четное})$$

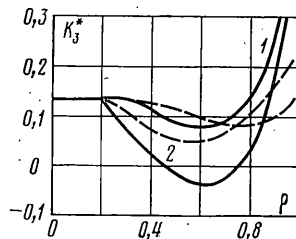
$$\theta_s = (s-1/2)\pi/n \quad (s=m, k, r)$$

Численные расчеты величин коэффициентов интенсивности усилий и моментов проведены на основании формул (2.2) на ЭВМ «Минск-32».

На фиг. 1, 2 приведены соответственно графики изменения относительных коэффициентов интенсивности усилий $K_1^* = K_1/k_1$ и моментов $K_3^* = K_3/k_3$ в оболочке при сближении двух (кривые 1) и четырех (кривые 2) трещин одинаковой длины ($\lambda=1$) при $M_2^0=0$ в зависимости от параметра $\rho=l/d$. Сплошными линиями обозначены коэффициенты интенсивности в окрестности внутренних вершин, а штриховыми — в окрестности внешних вершин трещин.



Фиг. 1



Фиг. 2

Из приведенных графиков следует, что взаимодействие полей напряжений в случае четырех трещин начинается при большем расстоянии между вершинами трещин ($\rho=0,2$), чем в случае двух трещин ($\rho=0,3$). При этом коэффициенты интенсивности усилий и моментов в начале взаимодействия уменьшаются, а затем начинают возрастать, т. е. существует диапазон расстояний между трещинами, в котором величина коэффициентов интенсивности меньше, чем в случае одной трещины. При дальнейшем сближении коэффициенты интенсивности в окрестности внутренних вершин трещин увеличиваются и стремятся к бесконечности. В окрестности внешних вершин: в случае двух трещин они стремятся к величинам, соответствующим одной трещине двойной длины; в случае четырех трещин коэффициенты K_1^* несколько уменьшились, а коэффициенты K_3^* увеличились по сравнению с двумя трещинами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Осадчук В. А., Подстригач Я. С. К определению напряженного состояния в замкнутой цилиндрической оболочке и бесконечной пластинке с трещинами. — Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 3, с. 69–78.
2. Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Федюк Е. М., Николишин М. М. Метод дисторсий в теории тонких оболочек с трещинами. — Математические методы и физико-механические поля: Сб. статей. Киев: Наукова думка, 1975, вып. 1, с. 29–41.
3. Власов В. З. Избр. труды. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 528 с.
4. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 1. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1962. 274 с.
5. Осадчук В. А., Федюк Е. М. Система произвольно ориентированных трещин в пологой сферической оболочке. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1975; № 8, с. 711–714.
6. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 303 с.

Львов

Поступила в редакцию
20.II.1980